Digitized by the Internet Archive
in 2014

https://archive.org/details/traitedestabilit00pill

TRAITÉ

DE

STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

ÉDITION DE LUXE

Exemplaire N°

APPARTENANT A

COURS TECHNIQUES
DE L'ARCHITECTE ET DU CONSTRUCTEUR
Publiés par une réunion de Professeurs, d'Architectes et d'Ingénieurs
SOUS LA DIRECTION DE M. **Jules PILLET**, INGÉNIEUR-ARCHITECTE
Ancien Elève des Ecoles Polytechnique, des Ponts et Chaussées et des Beaux-Arts,
Professeur de Constructions civiles au Conservatoire national des Arts et Métiers,
Professeur aux Ecoles nationales des Beaux-Arts et des Ponts et Chaussées, et à l'Ecole spéciale d'Architecture,
Inspecteur honoraire de l'Enseignement du dessin et des musées.

TRAITÉ
DE
STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

LEÇONS PROFESSÉES

AU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
ET
A L'ÉCOLE SPÉCIALE D'ARCHITECTURE

PAR
JULES PILLET
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS, A L'ÉCOLE NATIONALE DES BEAUX-ARTS, ETC.

EN VENTE
AU
DÉPOT DES COURS TECHNIQUES
(*Siège provisoire* chez M. J. PILLET.)
18, Rue Saint-Sulpice, 18, Paris

1895

Droits de traduction et de reproductions réservés.

Les gravures de cet Ouvrage ont été faites par M. PERRONNE.

Il a été imprimé par M. COMTE-JACQUET, à Bar-le-Duc.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait

au Ministère de l'Intérieur

Le Avril 1895.

BAR-LE-DUC. — IMPRIMERIE ET LITHOGRAPHIE COMTE-JACQUET

58, RUE DE LA ROCHELLE, 58

PRÉFACE

Cet ouvrage s'adresse surtout aux personnes, Architectes, Ingénieurs et Constructeurs, qui désirent étudier les questions de résistance des matériaux et de stabilité des constructions sans avoir recours au calcul infinitésimal.

C'est à la mécanique la plus élémentaire, ainsi qu'à la géométrie, que, sous forme d'épures de **Statique graphique**, j'emprunte les solutions de toutes les questions, même de celles qui sont les plus ardues, telles que le calcul des poutres continues, le calcul des arcs et la détermination de la poussée des terres.

Un coup d'œil jeté sur la table des matières suffira pour faire comprendre le plan de cet ouvrage. En réalité il est le développement du cours de Stabilité des constructions que, depuis 1878, mon maître et ami M. **Emile Trélat** m'a fait l'honneur de me confier à l'**Ecole spéciale d'Architecture** en remplacement du regretté **de Dion.** Il reproduit aussi les leçons sur le même sujet que, à titre de suppléant de M. Trélat et, ensuite, comme titulaire du cours de constructions civiles, j'ai faites à plusieurs reprises au **Conservatoire des Arts et Métiers**. Si j'insiste sur les origines de cet ouvrage c'est pour convaincre celui qui tentera de le lire qu'il aura sous les yeux un livre élémentaire dans sa forme quoique assez complet dans ses développements, un livre qui n'aura été publié qu'après avoir, auprès de nombreux élèves, subi la sanction de l'enseignement et avoir, comme conséquence de ces épreuves répétées, éprouvé des modifications et, surtout, des simplifications nombreuses.

Il est sans doute bien prétentieux à moi de faire paraître un traité de Stabilité des Constructions alors qu'il existe déjà les ouvrages de **Bresse**, de **Collignon**, de **Rouché**, de **Kœklin**, de **Brune** et de tant d'autres Ingénieurs, alors que **M. Maurice Lévy** a fait bénéficier les constructeurs de son admirable traité de **Statique graphique**, véritable monument dans lequel on trouve tout ce qui a été dit aussi bien que tout ce qui sera dit, pendant longtemps encore, sur cette science et que je devrais citer à chaque page de mon modeste, quoique trop volumineux, ouvrage. Je n'apporte rien de bien nouveau comme théorie si ce n'est, peut-être, dans la question des poutres continues, le théorème des **deux moments trisecteurs** joint à celui des **Centres de correction** (v. n° 286 et 288), et dans celle des arcs, l'emploi des quatre points que je nomme des **Stabili-centres** (v. n° 418), à l'aide desquels la détermination de la poussée, ainsi que celle des moments d'encastrement aux sommiers, se ramène à l'équilibre de quatre forces, situées dans un même plan, et appliquées en ces quatre points. Si quelqu'un me contestait la priorité de ces théorèmes je la lui abandonnerais immédiatement, car je tiens à répéter que ce n'est pas l'œuvre d'un savant que j'ai entreprise mais exclusivement celle d'un professeur dont la plus grande récompense serait d'avoir été compris et d'avoir contribué à vulgariser cette belle science, toute moderne, de la Stabilité des constructions.

En terminant, je veux remercier mon maître M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, pour les bons conseils qu'il ne m'a jamais refusés et pour l'emprunt qu'il m'a permis de faire de ses méthodes ; MM. **Arana**, **Diébold** et **Jolibois**, Conducteurs des Ponts et Chaussées, qui en rédigeant et en autographiant les leçons que j'ai faites au Conservatoire en 1889, m'ont puissamment aidé dans la publication de cet ouvrage ; M. **Cordeau**, Ingénieur Civil, ancien Elève de l'Ecole Centrale, auquel je dois presque toutes les applications numériques de mon livre et certains points de théorie, entre autres (v. n° 451 et suivants) l'étude, qu'il a rendue si simple, de l'action du vent sur les fermes en arc; M. **Woyciechowski**, Ingénieur des Constructions civiles, ancien Elève de l'Ecole des Ponts et Chaussées, qui a bien voulu me faire profiter de sa grande expérience du calcul appliqué à la construction et revoir mes dernières épreuves.

Paris, le 15 avril 1895.

J. PILLET.

ERRATUM

Page	Colonne	Ligne	Lire
16	gauche	(43) 8	$f_2G' + f_2G = 2f_2$.
56	gauche	28	Considère.
56	droite	34	Extension.
64	droite	1	$\varphi = \frac{-890}{2020}$.
83	droite. . . .	col. 4 du tableau	E*i* au lieu de EI.
89	gauche	(*f*) 2	fig. (133-II).
95	droite	18	X'_0 au lieu de X_0.
99	gauche	(*b*) 4	$v_0 + \frac{h}{l}$.
99	gauche . . .	(*b*) 9.	$\mu + \frac{h}{l}x = \left(v_0 + \frac{h}{l}\right)x + V_0^B(x - \gamma')$.
186			§ 2.
192	gauche	(*c*) 11	A*b* au lieu de AB.
214	gauche	281 (*a*) 12	fig. (262-II).
214	gauche	281 (*a*) 22	p_1 au lieu de p_2.
215	fig. (262-II).		L'origine n'a pas sa lettre A.
216	gauche	(*c*) 16	fig. III.
216	droite	(*a*) 13	$\frac{Q}{2}$ au lieu de Q.
227	gauche	291. 12	v. 193-*b*.
238	droite	(*b*) 14.	A_3F_4 au lieu de A_2F_4.
239	gauche	305 (*a*) 20	ABD.
246	droite	1	*d*.
248	fig. (295-II)	Le nœud *n*, qui marque le point d'inflexion de gauche, doit être un peu plus à gauche, au croisement de la parabole et de la ligne d'appui AB. Le nœud *n'* manque au point d'inflexion de droite.	
249	fig. 296	suivant E'G'	2.5·7.*p*, au lieu de 3.5.7.*p*.
284	droite	fig. 328	La lettre B manque à l'appui de droite.
287	gauche	17.	fig. 330.
287	gauche	43	1 ou 6 au lieu de 1 ou 2.
297	gauche	fig. II	manque cote 2400 entre *a* et *j*.
300	fig. (343-I)		flèche en trop sous Y_1.
340	droite	(*c*) 6	(fig. 381-I).
362	droite	(*b*) 24	Garabit.
364	droite	20	(v. *e*).
365	droite	fig. 413	la lettre G' manque au milieu de A'B'.
366	droite	formule (3)	$\frac{N}{\Omega} - \frac{Mv'}{I}$.
366	droite	fig. 414	X au lieu de λ.
368	gauche	(*b*) 6	sommier de droite.
378	fig. 421-VII.		substituer la figure ci-contre.
379	droite	8	(422-V).
385		En haut de la fig. 426-I	αA_1 au lieu de αA.
389	gauche	toute la 1re ligne du tableau	A_1 au lieu de A.
389	gauche	ligne au-dessous	la force A_1.
396	droite	(*b*) 4	fig. 433.
396	droite	22	(p. 392).
407	droite	(*d*)	(v. n° 429).

VII

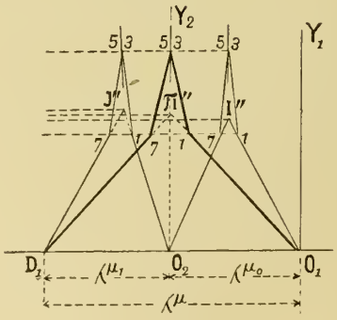


Fig. 421

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE. — ÉLÉMENTS DE STATIQUE GRAPHIQUE

CHAPITRE I. — **Les Forces et les Couples.**

Pages

1. Rappel de définitions. — Forces et Couples. 1
2. Composition des forces concourantes. 2
3. Composition des couples 3
4. Composition des forces appliquées à un corps solide 4

CHAPITRE II. — **Composition et décomposition graphique des forces situées dans un même plan.**

1. Forces dont on ne veut pas chercher les points de rencontre . 5
2. Changement de pôle 8
3. Décomposition des forces 9

CHAPITRE III. — **Couple résultant du transport des forces.**

1. Théorème fondamental des moments de transport 12
2. Efforts tranchants 14
3. Funiculaires d'après la méthode de M. Collignon. 15

CHAPITRE IV. — **Problèmes sur les aires.**

Pages

1. Méthode graphique de quadrature des aires planes limitées par des contours polygonaux 20
2. Quadratures des surfaces planes limitées par des lignes courbes 21
3. Autres procédés de quadrature 22

CHAPITRE V. — **Recherche des centres de gravité.**

1. Centres de gravité des principales figures géométriques . . . 25
2. Centres de gravité des figures planes quelconques. 26

CHAPITRE VI. — **Moments d'inertie des aires planes.**

1. Généralités sur les moments d'inertie. 29
2. Ellipse centrale d'inertie. 30
3. Recherche algébrique des moments d'inertie équatoriaux. . . 33
4. Recherche algébrique des moments d'inertie polaire 38
5. Recherche graphique des moments d'inertie 39

DEUXIÈME PARTIE. — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

CHAPITRE I. — **Phénomènes généraux de défiguration.**

1. Hypothèses sur la constitution des corps. 45
2. Analyse des phénomènes généraux de défiguration 47
3. Equilibre statique et équilibre moléculaire d'un organe de construction 50

CHAPITRE II — **Tensions :**

1re Section. — *Tension simple. — Traction et compression.*

1. Lois de la traction. 53
2. Différentes phases de la défiguration 55
3. Analyse de la qualité d'un métal 57
4. Effets des efforts prolongés et des chocs. 59
5. Effets des efforts répétés ou alternés 60
6. Influence du mode de fabrication et des actions mécaniques déformatrices 61
7. Lois de la compression 62
8. Modules et coefficients usuels. 63

2e Section. — *Tension composée. — Flexion.*

1. Formules générales de la flexion 64
2. Cas usuels de la flexion. 67
3. Limite d'application des formules de la flexion. 71
4. Flexion dans les matériaux à élasticité dissymétrique. 74

CHAPITRE III. — **Glissement.**

1re Section. — *Glissement simple ou tranchage.*

1. Lois du glissement simple 76

2e Section. — *Glissement composé ou torsion.*

2. Lois de la torsion. 78

CHAPITRE IV. — **Travail moléculaire. — Dilatation calorifique.**

1. Travail moléculaire de tension 81
2. Travail moléculaire de glissement 82
3. Travail moléculaire total 82
4. Dilatation calorifique. 82
5. Conclusions de la deuxième partie 84

TROISIÈME PARTIE. — RÉSISTANCE ET STABILITÉ DES ORGANES ISOLÉS

CHAPITRE I. — Poutres à une travée.

1re Section. — *Actions et réactions développées sur une poutre.*

Pages
1. Nature des réactions développées par les appuis 85
2. Détermination des réactions de liaison. 88
3. Moments fléchissants et efforts tranchants dans une poutre . . 90
4. Représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants pour poutres encastrées. 93

2e Section. — *Défiguration et résistance d'une poutre.*

5. Lois de la défiguration 96
6. Application aux poutres non encastrées 100
7. Poutres à section constante, encastrées et non chargées . . . 107
8. Poutres à section constante, encastrées et chargées 111
9. Poutres à section variable, encastrées et chargées 114
10. Corbeaux ou poutres en encorbellement. 123

CHAPITRE II. — Cas usuels des poutres à une travée et à section constante.

1. Poutres chargées d'un poids unique en leur milieu 128
2. Poutres uniformément chargées 129
3. Corbeaux 132
4. Tableau résumant les cas usuels de la poutre à une travée . . 135
5. Problème des aiguilles de barrage 135
6. Problème de la poutre surchargée 140

CHAPITRE III. — Planchers en bois.

1re Section. — *Planchers à travures simples.*

1. Construction des planchers en bois et charges qu'ils supportent 145
2. Calcul des solides 147
3 Calcul d'un solivage parallèle 151
4. Solivage enchevêtré. 156

2e Section. — *Planchers à travures composées.*

5. Construction et calculs. 159
6. Choix du système à adopter 163

CHAPITRE IV. — Planchers en fer à travures simples.

1. Etude des fers en double Té 169
2 Solivages parallèles en fer. 171
3. Solivages en fer, surchargés et enchevêtrés 179

CHAPITRE V. — Pièces d'égale résistance.

1re Section. — *Poutres d'égale résistance, en tôle.*

1. Poutres composites à âme pleine. 184
2. Méthode approchée de répartition des tôles de semelles . . . 186
3. Méthode exacte de répartition des tôles de semelles 193

2e Section. — *Figures solides d'égale résistance.*

4. Corbeaux d'égale résistance 196
5. Poutres d'égale résistance 200

CHAPITRE VI. — Charge mobile sur une poutre à deux appuis.

Pages
1. Rappel de quelques propriétés de la parabole 202

1re Section. — *Moments fléchissants dus à une charge mobile.*

2. Préliminaires 204
3. La charge mobile est un poids unique 205
4. La charge mobile est un convoi. 206

2e Section. — *Efforts tranchants dus à une charge mobile.*

5. Préliminaires. 212
6. La charge mobile est un poids unique 213
7. La charge mobile est un convoi. 214

CHAPITRE VII. — Poutres continues. — Charges permanentes.

1. Préliminaires 218
2. Solution graphique du problème de la poutre continue . . . 222
3. Solution algébrique du problème de la poutre continue . . . 227
4. Poutre continue à section constante 228
5. Cas usuels des poutres continues. 231
6. Poutre en double potence dite en *Cantilever* 233

CHAPITRE VIII. — Poutres continues. — Surcharges défavorables.

1. Préliminaires 236
2. Effets produits sur une seule travée chargée 240
3. Epure définitive des efforts tranchants maxima 245
4. Epure définitive des moments fléchissants maxima. 248

Note. — Epures relatives au train type

1. Epure des moments fléchissants. 251
2. Epure des efforts tranchants 255

CHAPITRE IX. — Supports et pièces chargées de bout.

1re Section. — *Introduction.*

1. Frottement : ses lois 256
2. Théorie des polaires réciproques 258

2e Section. — *Transmission des pressions par contact.*

3. Transmission des pressions par surfaces planes 259
4. Théorie du noyau central 261
5. Pressions de sécurité 264

3e Section. — *Résistance à l'aboutement.*

6. Pièces aboutées : définition et classification. 266
7. Formules en usage pour les pièces aboutées 267
8. Pièces comprimées dans les charpentes en bois 276

QUATRIÈME PARTIE. — RÉSISTANCE ET STABILITÉ DES SYSTÈMES D'ORGANES

CHAPITRE I. — **Fermes de Combles.**

1re Section. — *Généralités.*

Pages
1. Charges que supportent les combles 279
2. Propriétés des systèmes articulés 284

2e Section. — *Fermes en bois.*

3. Ferme de 8 mètres de portée 286
4. Ferme de 8 mètres, avec tirant portant plancher 295
5. Ferme de 12 mètres, avec jambettes 299
6. Ferme de 16 mètres de portée 302

3e Section. — *Fermes métalliques.*

7. Généralités 306
8. Ferme Polonceau à une bielle par arbalétrier 308
Pages
9. Pièces secondaires des combles en fer 319
10. Ferme Polonceau à trois bielles pour arbalétrier 328
11. Fermes diverses 332

CHAPITRE II. — **Poutres en treillis.**

1re Section. — *Systèmes articulés stricts.*

12. Treillis simples 335
13. Charges roulantes sur les poutres en treillis 344
14. Effets divers produits dans les poutres en treillis 351
15. Treillis multiples 353

2e Section. — *Systèmes articulés à barres surabondantes.*

16. Treillis multiples à montants verticaux 354
17. Contreventements 355
18. Piles métalliques 357

CINQUIÈME PARTIE. — LES ARCS

CHAPITRE I. — **Théorie des arcs.**

1. Généralités 361
2. Défiguration des pièces courbes 368
3. Constantes d'un arc 376
4. Lignes d'influence 380
5. Calcul de l'équilibre général d'un arc 386
6. Equilibre moléculaire des sections et courbe de pressions . . . 394
7. Arcs à sommiers encastrés 397

CHAPITRE II. — **Applications.**

1. Arc à trois rotules 401
2. Arc à deux rotules 406
3. Arc à sommiers encastrés 411

CHAPITRE III. — **Fermes en arc.**

1. Généralités 415
2. Arc continu soumis à l'action du vent 416

SIXIÈME PARTIE. — LES MASSIFS EN MAÇONNERIE

CHAPITRE I. — **Les voûtes.**

1. Généralités 421
2. Avant-projet d'une voûte 426
3. Méthode des courbes de pression, hypothétiques, dite *Méthode de Méry* 429
4. Méthode des indicatrices, dite *Méthode de Durand-Claye* . . . 431
5. Méthode des défigurations élastiques 437

CHAPITRE II. — **Poussées.**

1. Généralités 440
2. Poussée des terres 441
3. Poussée de l'eau et poussée du vent 446
Note. — **Méthode de Poncelet** pour déterminer la poussée des terres 447

CHAPITRE III. — **Les Murs.**

1. Murs soutenant des terres ou de l'eau 449
2. Murs soumis à l'action du vent 454
3. Piles ou culées d'un arc ou d'une voûte 456
4. Fondation des murs ou des piédroits de voûtes 458

SEPTIÈME PARTIE. — LES ASSEMBLAGES EN FER

CHAPITRE UNIQUE

1. Rivets et rivures 461
2. Résistance d'un rivetage 464
3. Calcul d'un rivetage parallèle 467
4. Rivetages convergents 469
5. Assemblages par rivures 471
6. Boulons et chevilles 476

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

(Voir la table des matières, page 479.)

ABRÉVIATIONS

I. — Alphabet grec

Nota. — Ce tableau ne contient que les lettres grecques, majuscules et minuscules, qui seront employées dans l'ouvrage.

	α	alpha		ε	epsilon		ν	nu		ρ	ro
	β	bêta	Θ	θ	thêta		ξ	xi	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma		λ	lambda	Π	π	pi		τ	tau
Δ	δ	delta		μ	mu						

Φ	φ	phi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

II. — Mesures

Longueurs	Surfaces	Volumes	Poids et Forces	Travail et Moments
m = mètre linéaire.	m^2 = mètre carré.	m^3 = mètre cube.	t = tonne de 1000 kilogrammes.	K = Kilogrammètre. (unité de travail) (1)
dm = décimètre id.	dm^2 = décim^tre carré.	dm^3 = décim^tre cube.	k = kilogramme.	km = Kilogramomètre. (unité de moment) (2)
cm = centimètre id.	cm^2 = centim^tre carré.	cm^3 = centim^tre cube.	g = gramme.	tm = Tonnemètre. (3)
mm = millimètre id.	mm^2 = millim^tre carré.	mm^3 = millim^tre cube.		

(1) Produit d'une force de 1 kilogramme par un chemin parcouru égal à 1 mètre.
(2) Produit d'une force de 1 kilogramme par un bras de levier égal à 1 mètre.
(3) Produit de 1 tonne (1000^k) par un bras de levier égal à 1 mètre. $tm = 1000\ km$.

III. — Signes abréviatifs

Signes de Renvoi		Signes Algébriques et Trigonométriques	
$p.$ = page.	$v.$ §. = voir paragraphe.	$Log.$ = Logarithme vulgaire	cos = cosinus.
$v.\ p.$ = voir page.	$v.\ Ct.$ = voir complément	$L.$ = Logarithme népérien	tg = tangente.
$v.\ n^o.$ = voir n° d'alinéa.	$fig.$ = figure.	sin = sinus.	$cotg.$ = cotangente.

IV. — Lettres et Signes conventionnels

(*a*) *Symboles.*

Δx (lisez *delta de x*), Δy (lisez *delta de y*), Δs (lisez *delta de s*) — indiquent les accroissements donnés aux quantités x, y et s pour les faire passer de leur valeur à une autre, en général très peu différente de la première.

$\Sigma\omega$ (lisez *sigma de* ω), Σp (lisez *sigma de p*), Σf (lisez *sigma de f*) — indiquent des sommes de quantités finies, semblables entre elles.

(*b*) *Modules et Coefficients.*

1° Traction et Compression.

E = module d'élasticité (rapporté au m^2).
R′ = limite de rupture (arrachement ou écrasement) id.
R = résistance de sécurité id.

2° Glissement transversal (cisaillement).

G = module d'élasticité (rapporté au m^2).
S′ = limite de rupture (cisaillement) id.
S = résistance de sécurité id.

3° Chaleur.

t = température, en degrés centigrades.
τ = coefficient de dilatation linéaire.

(*c*) *Surfaces.*

ω = une petite surface, ou encore un élément infiniment petit d'une surface finie.

Ω = une grande surface, ou encore la somme d'un nombre infiniment grand de surfaces élémentaires analogues telles que ω. (Ω = Σω.)

(*d*) *Forces et Moments.*

f, p = en général, des petites forces, ou des petits poids élémentaires.

F, P = en général, de grandes forces et de grands poids, ou des sommes de forces, ou de poids élémentaires. (F = Σf ou P = Σp.)

M = ordinairement, un moment fléchissant.
μ = ordinairement, l'unité de moment fléchissant.
N = ordinairement, un moment de torsion.
T = ordinairement, un effort tranchant.

I_x, I_y, I_l = moments d'inertie équatoriaux, par rapport aux droites ox, oy, oL. (Le plus souvent on écrira I sans indice.)

J_a, J_b, J_c = moments d'inertie polaires, par rapport aux points A, B, C,... (Le plus souvent on écrira J sans indice.)

ρ = en général, un rayon de giration.

* Indique un paragraphe que l'on peut passer en première lecture.

PREMIÈRE PARTIE

ÉLÉMENTS DE STATIQUE GRAPHIQUE

CHAPITRE PREMIER

LES FORCES ET LES COUPLES

§ 1. — Rappel de définitions. — Forces et couples

1. **Des forces.** — On appelle *force* toute cause de mouvement ou de modification de mouvement. Ex.: la pesanteur; les liaisons qui gênent un mouvement ou qui l'empêchent de se produire.

Dans une force il faut distinguer :

1° *Sa ligne d'action*, c'est-à-dire la droite, ou trajectoire, suivant laquelle la force tendrait à faire mouvoir un point matériel auquel elle serait appliquée, si *elle prenait ce point au repos*;

2° *Sa direction*, c'est-à-dire le sens du mouvement qui se produirait ainsi sur la droite trajectoire;

3° *Sa grandeur*, c'est-à-dire le résultat de sa comparaison avec une force connue, toujours la même, qui sera prise pour unité;

4° *Son point d'application*, c'est-à-dire le point précis du corps où la force est appliquée. Mais la connaissance de ce point est moins importante, parce qu'on peut le déplacer sur la ligne d'action de la force sans changer l'équilibre statique du corps auquel la force est appliquée.

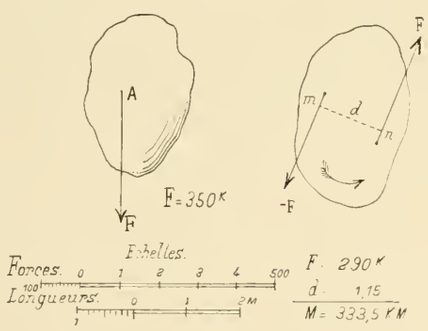


Fig. 1 Fig. 2

2. **Mesure des forces.** — Nous prendrons pour unité de force *le kilogramme*, c'est-à-dire l'effort que l'attraction ter-

restre exerce sur un décimètre cube d'eau. Cette force peut être mesurée à l'aide de dynamomètres.

Dans ce qui va suivre nous représenterons une force par une droite proportionnelle à son intensité; cette droite sera dirigée suivant la ligne d'action de la force, et une flèche en indiquera le sens (fig. 1).

Sur les épures relatives aux forces, c'est-à-dire sur les épures de *statique graphique*, on aura soin de dessiner l'échelle des forces.

Sur la figure 1, la force AF, mesurée à l'échelle, est une force de 350 k.

3. **Couples.** — Au lieu d'une seule force on peut en avoir plusieurs à considérer; elles forment alors un *système de forces.*

Parmi tous les systèmes de forces, le plus intéressant pour nous est celui qui porte le nom de *couple.*

Définition. — *Un couple (fig. 2) est un système de deux forces* (+F —F) *égales entre elles, parallèles et de sens contraire, appliquées à un même solide.*

Un pareil système de forces est dans un plan et il tend à faire tourner autour d'un axe perpendiculaire à ce plan le corps auquel il est appliqué.

4. **Moment d'un couple.** — On appelle *bras de levier* d'un couple, la longueur $mn = d$ (fig. 2) de la perpendiculaire commune aux deux forces. Le produit, $F \times d$, de l'intensité de l'une des forces par le bras de levier du couple s'appelle le *moment du couple.* Nous le représenterons par M.

$$M = F \times d.$$

§ 2. — Composition des forces concourantes

5. **Résultante. — Equilibrante.** — On appelle *résultante* d'un système de forces $ff'f''$, etc. une force unique F qui, agissant seule, produirait le même effet que l'ensemble des forces du système.

Une force unique qui, au contraire, détruirait l'effet de ce système de forces et, par conséquent, le tiendrait en équilibre est désignée sous le nom d'*équilibrante* de ce système.

La résultante et l'équilibrante ont même ligne d'action, même grandeur, mais des directions contraires.

Si F est la résultante, —F sera l'équilibrante.

6. **Forces concourantes.** — Lorsque les lignes d'action d'un système de forces FF'F'' (fig. 3) passent toutes par un

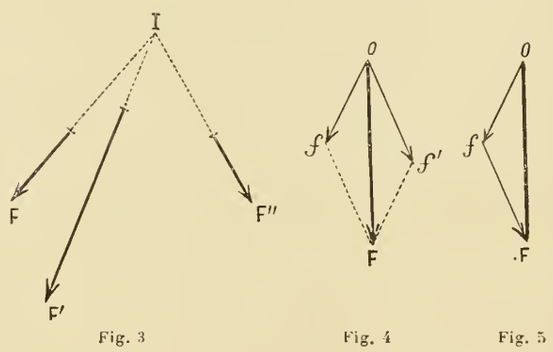


Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

même point I, on dit que les forces sont concourantes. Ces forces peuvent d'ailleurs n'être pas situées dans un même plan.

7. **Composition de deux forces concourantes.** — Deux forces concourantes f et f' (fig. 4) ont pour résultante la diagonale OF du parallélogramme construit sur ces deux forces comme côtés (fig. 4).

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de construire complètement ce parallélogramme ; il suffira de porter, bout à bout, les droites Of et fF (fig. 5), qui sont respectivement égales et parallèles aux forces f et f' et de même sens qu'elles. La ligne OF qui *ferme* le triangle, c'est-à-dire qui partant de l'origine O se termine à l'extrémité F est la résultante des forces f et f', tandis que la ligne FO qui *complète* le triangle, c'est-à-dire qui revient de l'extrémité F à l'origine O, est l'équilibrante de ces deux forces (fig. 5).

8. **Composition de plusieurs forces concourantes.** — Si au lieu de deux forces concourantes nous en avions un nombre plus considérable à composer $ff'f''f'''f''''$, nous procéderions de même, en portant bout à bout des droites

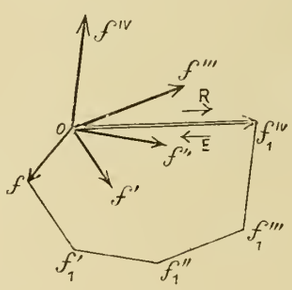


Fig. 6

Of, ff'_1, $f'_1f''_1$, $f''_1f'''_1$, $f'''_1f''''_1$ égales et parallèles à chacune des forces du système, et la *résultante* de ces cinq forces serait Of''''_1 que nous désignerons par R, tandis que *l'équilibrante* serait f''''_1O, égale et directement opposée à R et

que nous désignerons par E. Il est évident que les six forces E, $ff'f''f'''f''''$ forment un système en équilibre et que l'une quelconque de ces forces est l'équilibrante de toutes les autres.

§ 3. — Composition des couples

9. **Transport d'un couple.** — Un couple ne peut avoir une force unique ni pour résultante ni pour équilibrante ; il faut absolument un couple pour en remplacer un ou plusieurs autres ou pour leur faire équilibre.

On a démontré (v. Ct) que pour que deux couples soient équivalents il faut et il suffit :

1° Que leurs plans soient parallèles ;

2° Que leurs moments soient égaux et de même sens.

En d'autres termes, on peut, sans changer son effet, faire tourner un couple et le transporter en un endroit quelconque du solide, ou lié au solide, auquel il est appliqué, pourvu que ni la direction de son plan, ni la grandeur ni le sens de son moment ne changent.

10. **Axe d'un couple.** — Cette propriété a donné l'idée de représenter un couple par son *axe*.

Définition. — On nomme *axe* d'un couple une droite perpendiculaire au plan du couple, de longueur proportionnelle au moment de ce couple et dirigée de telle sorte qu'en plaçant l'œil à l'extrémité de cet axe et regardant le couple qui agit à son pied, on voit la rotation se faire dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette droite fictive peut être menée par un point quelconque, puisque nous avons le droit de déplacer le couple.

On se fera une idée concrète de l'axe d'un couple en imaginant un tournevis ou une clé de montre (AM, fig. 7) dont la position indiquerait le sens de la rotation et dont la longueur OM serait proportionnelle au moment du couple ; de telle sorte que plus la clé de montre (ici l'axe du couple) serait grande plus on devrait mettre de force pour tourner ; mais toujours de gauche à droite.

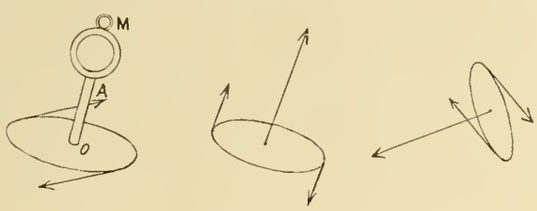


Fig. 7

11. **Couple unifié.** — Un couple n'est pas modifié lorsque, *sans changer son moment*, on augmente ses forces en réduisant son bras de levier ou inversement.

Lorsque le bras de levier d'un couple sera égal à l'unité, nous dirons que le couple est *unifié* ; dans ce cas chacune des forces du couple sera égale, *en valeur numérique*, au moment de ce couple.

12. **Unité de moment.** — Un moment est une quantité d'une nature spéciale, susceptible d'être mesurée, c'est-à-dire comparée à une quantité de même espèce prise comme unité. L'unité de moment est le **kilogramomètre** ; c'est le produit de l'unité de force (le kilogramme) par l'unité de longueur (le mètre) ; autrement dit : c'est le moment d'un couple qui aurait pour une de ses forces un kilogramme et, pour bras de levier, un mètre. Nous la désignerons par le signe K*m*.

Sur la fig. 2 : $F = 290$, $d = 1,15$,

et par suite :

$$M = 290 \times 1,15 = 333,5 \text{ K}m.$$

Nota. — On désigne quelquefois cette unité de moment par le mot *kilogrammètre* ; nous n'adopterons pas cette dénomination qui s'applique à la mesure du travail d'une force. Nous la réserverons pour indiquer l'unité de travail.

13. **Composition et équilibre des couples.** — Les couples étant représentés par leurs axes, on démontre (v. Ct) que,

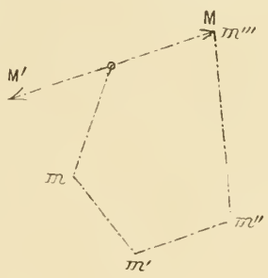


Fig. 8

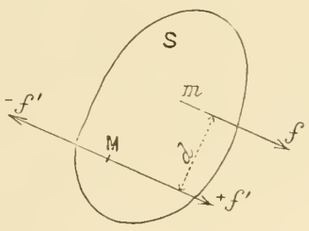


Fig. 9

pour les composer entre eux, il suffit de composer ces axes par la règle du polygone comme s'ils représentaient des forces (1).

Ainsi soient (fig. 8) m, m', m'', m''' les axes de couples. Pour avoir le couple résultant, on construira le polygone ayant ces axes pour côtés et le *couple résultant* aura pour axe OM, tandis que le *couple équilibrant* aura pour axe OM', égale et opposée à OM.

(1) Afin de ne pas confondre les forces avec les axes des couples, nous représenterons ces derniers par des traits mixtes —·—·—·—·—·—→

§ 4. — Composition des forces appliquées a un corps solide

14. **Transport d'une force en un point quelconque. — Couple ou moment de transport.** — Soit un solide S et une force f appliquée en un point m de ce corps (fig. 9).

Choisissons un point M invariablement lié au solide S ; nous pourrons appliquer en ce point deux forces égales et parallèles à f, ces deux forces $+f'$ et $-f'$ étant directement opposées. L'équilibre statique du solide S ne sera pas modifié. Mais nous pouvons considérer la force $+f'$ comme le résultat du transport au point M de la force f, parallèlement à elle-même. Quant aux deux forces f et $-f'$, elles forment un couple dont le moment est $f \times d$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème du transport. — *Toute force appliquée à un solide peut être transportée parallèlement à elle-même, en un point quelconque* M *de ce solide, à condition d'introduire un couple dont le moment est le produit de la force primitive par sa distance au point* M.

15. **Réduction d'un nombre quelconque de forces.** — Supposons un nombre quelconque de forces $ff'f''f'''$.. .., appliquées à un corps solide, ces forces étant dirigées d'une manière quelconque et appliquées en des points quelconques (figure inutile).

Choisissons arbitrairement un point M invariablement lié au corps, et, en ce point, transportons toutes les forces $ff'f''f'''$..... ; nous introduirons ainsi autant de couples qu'il y a de forces. Si nous avions primitivement cent forces appliquées d'une *manière quelconque* au solide, nous aurons maintenant cent forces appliquées toutes au point M, et cent couples, conséquences des transports en M.

Mais tous les couples se réduisent à un seul d'après la règle du polygone des axes de ces couples. De même toutes les forces transportées en M, se réduisent, puisqu'elles sont concourantes, à une seule force qui est leur résultante. Nous voyons donc que toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à une force unique passant par un point arbitrairement choisi et à un couple unique. La force unique ainsi obtenue s'appelle *la résultante de translation* et le couple unique prend le nom de *couple résultant*, ou encore de *moment de transport*.

16. **Polygone dynamique.** — La grandeur et la direction de la résultante de translation sont indépendantes du choix du point M, puisque le transport des forces se fait en les laissant parallèles à elles-mêmes et en conservant leur grandeur. Le polygone des forces sera, par conséquent, toujours le même. Nous pourrons donc le construire n'importe où, de manière à trouver la résultante sans surcharger nos dessins ; nous transporterons ensuite cette résultante où nous voudrons.

Ce polygone construit ainsi au préalable se nommera le polygone dynamique ou, plus simplement, le *dynamique* du système. N'importe où on le construira il donnera toujours la même résultante.

Par contre, les couples varieront avec le point choisi pour y faire le transport et il en sera, par suite, de même du couple résultant ; c'est pourquoi on ne peut pas savoir *à priori* quel sera l'axe du couple résultant, et c'est aussi pourquoi il faudra faire, dans chaque cas, une construction graphique pour le déterminer.

17. **Polygone funiculaire.** — Quand les forces seront toutes dans un même plan, ce qui sera le cas ordinaire pour les problèmes de stabilité des constructions, nous verrons plus loin que la détermination du couple (ou moment) résultant du transport en un point s'obtiendra en construisant un certain polygone, que nous nommerons un *polygone funiculaire*, ou, plus simplement, un *funiculaire*.

CHAPITRE II

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION GRAPHIQUE DES FORCES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN

§ 1. — Forces dont on ne veut pas chercher les points de rencontre

18. **Composition de deux forces concourantes.** — Soit à composer les forces f et f' (fig. 10). Lorsque le point de concours est accessible, la composition des deux forces s'effectue ainsi que nous l'avons indiqué (n° 7).

Mais si le point de concours est inaccessible, s'il est en dehors des limites de notre épure, nous emploierons des tracés dont voici le principe :

1° Nous chercherons la résultante en *direction* et en *grandeur*.

2° Nous introduirons des *forces fictives* qui seront deux à deux égales et opposées et qui, tout en donnant un système équivalent aux premières, car elles se déduiront deux à deux, nous permettront de ramener les constructions dans les limites de l'épure.

3° Nous chercherons la résultante, en *position*, en déterminant un seul de ses points, ce qui nous suffira, puisque nous l'aurons déjà en grandeur et direction.

19. **Direction et grandeur de la résultante.** — Construisons d'abord (fig. 10 *bis*) le *triangle dynamique* des forces f et f'. Pour cela, à partir d'un point quelconque A menons la droite AB égale et parallèle à f puis, du point B qui est son extrémité, la droite BC égale et parallèle à f' ; joignons AC et nous aurons ainsi une parallèle à la résultante des forces f et f', cette résultante R, étant mesurée par la longueur AC.

20. **Position de la résultante.** — Il suffira maintenant de trouver un point de cette résultante pour l'avoir en position.

A cet effet : Prenons à côté du dynamique un point quelconque O que nous nommerons un *pôle* et menons par ce point les trois *rayons polaires* : OA, OB et OC aboutissant aux sommets du dynamique. Désignons par r_1, r'_1 et r''_1 ces rayons polaires (1).

Nous formons ainsi trois nouveaux triangles ayant pour sommet le point O et pour base les forces f_1, f'_1 et R_1.

(1) Les forces AB, BC du dynamique se nomment aussi des *vecteurs*.

Les rayons polaires tels que OA $= r_1$ et OC $= r''_1$ qui aboutissent aux deux extrémités de la résultante R_1 se nommeront l'un, le *rayon polaire initial* (r_1) et l'autre, le *rayon polaire final* (r''_1).

Cela posé, nous allons d'abord énoncer la règle pour ob-

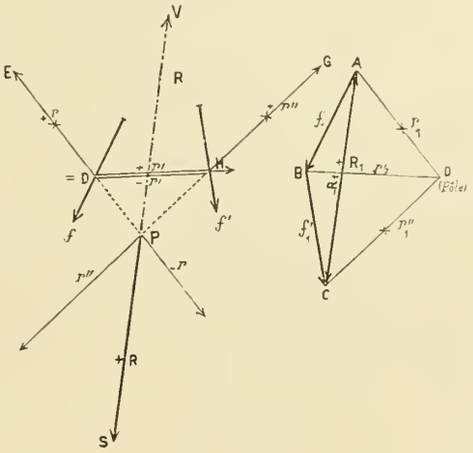


Fig. 10 Fig. 10 *bis*

tenir un point P de la résultante (fig. 10) ; nous la démontrerons ensuite.

21. **Règle dite : du funiculaire.** — 1° On mène, n'importe où, une parallèle ED au rayon polaire initial : c'est le *côté initial* du funiculaire (fig. 10).

2° Par le point D où ce côté rencontre la première force, on mène une parallèle DH au deuxième rayon r'_1 du dynamique : c'est le deuxième côté du funiculaire.

3° Par le point H où ce côté rencontre la deuxième force, on mène une parallèle HG, au rayon final r''_1 : c'est le *côté final* du funiculaire ; cela fait : on prolonge jusqu'à leur rencontre en P, le côté initial et le côté final du funiculaire. Ce point P appartient à la résultante R, qu'il ne reste plus qu'à tracer en la menant parallèle à la résultante R_1 du dynamique.

21*bis*. **Démonstration.** — Pour justifier ce tracé, commençons par rappeler : 1° que les côtés de tout triangle et plus généralement, de tout polygone fermé tels que OABO, parcouru dans un même sens en revenant au point de départ O, représentent en grandeur et direction des forces qui, si on les appliquait à un même point, s'y feraient équilibre ; 2° que l'on ne détruit pas l'état statique d'un solide en lui appliquant autant de fois que l'on voudra deux forces égales et directement opposées.

Cela posé : sur le dynamique, parcourons le triangle partiel ABO dans le sens *amorcé* par la force f_1. Ses trois côtés f_1, r'_1 et r_1 représentent trois forces susceptibles de s'équilibrer ; de ces trois forces, une d'elles, la force f_1, est donnée ; les deux autres r'_1 et r_1 sont des *forces fictives*. Il en sera de même du triangle partiel BCO si nous le parcourons dans le sens *amorcé* par la force f_1' et du triangle *total* CAO si nous le parcourons dans le sens *amorcé* par l'équilibrante $-R_1$.

Remarquons que lorsque nous parcourons le deuxième triangle partiel BCO dans le sens amorcé par la force f_1', nous parcourons une seconde fois la force fictive r'_1 mais précisément dans le sens inverse de celui où elle avait été parcourue sur le premier triangle partiel, et, de même, dans le triangle total CAO, les forces fictives r_1 et r''_1 sont parcourues en sens inverse de celui où elles l'avaient été sur les deux triangles partiels. Cela posé :

1° Au point D (fig. 10) appliquons de D vers E une force fictive $(+r)$ égale à r_1 du dynamique et dans le sens parcouru sur le premier triangle partiel du dynamique. Mais, pour ne rien changer à l'état statique du solide, appliquons en P la même force $-r$, mais en sens contraire.

2° A ce même point D, appliquons de D vers H une force fictive $+r'$ égale à r'_1 du dynamique, parcouru dans le sens amorcé par f_1 sur ce même triangle partiel, mais, pour ne rien changer encore à l'état statique, appliquons en H une force fictive $(-r')$ égale et contraire à la précédente.

3° Au point H appliquons de H vers G, une force fictive $+r''$ égale à r''_1 du dynamique dans le sens amorcé par f_1' sur le deuxième triangle partiel, et sur son prolongement, en P, pour ne pas modifier l'état statique du solide, appliquons une force r'' égale et contraire à la précédente.

4° Enfin, au point P appliquons en PV une force $-R$ égale à l'équilibrante $-R_1$ du dynamique.

Je dis que $-R$ est l'équilibrante du système des deux forces f et f'.

En effet : Le point D est en équilibre sous l'influence des trois forces qui lui sont appliquées, savoir : la force réelle f et les deux forces fictives $+r$ et $+r'$, puisque, sur le dynamique, à ces trois forces répond le premier triangle partiel ABO, parcouru dans le sens de f. Il en est de même pour le point H, sous l'influence de la force réelle f' et des deux forces fictives $-r'$ et $+r''$; et aussi de même pour le point P, sous l'influence des forces $-R$, $-r''$ et $-r$.

Les trois points D, H et P étant séparément en équilibre, il en est de même de tout le système des neuf forces. (Ces neuf forces sont les trois forces réelles f, f' et $-R$, et les six forces fictives.)

Mais les six forces fictives s'équilibrent deux à deux, savoir : $+r$ avec $-r$, $+r'$ avec $-r'$ et $+r''$ avec $-r''$. Donc les trois forces f, f' et $-R$ s'équilibrent ; par suite, $-R$ est l'équilibrante des deux forces f et f', et par conséquent son opposée $+R$ est la résultante, C. Q. F. D.

Remarque. — La droite R irait passer par le point de rencontre inaccessible des deux forces f et f'.

22. Polygone funiculaire. — Le contour polygonal EDHG que nous venons de construire ainsi se nomme un polygone funiculaire ou, plus simplement, un *funiculaire*.

On voit que ses côtés sont respectivement parallèles aux rayons polaires du dynamique.

La rencontre P du côté initial, ED, et du côté final, HG, donne un point P de la résultante. On voit qu'au début de l'épure le côté initial est en quelque sorte tracé en *attente* ; l'épure n'est terminée qu'une fois le coté final tracé. Vu leur importance, nous conseillons de marquer par une croix les côtés et les rayons polaires initiaux et finaux, afin de bien les reconnaître.

Généralisons cette construction au cas d'un nombre quelconque de forces, toutes situées dans un même plan.

23. Composition d'un nombre quelconque de forces (fig. 11 et 11 bis). — Soient f_1 f_2 f_3 f_4 (fig. 11) les forces qu'il s'agit de composer.

(*a*) Construisons en f_1' f_2' f_3' f_4' (fig. 11 bis) à partir d'un point quelconque m le *dynamique* des forces. La droite $f_1'm$, qui le complète, est l'équilibrante. Désignons-la par la lettre $-R'$ tandis que la résultante serait $+R'$ égale et directement opposée.

(*b*) Choisissons en O un *pôle* quelconque et menons les rayons polaires r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, r'_5.

r'_1 est le rayon initial, r'_4 est le rayon final ; on les reconnaît à ce qu'ils aboutissent aux extrémités de l'équilibrante $-R'$. Nous les marquons d'une croix. Cela posé :

(*c*) **Règle du funiculaire.** — 1° N'importe où, (fig. 11) nous traçons une droite NAP parallèle au rayon initial r'_1 du dynamique ; c'est le *côté initial* du funiculaire ; il est *en attente* et nous le marquons d'une croix.

2° Par le point A où ce côté initial rencontre la première force f_1 nous menons une droite AB, parallèle au

deuxième rayon polaire r'_2 du dynamique ; c'est le deuxième côté du funiculaire.

3° Par le point B où ce côté rencontre la deuxième force, f_2, nous menons BC parallèle au troisième rayon polaire r'_3 du dynamique ; c'est le troisième côté du funiculaire.

4° Par le point C où il rencontre la troisième force, f_3, nous menons CD parallèle au quatrième rayon r'_4, et ainsi de suite... Enfin :

5° Par le point D où l'avant-dernier (ici le quatrième) côté

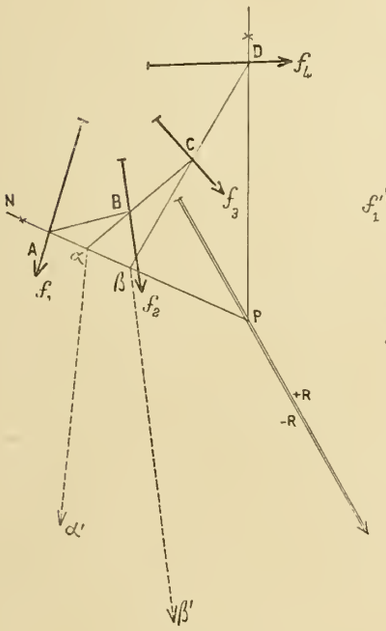


Fig. 11

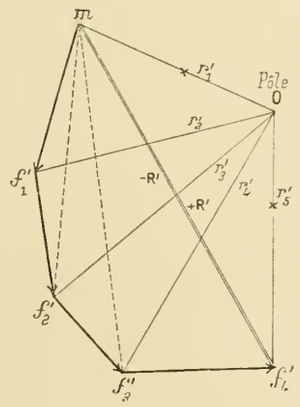


Fig. 11 *bis*

du funiculaire rencontre la dernière (ici la quatrième) force, nous menons une parallèle DP au rayon final du dynamique. C'est le côté final du funiculaire ; nous le marquons d'une croix ; nous le prolongeons, si cela est nécessaire, et nous prenons en P sa rencontre avec le côté initial.

La résultante +R (ou l'équilibrante —R) passe par le point P ; nous la traçons, si cela est utile, en la dessinant égale et parallèle à la résultante R′ du dynamique.

Nota. — La justification de cette règle se fera exactement comme celle de la règle donnée plus haut (n° 21 bis) pour deux forces.

23 *bis*. **Remarque pratique.** — Cette construction du funiculaire est la base de toute la statique graphique ; c'est pourquoi nous engageons le lecteur à exécuter, dès maintenant, un certain nombre d'épures du genre de celle des fig. 11 et 11 bis. Il reconnaîtra qu'il est assez facile de se perdre dans les côtés du funiculaire. Voici une remarque de nature à lui faire éviter les erreurs.

« A tout rayon du dynamique qui *aboutit* à l'intersection de deux forces répond, sur le funiculaire, le côté qui *jonctionne* les deux forces correspondantes. »

Ex. : Sur le dynamique, le troisième rayon r'_3 *aboutit* au croisement des forces f'_2 et f'_3 ; sur le funiculaire le troisième côté, BC, qui lui est parallèle, jonctionne les forces f_2 et f_3.

Cela est vrai aussi pour la résultante.

Ex. : Sur le dynamique le rayon initial r'_1 *aboutit* au croisement m de la résultante R′ et de la première force f'_1 ; sur le funiculaire le côté correspondant AP *jonctionne* la première force f, et la résultante R.

24. **Résultantes partielles.** — Si nous voulions avoir la résultante des deux premières forces f_1 et f_2 nous l'aurions en grandeur et en direction sur le dynamique ; cette résultante y serait représentée par la droite mf'_2 ; et sur le funiculaire l'intersection du côté initial avec le prolongement du côté BC nous donnerait un point α de cette résultante partielle.

En effet, pour les deux premières forces f_1 et f_2, la ligne NP joue le rôle de côté initial, et la ligne BC celui de côté final ; par conséquent leur intersection α est un point de leur résultante. Cette dernière sera $\alpha\alpha'$, égale et parallèle à mf'_2 du dynamique. De même, pour les trois premières forces, le point β, où le quatrième côté CD du funiculaire rencontre le côté initial NP, est un point de leur résultante, et cette dernière sera $\beta\beta'$, égale et parallèle à la résultante partielle mf'_3 du dynamique.

25. **Composition des forces parallèles.** — Lorsque les forces sont parallèles le polygone dynamique est réduit à une droite sur laquelle les forces sont placées bout à bout. Soit (fig. 12) à composer les forces parallèles f_1, f_2, f_3, f_4.

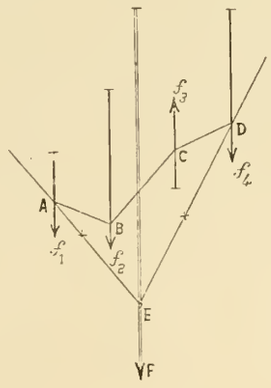


Fig. 12

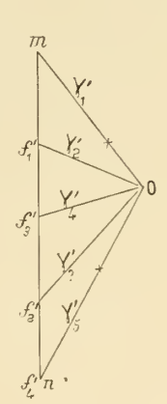


Fig. 12 *bis*

Plaçons ces forces bout à bout sur la ligne mn (fig. 12 *bis*), en observant le sens de leur action.

Sur l'épure les forces f_1, f_2 et f_4 sont dirigées de haut en

bas, la force f_3 est dirigée de bas en haut ; alors il faut lire comme suit, le dynamique : $mf_1'f_2'f_3'f_4'$; de f_2' à f_3' on remonte. La résultante est parallèle aux forces données et sa grandeur est mesurée par mf_4'.

Prenons un pôle O et menons les rayons polaires r_1', r_2', r_3', r_4', r_5', puis, choisissant un point quelconque A sur la force f_1, menons par ce point une droite AB parallèle à r_1' ; et une autre AB parallèle à r_2' ; menons successivement BC, CD, DE parallèles respectivement à r_3', r_4', r_5', et le point E, intersection du côté initial AE et du côté final DE du funiculaire sera un point de la résultante.

On voit toute l'analogie que présente cette figure avec la précédente.

* § 2. — Changement de pôle

26. **Position de la question.** — Dans le courant d'une opération on peut avoir à changer de pôle. Le dynamique ne changera pas, mais ses rayons polaires seront modifiés et il en sera de même des côtés du polygone funiculaire.

Il est évident que les résultantes partielles, qui dépendent uniquement de la grandeur et de la position des forces, sont indépendantes du choix fait pour le pôle ; donc, quel que soit ce pôle, les côtés du funiculaire se recouperont toujours sur les mêmes droites, car ces droites sont les résultantes partielles.

27. **Théorème des pivots.** — Nous allons, de plus, montrer que si l'on considère (fig. 13) deux polygones funiculaires répondant à deux pôles O′ et O″ (fig. 14), les côtés de même ordre de ces funiculaires se recoupent en des points qui sont tous sur une ligne droite parallèle à la ligne qui joint les pôles O′ et O″.

Raisonnons pour une seule force f_1, quelconque d'ailleurs, du solide (fig. 13).

Soit $mn = f_1'$ (fig. 14) la force correspondante du dy-

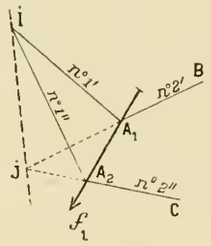


Fig. 13

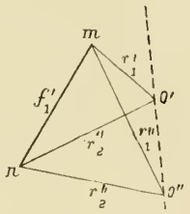


Fig. 14

namique et soient O′ le premier pôle, O″ le second, les rayons polaires étant r_1' et r_2' dans le premier dynamique et r_1, r_2'' dans le second.

Si par un point quelconque A_1 de la force f_1 (fig. 13) nous menons des parallèles aux rayons polaires r_1' et r_2', nous obtiendrons en IA_1 le premier côté (initial) du funiculaire répondant au pôle O′ et en A_1B le deuxième côté de ce même funiculaire.

De même en menant par un point A_2 de la force f_1, une parallèle aux rayons polaires r_1'' et r_2'', répondant au deuxième pôle O″, nous aurons en IA_2 le premier côté (initial) du funiculaire répondant au pôle O″ et en A_2C le deuxième côté de ce même funiculaire.

Il s'agit de démontrer que la droite IJ qui joint les intersections des premiers et des seconds côtés des funiculaires est parallèle à la ligne des pôles O′O″.

Pour le prouver interprétons mécaniquement chacune des figures 13 et 14 (1).

Au point A_1 imaginons trois forces, savoir : la force donnée f_1 et deux forces fictives A_1I et A_1B données en grandeur et direction sur le premier dynamique O′*mn* en le parcourant dans le sens amorcé par f_1. La force $+f_1$ est la résultante de ces deux forces fictives n° 1′ et n° 2′ du premier funiculaire.

De même au point A_2 imaginons trois forces, savoir : la force donnée f_1 mais *changée de sens* (nous la désignerons par $-f_1$) et deux forces fictives A_2I et A_2C données en grandeur et direction sur le deuxième dynamique O″*mn* en le parcourant dans le sens amorcé par la force $-f_1'$. La force $-f_1$ est, elle aussi, la résultante des deux forces fictives n° 1″ et n° 2″ du deuxième funiculaire.

Mais $+f_1$ et $-f_1$ se font équilibre ; donc il en est de même de leurs composantes, quelle que soit la manière dont on les combine. Or combinons n° 1′ avec n° 1″, leur résultante est donnée (fig. 14), en grandeur et direction, par la droite O′O″. Comme position elle passe en I ; combinons n° 2′ avec n° 2″, leur résultante est donnée, en grandeur et direction, par O″O′ et elle passe par le point J ; et comme il y a équilibre, il faut que ces résultantes soient directement opposées ; donc IJ est parallèle à O′O″. C.Q.F.D.

Ce que nous venons de démontrer pour deux côtés consécutifs de deux funiculaires, nous allons l'étendre à tous les autres côtés.

Je dis, pour cela, que si le théorème est vrai pour deux côtés consécutifs, il l'est pour tous les autres, successivement.

En effet, après les côtés n° 1 et n° 2, prenons les côtés

(1) Nous aurions pu donner une démonstration purement géométrique.

* *Ce signe indique un paragraphe ou un alinéa qui peut être passé en première lecture*

n° 3. Ils se recouperont en un point K (non figuré sur l'épure) ; la ligne KJ sera parallèle à la ligne des pôles et par conséquent confondue avec JI ; de même pour les côtés n° 4..... et ainsi de suite pour tous les côtés de même ordre. C. Q. F. D.

Nous appellerons *pivots* ces points d'intersection de deux côtés de même ordre. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant que nous désignerons sous le nom de théorème des pivots.

Théorème des pivots. — *Les pivots correspondant à deux funiculaires distincts sont tous sur une même droite parallèle à la ligne des pôles des dynamiques de ces funiculaires.*

§ 3. — Décomposition des forces

28. **Décomposition d'une force en deux autres.** — Nous avons vu (v. n°s 21, 22, 23) comment on peut trouver la résultante de plusieurs forces dont on connaît la grandeur et la position ; nous allons maintenant traiter le problème inverse, celui de la *décomposition* d'une force en plusieurs autres.

Considérons d'abord le cas où le nombre des forces cherchées est égal à deux.

Pour mettre en évidence l'utilité pratique de cette question, imaginons, par exemple, que l'on ait une ferme de comble AB soumise à un certain nombre de forces d'action verticales ou obliques telles que : la charge due à la neige, la pression du vent, etc., et proposons-nous de trouver les réactions X et Y dues aux appuis.

Nous savons, par les numéros précédents, comment on peut trouver la résultante des forces extérieures : soit F cette résultante. Nous n'avons donc qu'à considérer les trois forces X, Y et F et le problème revient à celui-ci :

Déterminer deux forces X et Y qui passent par les points A et B et qui fassent équilibre à la force F.

Dans la fig. 15 nous avons supposé qu'en A se trouve un chariot mobile sur lequel repose la ferme, tandis qu'en B cette ferme est fixée à un sabot d'amarrage. Il résulte de cette disposition que la réaction X est forcément verticale tandis que la réaction Y peut être quelconque.

Si X n'était pas donnée en direction le problème serait indéterminé.

Solution. — (*a*) Par un point C quelconque de la force F, menons deux droites CA et CB que nous considérerons comme le *côté initial* et comme le *côté final* d'un funiculaire à trois côtés, dont F serait la résultante et dont AB serait le côté intermédiaire.

(*b*). Construisons le dynamique répondant au funiculaire que nous venons de nous donner : le côté mF' sera égal et parallèle à F et nous en aurons les rayons polaires, initial et final, en menant les lignes mO et $F'O$ parallèles aux côtés AC et CB du funiculaire ; ces lignes se recouperont en O. Le point O sera le pôle.

(*c*). Menons maintenant mn parallèle à X et On parallèle à AB, enfin joignons $F'n$; la longueur mn mesurera l'intensité de la force ou *réaction* X tandis que $F'n$ donne la grandeur et la direction de la force ou *réaction* Y.

(*d*). Pour connaître le sens des réactions, suivons sur le

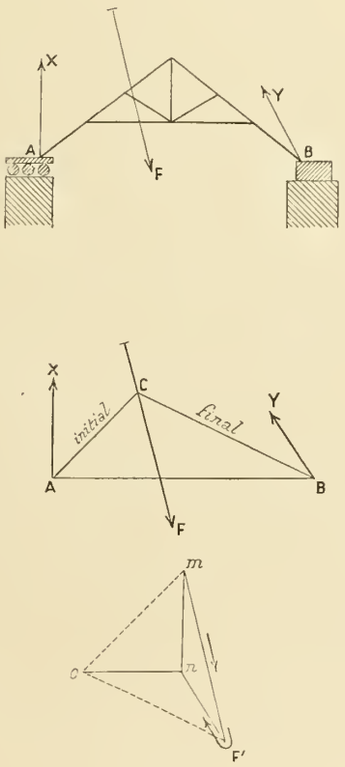


Fig. 15

dynamique le contour du triangle $mF'n$ dans le sens amorcé par la force F' et nous verrons que la première réaction agit dans le sens AX et l'autre dans le sens BY.

29. **Cas où les forces sont verticales.** — (*a*). **Position de la question.** — Très souvent les forces d'action sont verticales ainsi que les réactions : les choses se passent ainsi dans les poutres droites de ponts ou de planchers.

Soit (fig. 16) une poutre de pont supportant, en dehors de son poids propre, des charges verticales f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, inégales et inégalement réparties ; cette poutre repose sur

les piles en M et en N par l'intermédiaire de rouleaux de dilatation ; ce qui implique que les appuis M et N ne peuvent exercer que des réactions verticales. On demande de trouver les réactions des appuis, sans tenir compte du poids propre de la poutre.

Nous connaissons déjà la direction de ces réactions, c'est

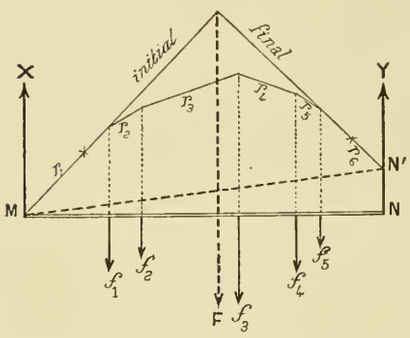


Fig. 16

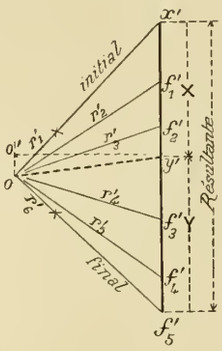


Fig. 16 *bis*

la verticale, à cause des rouleaux de dilatation ; pour en trouver les grandeurs nous composerons d'abord toutes les charges, afin de n'avoir à considérer que leur résultante ; nous décomposerons alors celle-ci en deux forces appliquées en M et en N, ces deux composantes de la force F étant égales et directement opposées aux réactions X et Y.

(*b*) **Solution** (fig. 16 *bis*). — 1° Construisons le dynamique des forces d'action et, prenant le point O comme pôle, menons les rayons polaires r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, r'_5, r'_6.

2° Construisons un funiculaire répondant à ce dynamique; l'intersection du côté initial r_1 et du côté final r_6, du funiculaire ainsi obtenu, donnera un point de la résultante d'action dont la grandeur, la direction et le sens sont déterminés sur le dynamique.

3° Prolongeons le côté initial et le côté final du funiculaire jusqu'à leur intersection en M et N' avec les lignes d'action des réactions X et Y.

4° Joignons MN' par une droite que nous nommerons la *ligne de fermeture* du funiculaire ; puis par le pôle du dynamique menons Oy' parallèle à MN'; la force X sera mesurée par $y'x'$ et la force Y par $y'f'_6$.

Quant au sens de ces réactions, la première sera dirigée suivant MX et la deuxième suivant NY.

30. **Remarque.** — Dans cette application, la *ligne de fermeture* MN' est oblique par rapport à la droite MN qui joint les points d'appui, et que l'on nomme *la droite d'appui*. Il peut y avoir intérêt à faire coïncider ces deux droites ; il suffit pour cela de changer le pôle, en prenant pour nouveau pôle un point O' situé à la fois sur une parallèle, $y'O'$, à la ligne d'appui menée par y' et sur la vertical de l'ancien pôle. Cette construction, indépendamment de l'avantage qu'elle présente de donner comme ligne de fermeture du funiculaire la ligne d'appui, permet de conserver la *distance polaire* (1) qu'on s'est fixée, ce qui a son importance, ainsi que nous le verrons plus loin (v. n° 34 et n° 27).

31. **Décomposition d'une force en trois autres.** — Nous aurons quelquefois à déterminer trois forces faisant équilibre à une force unique ; ce problème se présentera notamment dans l'étude des fermes du système Polonceau.

Prenons, par exemple, une ferme de ce système à trois bielles disposées comme l'indique la fig. 17.

Lorsqu'on cherchera les tensions (*compressions* ou *tractions*) dans les barres de cette ferme, on verra que pour certains

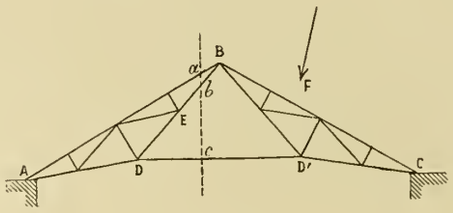


Fig. 17

nœuds (2) il y a indétermination. Pour la lever on peut employer la méthode suivante recommandée par **M. Culmann**:

On fait une section de la ferme par une surface qui ne rencontre pas plus de trois barres (*ce nombre trois est indispensable*), on prend la résultante de toutes les forces situées d'un côté de la section, et on équilibre cette résultante par trois forces ayant pour lignes d'action les trois barres coupées par la surface. Il ne faut pas que les barres aboutissent à un même point.

Dans la fig. 17, la surface de section est un plan qui rencontre l'arbalétrier AB, le tendeur BE et le tirant DD' de la ferme aux points *a*, *b*, *c*.

32. **Application à une ferme Polonceau.** — Soit F (fig. 18) la force qu'il s'agit d'équilibrer par trois autres dont les lignes d'action sont A, B et C.

(*a*). Prolongeons la force F jusqu'à sa rencontre avec l'une des trois lignes données, A par exemple (graphiquement il y aura généralement au moins une des trois lignes qui rencontrera la force F dans les limites de l'épure) (3).

(1) La distance polaire est la distance à laquelle le pôle se trouve de la résultante du dynamique. Cette distance joue un rôle important en statique graphique, ainsi que nous le verrons par la suite.

(2) Les *nœuds* sont les points tels que D, E... où se rencontrent les barres.

(3) A l'occasion de la ferme Polonceau nous indiquerons la solution à adopter pour le cas où la force F, à décomposer, serait en dehors des limites de l'épure.

Soit I le point de rencontre. Joignons I au point de concours J des deux autres lignes.

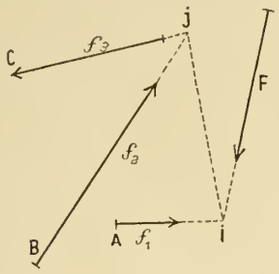


Fig. 18

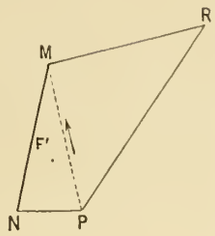


Fig. 18 *bis*

(*b*). Equilibrons la force F par deux autres dont les lignes d'action seraient IA et IJ ; le triangle dynamique MNP (fig. 18 *bis*) nous donne les grandeurs de ces forces : l'une suivant IA est égale à NP, l'autre égale à MP. Pour avoir le sens de ces forces, suivons le contour dynamique dans le sens amorcé par la force F' ; nous verrons que la force f_1 a le sens NP et que l'autre a le sens PM.

(*c*). A son tour décomposons la force PM en deux autres suivant les directions B et C ; le triangle dynamique MPR nous donne en grandeur $f_2 = \mathrm{PR}$ et $f_3 = \mathrm{RM}$.

Quant au sens de ses forces, puisqu'elles doivent avoir PM pour *résultante* (et non pas pour équilibrante), elles sont dirigées dans le sens PRM, *contraire* au sens amorcé par PM.

CHAPITRE III

COUPLES RÉSULTANT DU TRANSPORT DES FORCES

§ 1. — Théorème fondamental des moments de transport

33. **Position de la question.** — Nous avons rappelé (voir n° 14) que les forces appliquées à un solide peuvent toutes être transportées en un point quelconque invariablement lié à ce solide, à la condition de faire intervenir les couples résultant du transport de ces forces ; le moment de chacun de ces couples ayant pour mesure le produit de la force par sa distance au point de transport choisi.

Nous avons dit aussi (v. n° 23) comment se fait la composition des forces concourantes qui donnent lieu à la résultante de translation ; il nous reste à indiquer les procédés graphiques qui permettent de trouver les moments de transport, et par conséquent le moment du couple résultant.

34. 1er Cas. **Moment de transport de forces quelconques.**

Théorème. — *Si par un point donné* (G) *on mène une parallèle* (HK) *à la résultante* (mn) *d'un système de forces, le moment du couple, dû au transport de toutes les forces en ce point, est égal au produit du segment* (HK) *de cette parallèle compris entre le côté initial et le côté final du funiculaire par la distance* (d) *du pôle à la résultante, dans le dynamique.*

Soient f_1, f_2, f_3, f_4 (fig. 19) les forces du système considéré,

f_1' f_2' f_3' f_4' (fig. 19 *bis*) le dynamique de ces forces construit avec le point O comme pôle ;

Soit ABCDE le funiculaire correspondant; AE est son côté initial, DE son côté final.

On a vu que la résultante EF passe par le point de rencontre E du côté final et du côté initial, et qu'elle est parallèle et égale à la résultante *mn* du dynamique.

Soit enfin G *le point de transport* donné.

Nous voulons mesurer le couple qui résulte du transport de toutes les forces en G.

Menons par G une parallèle HK à la résultante EF. Je dis que le moment du couple résultant du transport, au point G, des quatre forces du sytème a pour mesure HK $\times$ d ; HK étant mesuré sur le funiculaire et d étant mesuré sur le dynamique.

En effet ce moment est le même que celui que l'on obtiendrait en transportant au point G la résultante des forces f_1, f_2, f_3, f_4. Ce moment est donc F $\times$ L, L étant la perpendiculaire abaissée de E sur la droite HK.

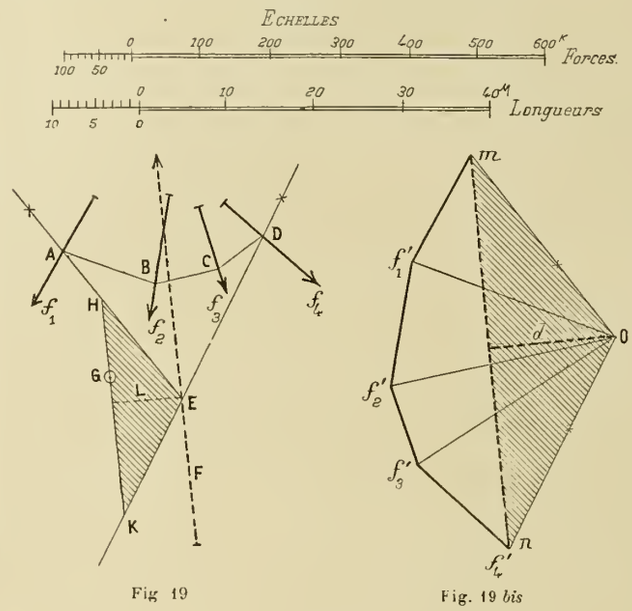


Fig 19 Fig. 19 *bis*

Mais les triangles HEK (fig. 19) et *mn*O (fig. 19 *bis*) sont semblables comme ayant leurs angles égaux ; on en tire :

$$\frac{\overline{HK}}{L} = \frac{\overline{mn}}{d}$$

d'où $$\overline{mn} \times L = \overline{HK} \times d;$$

or *mn* c'est la résultante F, donc:

$$F \times L = \overline{HK} \times d, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

34 *bis*. **Echelles.** Le segment HK doit être mesuré à l'échelle des forces et la distance polaire, d, à l'échelle des longueurs.

Ex. : Sur les fig. 19 et 19 *bis* on a :

$$\overline{HK} = 310^k, \quad \text{et} \quad d = 14^m,50.$$

Le moment $\overline{HK} \times d$ est donc :

$$M = 310 \times 14.50 = 4495 \text{ kilogramomètres.}$$

35. 2e Cas. **Forces parallèles. — Moments fléchissants.** — Le théorème précédent s'applique aussi aux forces parallèles. Nous ne le démontrerons pas à nouveau. Mais souvent, dans la pratique, on cherche, non pas le moment de toutes les forces transportées en un point K (fig. 20), mais seulement le moment des forces situées d'un seul côté de la section qu'on suppose passer par ce point, en y comprenant, bien entendu, les forces d'action f_1, f_2, f_3, et les réactions telles que X.

Ainsi, par exemple, dans l'étude des poutres droites reposant sur deux appuis de niveau, après avoir trouvé la résultante F de toutes les forces d'action ainsi que les réactions X et Y, développées par les appuis (v. n° 29), nous considérerons une section transversale de la poutre, située en K par exemple (fig. 20), entre f_3 et f_4, et nous chercherons quelle est en ce point la valeur du moment du couple résultant du transport en K des forces X, f_1, f_2 et f_3 qui sont

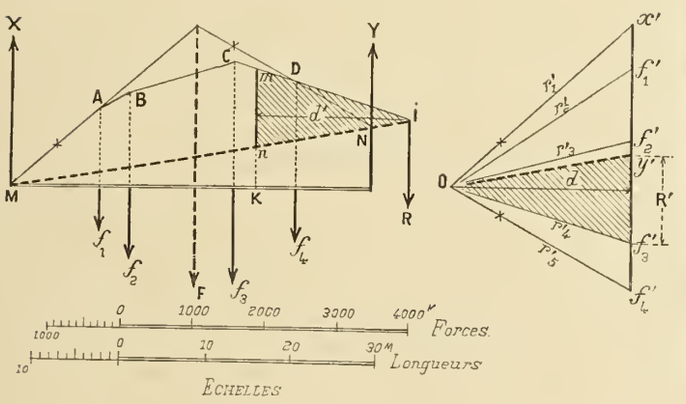


Fig. 20 Fig. 20 *bis*

situées à gauche. Le moment du couple ainsi obtenu est désigné sous le nom de *moment fléchissant*.

Si nous voulions connaître l'effet des forces situées à droite de K, nous obtiendrions un moment fléchissant de même valeur, mais de signe contraire.

37. **Théorème des moments fléchissants (pour pièce chargée verticalement).** — *Dans toute pièce,* soumise à des efforts verticaux et reposant sur deux appuis libres, *le moment fléchissant en un point quelconque est le produit de l'ordonnée* (1) *du polygone funiculaire en ce point par la distance polaire du dynamique qui répond à ce funiculaire.*

En effet, considérons les forces X, f_1, f_2 et f_3 situées *à gauche* de la section K ; leur résultante R′ est indiquée sur le dynamique (fig. 20 bis) pour la force $y'f_3'$, et cette résultante est verticale ; le côté initial qui lui correspond dans le funiculaire est MN, tandis que le côté final est CD. Par conséquent, d'après le théorème précédent (voir n° 34), le moment fléchissant dû aux forces X, f_1, f_2 et f_3 est $\overline{mn} \times d$. C. Q. F. D.

38. **Autre démonstration.** — On peut démontrer directement ce théorème de la manière suivante :

La résultante partielle des forces X, f_1, f_2 et f_3 est mesurée par $y'f_3'$ (fig. 20 *bis*). A cette résultante correspondent dans le dynamique les rayons polaires oy' et r'_4 ; le premier est le rayon initial, relativement au système de ces quatre forces ; l'autre en est le rayon final. Dans le funiculaire les côtés parallèles à ces rayons sont mI et MI ; la résultante passe donc par le point I ; elle serait IR égale à R′ du dynamique.

En considérant les triangles mnI, dans le funiculaire, et $Oy'f_3'$, dans le dynamique, nous remarquons que ces triangles sont semblables comme ayant leurs angles égaux, on a donc :

$$\frac{\overline{mn}}{d'} = \frac{\overline{y'f_3'}}{d}$$

d'où $$\overline{mn} \times d = \overline{y'f_3'} \times d';$$

mais $\overline{y'f_3'} \times d'$, c'est le moment de la résultante partielle R par rapport au point K, il en est donc de même de $\overline{mn} \times d$. C. Q. F. D.

Si nous avions pris la distance polaire égale à l'unité, le moment fléchissant aurait été mesuré par l'ordonnée du point K sur le funiculaire. Dans ce cas, on dit que le funiculaire est unifié.

Echelles : Sur les figures 20 et 20 *bis* on mesure mn à l'échelle des forces et l'on trouve (fig. 20) $mn = 1050^k$.

On mesure d à l'échelle des longueurs et l'on trouve (fig. 20 *bis*) $d = 21^m$. On a donc pour le moment $M = 1050 \times 21 = 22050$ K^m.

(1) Il est bien convenu que par **ordonnée** du funiculaire nous entendons la portion de verticale mn comprise entre le funiculaire MABCDN et sa **ligne de fermeture** MN.

§ 2. — Efforts tranchants

39. **Définition de l'effort tranchant.** — Les moments que nous venons d'étudier se nomment *moments fléchissants* pour la raison suivante.

Si l'on imagine (fig. 20 *ter*) la poutre coupée à la section K, et le tronçon de droite B, conservé fixe, on peut enlever le tronçon de gauche A, à la condition de le remplacer par toutes les forces qui y sont appliquées X, f_1, f_2 ....

Ces forces transportées en g, au centre de gravité de la section infiniment voisine, donnent naissance au couple $Mg'M$

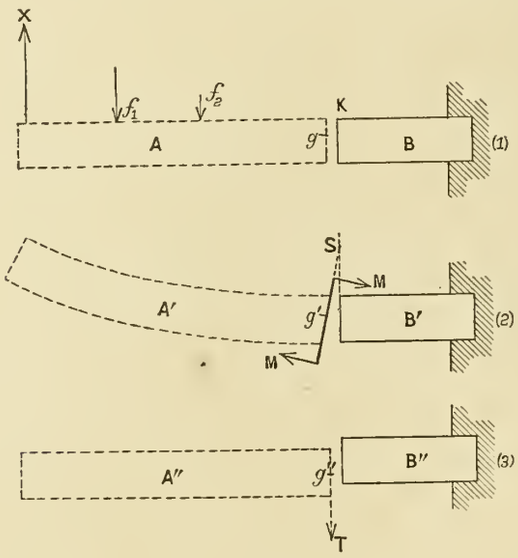


Fig. 20 *ter*

que nous venons d'étudier (fig. 21), lequel tend à faire tourner le tronçon de gauche comme il est indiqué en A'. Ce mouvement se nomme une *flexion*. Le couple fait donc *fléchir* la pièce ; c'est pourquoi on le nomme moment *fléchissant*. Mais (fig. 3) les forces transportées en g'', donnent une résultante unique, $g''T$ égale à leur somme algébrique, laquelle tend à séparer le tronçon A'' du tronçon B'' par glissement latéral, comme fait une *cisaille* quand elle coupe ou *tranche* une lame de fer. C'est pourquoi cette résultante des forces se nomme un *effort tranchant* (1).

40. **Recherche des efforts tranchants.** — Il est fort utile de connaître, en chaque point, la valeur de cet effort ; nous l'obtiendrons sur le dynamique ainsi que nous allons le faire voir.

Considérons une poutre chargée de poids (fig. 21 et 21 *bis*).

(1) Ces notions seront approfondies comme il conviendra dans la 2e partie. Il importait ici d'en donner une première idée.

Construisons le dynamique et le funiculaire des forces d'action et de réaction. Nous pourrons par un choix convenable du pôle, ainsi que nous l'avons vu plus haut (v. n° 30), obtenir un funiculaire passant par les points M et N.

Supposons pour simplifier que la distance polaire soit prise égale à l'unité ($d = 1$) ; alors les ordonnées donneront, en les mesurant à l'échelle des forces, les valeurs des moments fléchissants.

Nous nommerons *funiculaire unifié*, un funiculaire obtenu par un dynamique dont la distance polaire d serait égale à l'unité.

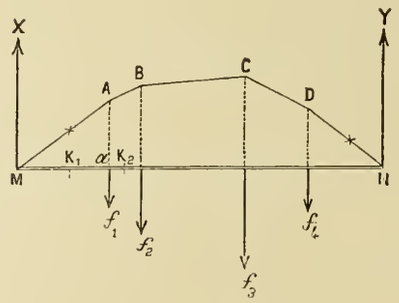


Fig. 21

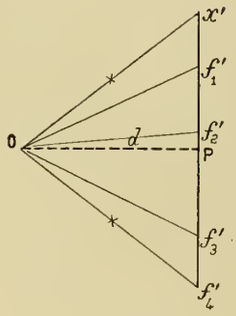


Fig. 21 *bis*

Ceci posé, considérons une section transversale K, voisine de l'appui M ; la seule force à gauche de cette section étant la réaction X, l'effort tranchant T_1 y sera précisément égal à X et sera mesuré sur le dynamique par la longueur Px'.

Si nous considérons une autre section K_2, comprise entre f_1 et f_2, les forces qu'elle aura à sa gauche seront X et f_1, de sorte que l'effort tranchant T_2 y sera la résultante de ces forces. Le dynamique nous en donne la grandeur en Pf_1'.

En résumé, en prenant sur le dynamique, *pour origine*, le point P, intersection de la parallèle à la ligne de fermeture MN avec les directions des forces, les distances de ce point aux extrémités des forces donnent en grandeur et en direction les efforts tranchants. Si la ligne OP est horizontale et si en même temps la distance polaire OP a été prise égale à l'unité, les efforts tranchants pourront être considérés comme les *pentes* des rayons polaires aboutissant aux extrémités des forces, ou encore, ce qui revient au même, aux côtés correspondants du funiculaire.

On sait en effet que la pente d'une droite est la hauteur dont elle s'élève pour une distance horizontale égale à l'unité.

Puisque, ici, $\overline{OP} = d = 1$ (fig. 21 *bis*) et que les efforts

tranchants sont donnés par les longueurs Px', $Pf_1' - Pf_2'$.., etc..., ces longueurs sont donc bien les pentes des rayons polaires $Ox' - Of_1' - Of_2'$... et aussi celles des côtés MA, AB, BC,... du funiculaire, puisque ces côtés sont parallèles aux rayons polaires.

Cette pente est positive si la ligne s'élève à droite (ex. : MA, AB, BC) et négative si elle s'élève à gauche (ex. : CD, DN).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant très important :

40 *bis*. **Théorème de l'effort tranchant.** — *L'effort tranchant est donné en chaque point par la pente des côtés du funiculaire unifié* (1).

Nota. — Si le funiculaire n'est pas unifié et si la distance polaire est d, au lieu d'être égale à l'unité, les pentes des rayons sont d fois plus petites que celles du funiculaire unifié ; par conséquent, pour avoir l'effort tranchant dans ce cas, il faudra multiplier par la distance polaire d la pente des côtés. Ceci suppose que la ligne de fermeture MN est horizontale.

(1) Quand on traite ces questions par l'analyse mathématique, ce théorème s'énonce ainsi : L'effort tranchant est la dérivée, par rapport à l'abscisse, du moment fléchissant.

41. **Résumé sur les funiculaires.** — Ce qui précède montre tout le parti que nous pourrons tirer des funiculaires ; ils nous permettront de composer ou d'équilibrer des forces en nombre quelconque ; de trouver les réactions d'appuis ou les tensions intérieures des barres ; de déterminer les moments des couples dus au transport des forces en un point déterminé ; et, comme application, de déterminer les moments fléchissants d'organes soumis à des forces verticales.

Nous verrons bientôt qu'ils peuvent également être utilisés pour déterminer les centres de gravité, les moments d'inertie et les courbes élastiques (1).

En somme, les funiculaires permettent d'exécuter graphiquement des intégrations souvent compliquées ; c'est à leur emploi que nous devrons de pouvoir traiter élémentairement les questions du cours, sans faire usage du calcul différentiel ni du calcul intégral.

(1) On nomme ainsi les courbes affectées par les fibres neutres des organes (poutres, arcs,...) une fois qu'ils sont soumis aux forces qui les déforment.

§ 3. — Funiculaires d'après la méthode de M. Collignon

42. **Funiculaire obtenu sans dynamique.** — Lorsque les forces considérées sont verticales, l'emploi de la méthode suivante, proposée par **M. E. Collignon**, Inspecteur général des ponts et chaussées, permet d'éviter la construction du dynamique et de tracer le funiculaire en cherchant les points où ses côtés prolongés viendraient couper les verticales des appuis, ou, en d'autres termes, en déterminant, pour chacun des côtés de ce funiculaire, les *ordonnées d'origine* et les *ordonnées d'extrémité*.

Nous allons expliquer le tracé des funiculaires de M. Collignon (fig. 22).

A cet effet construisons, mais simplement pour la démonstration, un dynamique ayant pour pôle un point choisi de telle sorte qu'il donne, pour ligne de fermeture du funiculaire, la droite des appuis MN ; soit d la distance polaire OP.

Prenons un côté quelconque du funiculaire, le deuxième AB, par exemple, et soit m_2 le point où il coupe la verticale d'origine.

Prenons le côté BC, qui vient ensuite, c'est-à-dire le troisième et soit m_3 le point où il coupe aussi la verticale d'origine ; proposons-nous de calculer la distance $\overline{m_2m_3}$.

Soit x_2 l'abscisse du point B. Le triangle m_2Bm_3 du funiculaire est semblable au triangle polaire $f_1'Of_2'$ du dynamique, et l'on déduit de la similitude l'équation :

$$\frac{\overline{m_2m_3}}{\overline{f_1'f_2'}} = \frac{x_2}{d}$$

ou, comme $\overline{f_1'f_2'}$ c'est la force f_2,

$$(1) \qquad \overline{m_2m_3} = \frac{x_2 \times f_2}{d}.$$

De cette relation M. Collignon déduit la construction suivante :

(*a*). A droite de l'origine, prenons sur la poutre un point I,

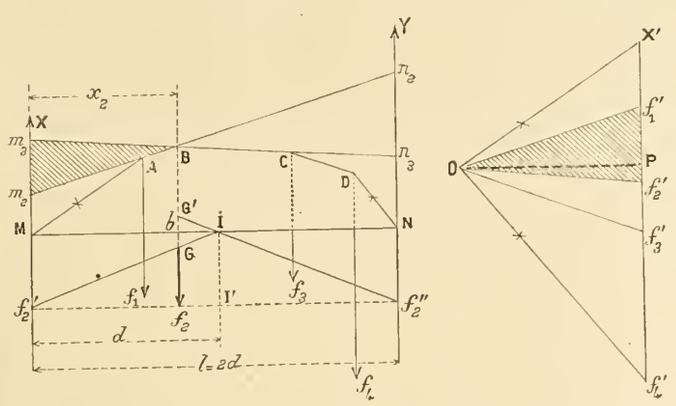


Fig. 22

situé à la distance polaire d de l'origine (M. Collignon

recommande de prendre I au milieu de la portée, c'est-à-dire de prendre $d = \frac{1}{2}l$, l étant la portée de la poutre).

(b). Sur la verticale d'origine projetons la force f_2 en f_2' et joignons le point I à l'extrémité de f_2'; cette droite intercepte sur la force f_2 deux segments, l'un bG contigu à la poutre MN et l'autre Gf_2 non contigu tracé d'un trait plus gros. Je dis que ce dernier est précisément égal à $\overline{m_2m_3}$.

En effet on a :

$$\frac{\overline{Gf_2}}{\overline{II'}} = \frac{x_2}{d}$$

et comme $\overline{II'} = f_2$

$$\overline{Gf_2} = \frac{x_2 \times f_2}{d}$$

ce qui est précisément la formule (1), donc $Gf_2 = \overline{m_2m_3}$.
C. Q. F. D.

43. **Segment d'extrémité en supposant le point I au milieu de la portée.** — Si l'on voulait le segment d'extrémité on opérerait de même : après avoir projeté f_2 sur la verticale *d'extrémité*, en f_2'' on joindrait l'extrémité de f_2'' au point I; cette droite *prolongée* intercepte sur la force f_2 une longueur f_2G' égale au deuxième segment cherché (on aura $\overline{n_2n_3} = \overline{f_2G'}$); de plus la somme des deux segments $\overline{f_2'G} + \overline{f_2G} = 2f_2$.

Cette méthode permet donc de trouver tous les segments successifs, à l'origine et à l'extrémité ; et en joignant deux à deux les points qui se correspondent, on obtient très exactement le polygone des moments.

Nota. — Si le point I n'était pas au milieu de la portée, après avoir déterminé les segments d'origine, on prendrait à gauche de l'extrémité N un point I″ (non marqué sur la fig. 22) tel que NI″ soit égal à la distance polaire, et on recommencerait avec ce point la détermination des segments d'extrémité.

En choisissant I au milieu, ce qui revient à prendre une distance polaire $\overline{d}$ égale à $\frac{1}{2}l$, on a comme premier avantage que le point I sert aussi bien pour les segments d'origine que pour les segments d'extrémité.

Nous ferons un très grand usage des funiculaires Collignon ; c'est pourquoi le lecteur devra s'exercer à en faire des applications analogues à celle que nous allons traiter ci-dessous.

44. **Application du funiculaire Collignon.** — Dans la fig. 23, nous avons appliqué la méthode de M. Collignon au tracé du funiculaire des moments fléchissants, pour une poutre chargée verticalement.

On remarque que pour le premier et le deuxième côtés, les segments d'origine sont très petits et que ceux d'extrémité sont très grands et sortent des limites de l'épure, tandis que pour le côté moyen m_3n_3 les ordonnées extrêmes sont à peu près égales. C'est pourquoi on devra commencer par le tracé du côté moyen.

Voici la marche de l'épure :

1° Prendre I au milieu de la portée MN.

2° Projeter les forces de gauche, f_1' et f_2 en f_1' et f_2'

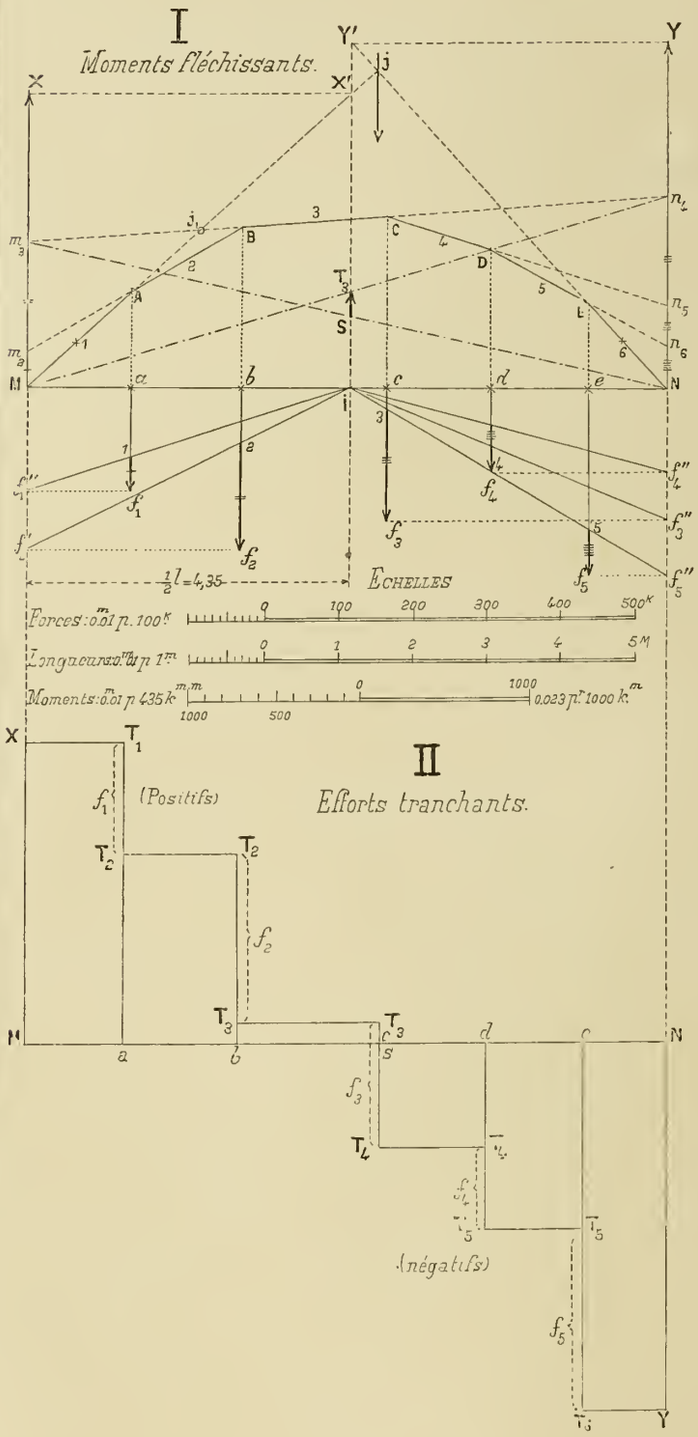


Fig. 23

sur la verticale d'origine ; joindre If_1' et If_2' et marquer d'un trait plus gros les segments extérieurs $f_1$1 et $f_2$2.

3° Porter le *premier* segment de M en m_2, et à la suite le deuxième segment de m_2 en m_3.

C'est fini pour la moitié de gauche. On passe alors à celle de droite.

4° Projeter les forces de droite f_5, f_4 et f_3 en f_5', f_4' et f_3' sur la verticale d'extrémité, en commençant par la plus rapprochée de cette extrémité ; joindre $1f_5' - 1f_4'$ et $1f_3'$ et marquer d'un trait plus gros les segments extérieurs $5f_5 - 4f_4$ et $3f_3$.

5° Porter le *dernier* segment, c'est-à-dire le cinquième, de N en n_6 ; à la suite le quatrième segment de n_6 en n_5 et à la suite encore, le troisième segment de n_5 en n_4.

C'est fini pour la moitié de droite. Le funiculaire se trace alors comme suit :

6° On joint m_3n_4, c'est le *côté moyen* du funiculaire ; il rencontre en B la deuxième force ; on joint B au point m_2, ce qui donne le deuxième côté du funiculaire. Cette droite rencontre en A la première force ; on joint AM, ce qui donne le premier côté.

7° Passant à la moitié de droite, on opère de même : c'est ainsi que l'on joint Cn_5 puis Dn_6, et finalement EN.

Le funiculaire est alors le polygone MABCDEN.

45. **Réactions.** — Le côté initial MA et le côté final NE, prolongés jusqu'à la verticale du point I, donnent en IX' et IY' les réactions des appuis. Cela est évident si l'on imagine par la pensée le dynamique dont nous nous sommes passé et qui aurait servi à la construction du funiculaire MABC....

On pourrait cependant le démontrer comme suit :

La réaction d'un appui n'est autre chose que l'effort tranchant au-dessus de cet appui.

Mais nous savons que l'effort tranchant en un point est égal à la pente du funiculaire s'il est *unifié* ; s'il ne l'est pas il faut multiplier sa pente par la distance polaire. Or, au-dessus de l'appui M, la pente p du côté MA du funiculaire est

$$p = \frac{\overline{IX'}}{\overline{MI}}.$$

Il faut multiplier cette pente par la distance polaire, qui est ici MI, pour avoir l'effort tranchant, ce qui fera disparaître le dénominateur MI. Donc cet effort tranchant, c'est-à-dire la réaction X, est égal à IX', C. Q. F. D.

46. **Résultante.** La résultante totale des 5 forces passe en J par le point de rencontre des directions du côté initial MA et du côté final NE du funiculaire,

On obtiendrait aussi facilement les résultantes partielles. Ainsi la résultante partielle des forces f_1 et f_2 passerait par le point J_1.

47. **Efforts tranchants : (*a*) effort tranchant moyen.** — Si nous menons les deux diagonales m_3N et n_4M du trapèze qui a donné le côté moyen BC du funiculaire, je dis que le segment T_3S intercepté par ces diagonales sur la verticale du point I donne, à *l'échelle des forces*, l'effort tranchant dans le troisième segment *bc*.

En effet, nous avons vu (v. n° 40) que, si MABCN était un funiculaire *unifié*, la pente du côté BC donnerait, en grandeur et en signe, l'effort tranchant ; et si le funiculaire a, comme ici, une distance polaire d, il faudra multiplier cette pente par d (1).

Or la pente p de BC, pente qui est la même que celle de la ligne totale m_3n_4 est

$$p = \frac{Nn_4 - Mm_3}{2d}$$

et si nous multiplions par d nous aurons l'effort tranchant t_3.

$$t_3 = \frac{Nn_4 - Mm_3}{2}.$$

Mais, dans un trapèze, le segment ST_3 intercepté par les diagonales est précisément égal à la demi-différence des côtés parallèles, nous aurons donc :

$$ST_3 = \frac{Nn_4 - Mm_3}{2},$$

formule identique à la précédente. C. Q. F. D.

(*b*). **Signe.** — L'effort tranchant sera positif ou négatif suivant qu'il sera dirigé de bas en haut ou de haut en bas.

Dans le premier cas le point de croisement des deux diagonales est à gauche de ST_3, dans le second il est à droite.

Il sera rare, d'ailleurs, que l'on ait à hésiter sur le signe de l'effort tranchant, puisque ce signe est le même que celui de la pente du funiculaire.

Sur notre exemple, les trois côtés MA, AB et BC du funiculaire ont des pentes positives, par conséquent, les efforts tranchants sur les segments correspondants de la poutre auront aussi le signe plus.

(*c*). **Représentative des efforts tranchants.** — Ayant l'effort tranchant en un point du segment *bc*, pour avoir tous les autres efforts *à gauche* de celui-là, il faudra, en passant d'un segment au précédent, augmenter l'effort tranchant et lui ajouter la force située entre les segments considérés. La représentative des efforts tranchants sera donc surélevée d'abord de la force f_2 puis de la force f_1 (fig. II).

Pour les efforts *de droite*, on l'abaissera au contraire successivement des forces f_3, f_4 et f_5 en passant d'un segment au suivant. La représentative des efforts tranchants (fig. 23 — II) est donc facile à tracer, comme suit : On a porté, au milieu, $cT_3 = ST_3$ de la fig. I, dans le sens positif ; et l'on a ensuite, à gauche, surélevé la ligne T_3T_3 de la hauteur f_2 et ensuite de la hauteur f_1 ; à droite, on l'a abaissée de f_3, puis de f_4 et enfin de f_5.

(1) Nous répétons ici le raisonnement du paragraphe précédent.

Nous rappellerons que dans le cas qui nous occupe, celui d'une poutre droite soumise uniquement à des charges *discontinues*, l'effort tranchant est constant dans l'étendue d'un même segment puisque, dans cette limite, la pente du côté du funiculaire ne varie pas ; c'est pourquoi la représentative des efforts tranchants se compose d'une série de droites horizontales.

(*d*). **Vérification.** — Comme vérification de la construction que nous venons d'indiquer, nous devrons retrouver, en M et en N, précisément les réactions X et Y.

(*e*). **Remarque générale.** — La méthode de M. Collignon a donc, comme premier avantage de supprimer la construction du dynamique et d'éviter des tracés de parallèles qui sont difficiles à mener sur des épures un peu grandes ; comme second avantage là ligne de fermetnre qu'elle donne est obtenue, de suite, horizontale.

48. **Echelles.** — Sur la fig. 23 la poutre avait $4^m,35$ de demi-portée : l'échelle des longueurs étant $0^m,01$ pour mètre $\left(\frac{1}{100}\right)$, celle des forces étant de 0,01 pour 100 k., il y a lieu maintenant de déterminer l'échelle des moments. Or nous avons vu (v. n° 34) que les ordonnées du polygone funiculaire doivent être multipliées par la distance polaire d pour représenter les moments.

Par conséquent, si le funiculaire était unifié, une ordonnée de $0^m,01$ à l'échelle des forces, représenterait 100 k., et comme moment elle représenterait 100 Km. ; mais puisque la distance polaire est $d = 4,35$ le nombre représenté par $0^m,01$ à l'échelle des moments sera 435 Km. On voit donc par là que 1000 Km. seront représentés par

$$\frac{0^m,01 \times 1000}{435} = 0^m,023,$$

ce qui a permis de construire l'échelle des moments.

En résumé les moments sont représentés à l'échelle de $0^m,023$ pour 1000 Km. (kilogramomètres).

Les efforts tranchants (fig. 11) sont à l'échelle des forces.

49. **Forces discontinues également réparties.** — Ce cas se présente assez souvent dans la pratique. Par exemple supposons une poutre, de $8^m,00$ de portée, supportant des véhicules dont les essieux, espacés de mètre en mètre, sont chargés d'un poids de 120 k. Supposons, en outre, que ces essieux soient symétriquement placés par rapport au milieu de la portée. Dans ce cas la poutre sera chargée de 8 forces égales et également réparties ; la construction de M. Collignon se simplifie beaucoup ; on l'exécutera comme suit (fig. 24) :

Projetons, *une fois pour toutes*, la force f_1 sur la verticale MX ; soit Mf'_1 cette projection ; ce sera aussi celle de toutes les autres forces f_2, f_3, f_4..... ; joignons If'_1 ; les longueurs interceptées sur les forces par cette droite, longueurs marquées d'un gros trait, croissent en progression arithmétique et leur somme est évidemment égale à la moitié (1/2) du total des poids de gauche ; de plus les segments sur la verticale MX sont égaux à ceux de la verticale NY ; le

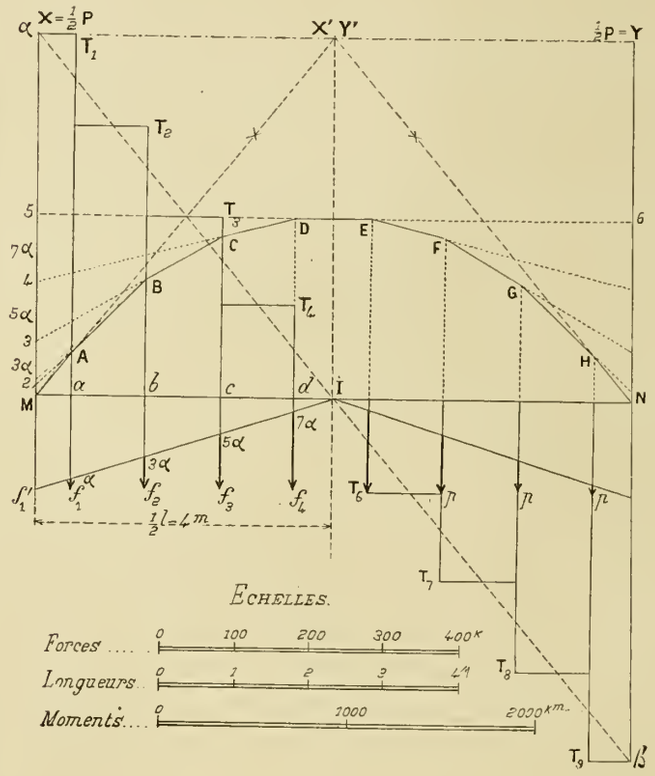


Fig. 24

côté moyen du funiculaire est donc horizontal et se trouve à une hauteur égale au quart (1/4) de la charge totale ; les autres côtés ont pour enveloppe une parabole (v. Ct) ; le côté initial et le côté final se rencontrent sur la verticale à une hauteur IX' égale à la moitié, 1/2 P, de la charge totale, enfin les réactions MX et NV des appuis sont égales à 1/2 P.

50. **Efforts tranchants.** — Les efforts tranchants décroissent à chaque segment de quantités égales ; les milieux de toutes les horizontales qui les représentent se trouvent donc sur une même droite $\alpha\beta$ qui a pour ordonnée d'origine $+\frac{P}{2}$ et pour ordonnée d'extrémité $-\frac{P}{2}$.

51. **Charge uniformément répartie.** — Si la charge totale P, au lieu d'être répartie en 8 points, l'était en 16,

puis en 32, etc..., les constructions seraient les mêmes. Mais en doublant ainsi le nombre des côtés, ceux-ci seraient chaque fois plus petits ; à la limite, si la charge est continue comme le serait une charge de sable uniformément répartie, (soit p la charge par mètre linéaire, on aura pour la charge totale $P = pl$), le funiculaire deviendra une courbe et cette courbe sera une parabole (v. Ct) ; son sommet A' sera sur la verticale centrale à une hauteur égale au quart, (1/4), de la charge totale ; on aura $IA = \frac{P}{4} = \frac{pl}{4}$.

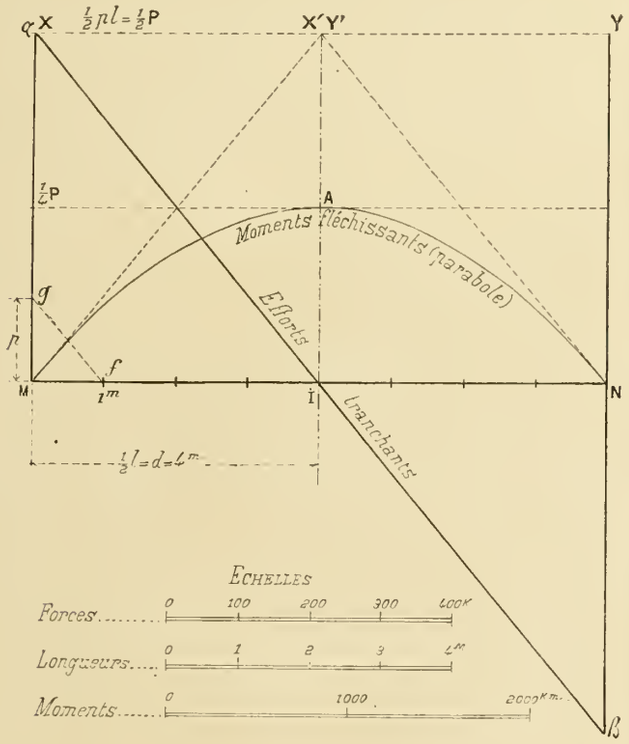


Fig. 25

Les directions des côtés du funiculaire deviendront les tangentes de la courbe ; de sorte que, à l'origine et à l'extrémité les tangentes à la courbe funiculaire passeront par le point de la verticale centrale située à une hauteur $\frac{pl}{2}$, cette parabole est donc complètement déterminée.

Quant aux efforts tranchants, ils seront représentés par la droite αβ dont l'ordonnée d'origine est $+\frac{pl}{2}$ et l'ordonnée d'extrémité $-\frac{pl}{2}$.

Cette parabole représentative des moments fléchissants dus à une charge totale P, uniformément répartie, se présentera très souvent dans la suite du cours. Il faut être parfaitement fixé sur son tracé ; c'est pourquoi nous allons le résumer (fig. 25) :

1° De I en A, on porte le *quart*, $\frac{P}{4}$, de la charge totale et on a, en A, le sommet de la parabole.

2° On double la longueur IA, ce qui revient à porter de I en X' la *moitié*, $\frac{P}{2}$, de la charge totale ; cela donne la grandeur des réactions sur les appuis.

3° On joint MX' et NX', et cela donne les tangentes à l'origine et à l'extrémité.

4° La représentative des efforts tranchants est la droite αIβ.

Sa pente est égale à $\frac{\overline{M\alpha}}{MI} = \frac{P}{l} = p$, c'est-à-dire précisément à la charge p par mètre linéaire.

Inversement il est important, connaissant une parabole obtenue dans les conditions indiquées ci-dessus, c'est-à-dire avec une distance polaire $d = \frac{l}{2}$, de déterminer la valeur totale P, ou la valeur par mètre p, de la charge uniformément répartie qui est appliquée à la poutre donnée. On y arrive ainsi :

1° On double, de A en X', la hauteur IA du sommet et l'on obtient ainsi les réactions $X = \frac{P}{2}$ et $Y = \frac{P}{2}$; chacune de ces réactions est égale à la moitié de la charge totale.

2° Prenant sur la portée, à partir de l'origine, un point f situé à une distance égale à l'unité et, par ce point, menant une parallèle à la droite αβ des efforts tranchants, le segment $\overline{Mg}$ intercepté par cette parallèlle sur la réaction X est, à l'échelle des forces, la valeur cherchée p.

CHAPITRE IV

PROBLÈMES SUR LES AIRES

§ 1. — Méthode graphique de quadrature des aires planes (1) limitées par des contours polygonaux

52. Introduction. — Dans la suite de ce cours nous aurons souvent à déterminer l'aire d'une surface et, comme il pourra être quelquefois commode de résoudre graphiquement ce problème, nous allons y consacrer le chapitre IV.

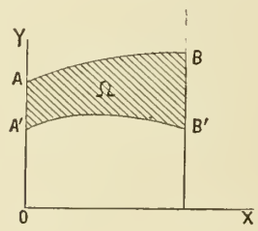


Fig. 26

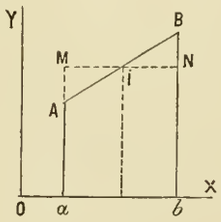


Fig. 27

En général, le problème se posera de la manière suivante :

Une surface (fig. 26) étant limitée par deux courbes AB et A'B' et par deux ordonnées de ces courbes, AA' et BB', trouver son aire Ω ; ou bien encore trouver les aires partielles suivant lesquelles on peut la diviser.

53. Aire de deux trapèzes contigus. — Considérons d'abord le cas le plus simple qui peut se présenter, celui d'un trapèze qui a pour bases parallèles les ordonnées A*a* et B*b* du côté AB dont la pente est quelconque (fig. 27)

Il est évident que si nous prenons le point I, milieu de AB, et si nous menons par ce point une parallèle à *ab* jusqu'à la rencontre des ordonnées A*a* et B*b*, le rectangle MN*ab* que nous formerons ainsi sera équivalent au trapèze AB*ab*.

Il en serait de même pour toute droite passant par I, quelle que soit son inclinaison ; donc, en résumé, tous les trapèzes qui sont limités, à gauche et à droite, par les ordonnées passant en *a* et *b*, en bas par la droite *ab* et en haut par une autre droite quelconque, passant en I, sont équivalents. C'est pourquoi nous nommerons ce point I *le point d'équivalence* du trapèze.

(1) Ces méthodes graphiques sont dues, elles aussi, à M. E. Collignon.

Si maintenant nous considérons deux trapèzes voisins tels que AB*ab* et B'*bc*C (fig. 28), dans chacun de ces trapèzes les points d'équivalence sont F et G. Si nous joi-

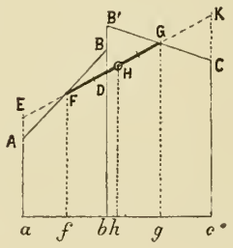


Fig. 28

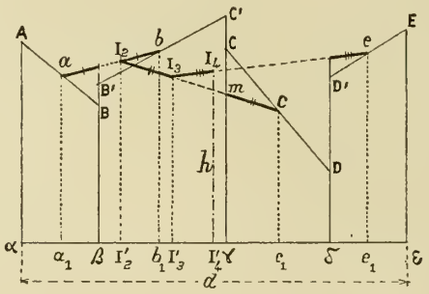


Fig. 29

gnons ces points par une droite se prolongeant jusqu'aux ordonnées extrêmes des points *a* et *c*, le nouveau trapèze ED*ba* sera équivalent au trapèze AB*ba*, de même DK*cb* a la même surface que B'C*cb* ; le grand trapèze EK*ca* est donc équivalent à la somme des deux premiers.

Quant à son point d'équivalence, il est placé en H au milieu de EK ; mais on peut le déterminer, d'une manière commode, en *retournant bout pour bout* la sécante FG, c'est-à-dire en portant sur FG à partir de F une longueur FH égale à DG, ou, ce qui revient au même, en portant à partir de G une longueur GH égale à FD.

En effet : soit H le point ainsi obtenu ; on a, en remarquant que GD est la moitié de DK :

$$EF + FH = \frac{ED}{2} + \frac{DK}{2} = \frac{EK}{2}.$$

54. Aire de trapèzes contigus, en nombre quelconque. — Si au lieu de deux trapèzes nous en avions un nombre quelconque, nous procéderions de même (fig. 29).

Après avoir obtenu les points d'équivalence *a*, *b*, *c*, *e* de chaque trapèze, nous déterminerions, ainsi que nous l'avons fait (v. n° 53) le point d'équivalence I_2 du trapèze de même surface que la somme des deux premiers, puis joignant I_2c

nous déterminerions comme précédemment le point d'équivalence I_3 du trapèze répondant à la somme des trois premiers ; le point I_3 est tel qu'on a $\overline{I_2I_3} = \overline{cm}$.

On obtiendrait enfin I_4 en joignant I_3e et en prenant $\overline{I_3I_4} = \overline{cn}$; de sorte que d étant la somme des bases de tous les trapèzes, la surface de l'ensemble de tous les trapèzes est égale au produit $d \times \overline{I_1I'_1}$.

55. **Trapèzes négatifs.** — Le même tracé s'applique aussi aux trapèzes négatifs, c'est-à-dire disposés de manière à devoir être retranchés; tels sont aABb, bBCc et eEFf (fig. 30).

En retournant bout pour bout les sécantes médianes successives on a les points d'équivalence successifs I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5. La fig. 29 montre la série des tracés à faire. Les seg-

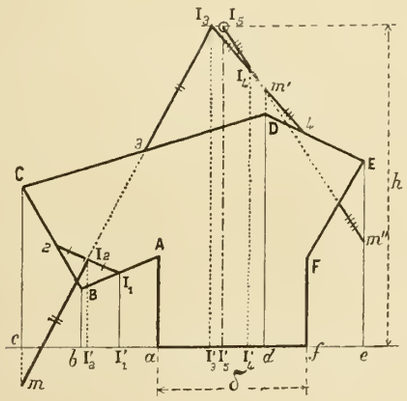


Fig. 30

ments qu'il faut faire égaux entre eux sont marqués de gros traits et affectés des mêmes signes distinctifs, soit 1 trait, soit 2 traits, soit 3 traits.....

Comme vérification les points successifs d'équivalence doivent être sur les verticales I'_1, I'_2, I'_3, I'_4, I'_5 passant par les milieux des segments résultants successifs ab, ac, ad, ae, af.

Cette méthode, ainsi que l'a pensé M. Collignon, peut être appliquée à l'évaluation des surfaces des profils de terrassements pour l'étude des projets de routes ou de chemins de fer (1).

56. **Cas où les trapèzes ont la même largeur.** — Lorsque les trapèzes ont la même largeur de base, le tracé se simplifie. Le retournement bout pour bout place toujours le point d'équivalence partiel sur une des ordonnées, soit médiane, soit ordinaire.

Dans ces conditions, le polygone $I_1I_2I_3I_4I_5$ (fig. 31), que

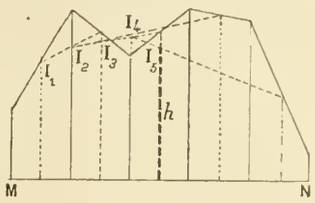


Fig. 31

nous nommerons *le polygone quadrateur*, est très facile à tracer ; voici comment on procède :

(a). On mène d'abord les ordonnées des sommets, puis celles des milieux.

(b). On joint le premier milieu I_1 au deuxième et l'on prend l'intersection I_2 avec la verticale qui suit celle de I_1.

(c). On joint I_2 au milieu du troisième côté et l'on prend l'intersection I_3 avec la verticale qui suit celle de I_2, et ainsi de suite.

57. **Méthode arithmétique.** — Si l'on voulait opérer arithmétiquement, on obtiendrait dans ce cas l'ordonnée du point final d'équivalence I_3 en faisant la somme des ordonnées des trapèzes et en divisant cette somme par leur nombre.

En effet, soit B la base totale MN (fig. 31) et n le nombre des petits trapèzes, la base de chacun d'eux est $\frac{B}{n}$. Soit S la somme des ordonnées moyennes, on aura

$$\Omega = \frac{B}{n}, \qquad S = Bh;$$

donc

$$h = \frac{S}{n}.$$

La méthode arithmétique est presque toujours la plus expéditive, il y a donc lieu de lui donner la préférence toutes les fois que la seule question à résoudre sera la recherche numérique de la surface. Si, en outre, il fallait trouver soit le centre de gravité, soit le moment d'inertie, la méthode graphique serait à employer.

(1) Mémoire de M. Collignon, *Annales des Ponts et Chaussées*, janvier 1887.

§ 2. — Quadrature des surfaces planes limitées par des lignes courbes

58. **Aire de la parabole.** — Avant d'entamer l'étude des surfaces limitées par des lignes courbes quelconques, il est nécessaire de considérer d'abord le cas où la ligne courbe est une parabole.

Soit ACdB (fig. 32) une parabole dont l'axe est vertical. Si nous considérons un segment compris entre la corde BC et la courbe, en menant parallèlement à cette corde une tangente à la parabole, nous obtiendrons entre ces parallèles et les ordonnées Bb et Cc un parallélogramme BbCc et le point de contact d se trouve sur l'*ordonnée milieu*, c'est-à-dire sur l'ordonnée qui est placée à égale distance des points extrêmes B et C.

On démontre par le calcul (v. Ct, 2e partie, ch. VII) que la surface du segment de parabole indiqué par les lettres BdCD est les 2/3 de la surface du parallélogramme BbCc.

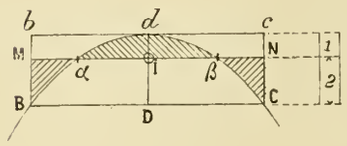


Fig. 32

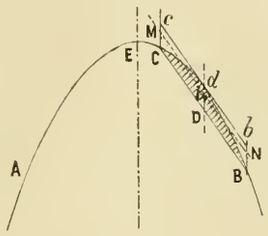


Fig. 33

De sorte que si, parallèlement à BC (fig. 32) nous menons une droite aux 2/3 de la distance Dd, nous formerons un nouveau parallélogramme BMNC de surface équivalente au segment proposé.

La droite MN sera la base d'équivalence du segment parabolique et le point I, situé aux deux tiers de la corde Dd, sera son *point d'équivalence*.

Il est à remarquer que cette base d'équivalence MN coupe la parabole de telle sorte que le segment parabolique $\alpha d \beta$, laissé au-dessus de la ligne d'équivalence, a la même surface que le total des portions BMα et CNβ du parallélogramme laissées au-dessous de cette ligne, extérieurement à la courbe.

Nota. Ce que nous venons de dire s'applique aussi à un segment parabolique oblique (fig. 33). Le point d'équivalence I est aux deux tiers de la flèche oblique Dd.

59. **Trapèze équivalent.** — Si nous avons (fig. 34) à évaluer la surface d'un trapèze mixtiligne terminé par un arc de parabole, nous pourrons le décomposer en un trapèze, ADBab, et en un segment de parabole, AdBA, (fig. 33).

Pour le trapèze, le point d'équivalence est en D sur l'ordonnée moyenne, et pour le segment de parabole, il est en d_1, aux 2/3 de Dd ; par conséquent, le point d'équivalence du trapèze mixtiligne total est le point d_1.

60. **Aire approchée d'un trapèze curvilique quelconque.** — Dans le cas où le trapèze est terminé par une courbe quelconque, on peut, avec une grande approximation, assimiler cette courbe à une parabole ; on opère alors comme nous venons de le faire et l'on peut appliquer la méthode de quadrature de M. Collignon, ainsi que nous allons le montrer.

61. **Quadrature d'une courbe quelconque.** — Soit ABab (fig. 35) l'aire à évaluer ; on procédera comme suit :

(a). Diviser la base en parties égales par les ordonnées m, n, p, et tracer les cordes AM, MN, NP, PB.

(b). Mener Cc, Dd, Ee, Ff par les milieux des segments de la base ab et prendre en 1, 2, 3, 4, sur ces ordonnées, les points situés aux 2/3 des flèches des points, C, D, E, F. Ce sont les points d'équivalence des trapèzes élémentaires.

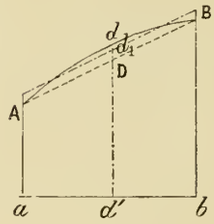


Fig. 34

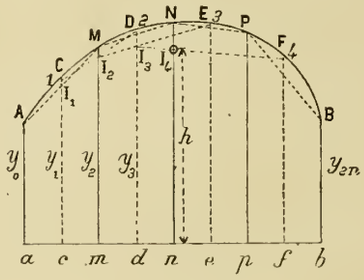


Fig. 35

Si par ces points on menait des parallèles aux cordes ou même des parallèles à la base, on aurait des trapèzes, ou des rectangles, dont la surface totale serait équivalente à l'aire limitée par la courbe proposée. On se trouve donc ramené à la détermination de l'aire d'une série de trapèzes ou de rectangles contigus, problème que nous avons résolu par la méthode de M. Collignon (v. n° 56). Sur la fig. 35 on voit en I_1 I_2 I_3 I_4 le *polygone quadrateur ;* I_4 est le point final d'équivalence ; et, si h est sa hauteur, l'aire de la courbe a pour expression : $\Omega = \overline{ab} \times h$.

§ 3. — Autres procédés de quadrature

62. **Formule de Simpson.** — Soit ABab (fig. 36) une surface dont il s'agit d'évaluer l'aire. Nous pouvons la diviser par des ordonnées telles que y_2, y_4 en un certain nombre de trapèzes mixtilignes ayant même base, puis mener par le milieu de chacune de ces bases les ordonnées moyennes y_1, y_3, y_5 qui rencontrent la courbe aux points C, E, G. Soit Δx l'intervalle entre deux ordonnées voisines. Si les trapèzes avaient tous leurs côtés rectilignes, les points ainsi obtenus C, E, G en seraient les points d'équivalence. Mais puisque le contour AB est courbe en prenant comme points d'équivalence C, E, G, on commet une erreur positive lorsque le contour AB est convexe, négative dans le cas contraire.

Dans le cas de la fig. 35, la courbe étant convexe, l'expression

(1) $\Omega = 2\Delta x(y_1 + y_3 + y_5)$

est donc approchée par excès.

Considérons maintenant la surface AB*ba* comme égale à la somme des trapèzes tels que AC*ca*. Si nous substituons à

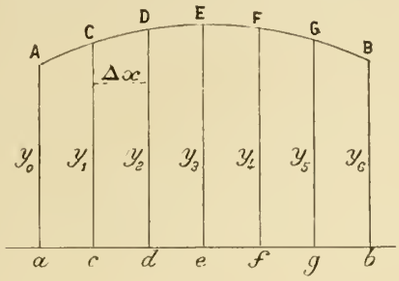


Fig. 36

la courbe AC sa corde, l'aire obtenue par le trapèze AC*ca* sera approchée par défaut, de sorte que l'expression

$$(2)\ \Omega = \Delta x\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \cdots\cdots + \frac{y_5 + y_6}{2}\right)$$

sera, pour son compte, approchée par défaut.

Chassons le dénominateur 2, elle devient

$$(3)\qquad 2\Omega = \Delta x[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \cdots + 2y_5 + y_6].$$

Mais si l'on fait la somme des expressions (1) et (3) les erreurs se compenseront en partie et l'on aura, après simplification :

$$\Omega = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6].$$

Telle est la formule de **Thomas Simpson**. On peut l'écrire plus simplement en lui donnant une forme symbolique.

Supposons qu'après avoir partagé par des ordonnées la surface à évaluer en un nombre *pair* de trapèzes mixtilignes ayant même base Δx, on désigne (fig. 35) par y_0 la première ordonnée, par y_{2n} la dernière, par S_1 la somme des ordonnées d'indice impair et par S_2 celle des ordonnées d'indice pair, *non compris la première et la dernière ;* la formule de Simpson est alors

$$\Omega = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4S_1 + 2S_2 + y_{2n}.$$

Nota. — Il serait facile de prouver que si l'on appliquait à la courbe ci-dessus la méthode de M. Collignon (nº 61) et si l'on en traduisait algébriquement le tracé on retrouverait la formule de Simpson. De sorte que, géométriquement parlant, cette formule revient à substituer des arcs de parabole aux arcs véritables de la courbe donnée.

63. **Planimètre d'Amsler.** — M. Amsler, ingénieur à Schaffouse, a imaginé un appareil destiné à mesurer les surfaces planes. Cet appareil connu sous le nom de *planimètre* est composé ainsi qu'il suit :

Deux règles CE et CF, disposées horizontalement, sont articulées en J ; l'extrémité E de l'une est munie d'une pointe sèche qu'on fixe en un point voisin de la surface à

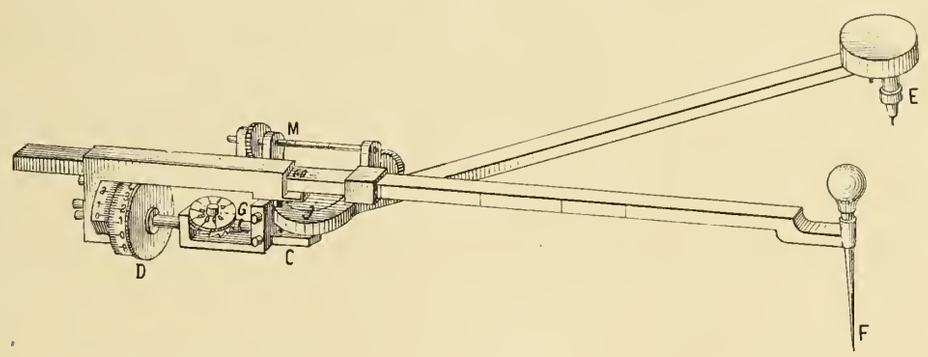


Fig. 37

mesurer et en dehors de celle-ci ; CE est la règle *pivotante* ; l'extrémité F de l'autre règle qui se nomme la règle *tracante* est munie d'un *traçoir* F, lequel est destiné à suivre le contour de la surface à évaluer ; enfin la règle tracante porte en D une roulette dont l'axe est dans la direction DF. Cette roulette est graduée, de sorte qu'à l'aide d'un compteur de tours et d'un vernier, on peut apprécier les chemins qu'elle a parcourus en tournant, à $\frac{1}{1000^e}$ de tour près.

Il suffit, pour déterminer avec cet instrument l'aire d'une surface limitée par un contour polygonal quelconque, de suivre ce contour avec le traçoir F de l'appareil et, lorsque l'on est revenu au point de départ, une simple lecture du chemin parcouru par la roulette fait connaître la grandeur de la surface donnée ; l'approximation de cet appareil est environ de $\frac{1}{1000^e}$ (1)

(1) Voici comment on peut expliquer les résultats obtenus avec le planimètre d'Amsler :

Soit $MCC_1\ldots$ (fig. 38) la surface qu'il s'agit d'évaluer. (V. page suivante).

Fixons d'abord en A la pointe sèche du pivot de l'instrument ; puis, avec le traçoir C, suivons dans le sens des aiguilles d'une montre le contour de la surface S ; pendant cette opération le point B décrit un arc de cercle autour du point A comme centre, de sorte que la surface balayée par la droite BC

pendant ce mouvement est limitée : 1° par l'arc de cercle dont A est le centre, 2° par les positions extrêmes de la droite BC vers la droite et vers la gauche, enfin, 3° par le contour de la surface à évaluer.

Mais si nous convenons d'affecter du signe + la surface balayée de droite à gauche et du signe — celle balayée de gauche à droite, nous voyons que lorsque le traçoir, parti, par exemple, du point M du contour y sera revenu,

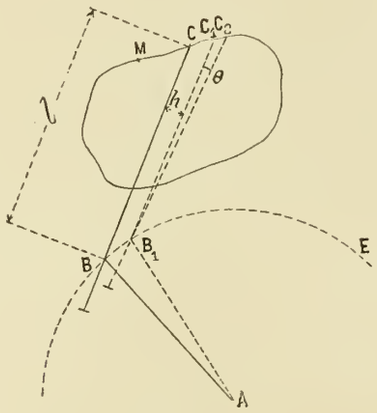


Fig 38

la surface *totale* (c'est-à-dire la somme des surfaces positives diminuée de celle des surfaces négatives), sur laquelle aura passé la droite BC sera précisément la surface à évaluer S puisque toute la partie comprise entre son contour inférieur et l'arc de cercle BE sera annulée comme ayant été affectée successivement des signes + et —.

Donc, en définitif la surface S est égale à la somme des surfaces balayées par la droite BC pendant que son extrémité C parcourt le contour proposé.

Voyons maintenant comment on peut l'évaluer. Considérons deux positions *extrêmement voisines* du traçoir, soient C et C_2 ces positions.

La surface engendrée par la droite BC pendant ce déplacement élémentaire est BB_1C_2C ; la somme des surfaces telles que celles-là, appliquée aux déplacements du traçoir sur le contour entier, donnera la valeur de S.

Nous pouvons décomposer BB_1C_2C en deux parties par une parallèle B_1C_1 à BC menée par B_1, nous aurons donc

$$BB_1C_2C = BB_1C_1C + B_1C_2C_1.$$

Soient l la longueur BC, h la distance des deux parallèles B_1C_1 et BC et θ l'angle $C_2B_1C_1$.

Nous pouvons remarquer que puisque C_1 et C_2 sont extrêmement voisins l'angle θ est toujours très voisin de la valeur zéro et la différence des longueurs C_2B_1 et C_1B_1 est absolument négligeable par rapport à l ; par conséquent la figure CBB_1C_1 pourra être considérée comme un parallélogramme ; on pourra aussi prendre pour hauteur du triangle $B_1C_2C_1$ la portion de l'arc C_2C_1. Nous pourrons donc écrire :

$$\text{surf. } (BB_1C_2C) = lh + \frac{l^2\theta}{2}.$$

Pour avoir la surface totale S nous ferons la somme de toutes les surfaces élémentaires, nous aurons donc :

$$S = \Sigma lh + \frac{l^2\Sigma\theta}{2} \text{ ; et comme } l \text{ est constant ; } S = l\Sigma h + \frac{l^2}{2}\Sigma\theta \text{ ;}$$

or, $\Sigma\theta = 0$, puisque les positions initiale et finale de BC sont les mêmes. Nous voyons donc que la surface S est égale à la somme des éléments tels que lh.

$$S = l\Sigma h.$$

Or dans le planimètre l est constant ; de plus la roulette dont est munie la règle BC ayant son axe dirigé parallèlement à celui de cette règle indique seulement les chemins parcourus par cette règle perpendiculairement à sa direction, c'est-à-dire les longueurs successives telles que h ; la somme des surfaces telles que lh sera donc égale au produit de la longueur l de la règle BC par le chemin qu'indiquera la roulette, c'est-à-dire que, en définitive, l'aire à mesurer sera proportionnelle au nombre de tours de la roulette. C. Q. F. D.

CHAPITRE V

RECHERCHE DES CENTRES DE GRAVITÉ

§ 1. — Centre de gravité des principales figures planes géométriques

64. **Définitions.** — En mécanique, on appelle centre de gravité d'un système matériel le point par lequel passerait toujours la résultante des forces parallèles appliquées aux masses dont se compose le système, proportionnellement à ces masses, quelle que soit d'ailleurs la direction que l'on donne à ces forces.

Pour les corps pesants on substitue aux masses les poids des éléments matériels du système, car ces poids sont proportionnels aux masses.

Si de plus le corps considéré est homogène, on peut substituer aux poids les volumes.

En réalité, les figures à trois dimensions pourraient, seules, avoir de la masse et par conséquent un centre de gravité ; mais, par extension, si l'on admet qu'une surface, plane ou non, possède une masse proportionnelle à son étendue, on peut aussi lui trouver un centre de gravité.

Il en sera de même pour les lignes droites ou courbes en assimilant ces lignes à des fils très fins dont la masse serait proportionnelle à leur longueur.

Ceci admis, nous allons déterminer les centres de gravité des volumes géométriquement définis et surtout ceux des surfaces, régulières ou non.

Pour la plupart de ces questions, nous admettons que les résultats sont déjà connus, nous ne ferons que les rappeler. (Pour les démonstrations, voir Complément.)

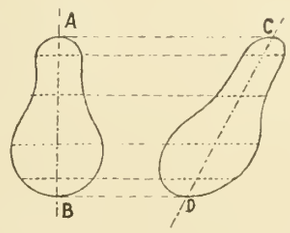
65. **Aires symétriques — 1er Principe.** — Lorsqu'une surface admet un axe de symétrie AB (fig. 39) ou simplement un diamètre CD (fig. 40), le centre de gravité de la surface se trouve sur cet axe ou sur ce diamètre.

De ce premier principe on déduit immédiatement le second.

2e Principe. — Si la surface considérée a deux axes (fig. 41) ou deux diamètres (fig. 42), son centre de gravité est à la rencontre de ces axes ou de ces diamètres.

66 **Application.** — Les centres de gravité du rectangle (fig. 43) et du parallélogramme (fig. 44) sont à la rencontre des diagonales.

Fig. 39 Fig. 40



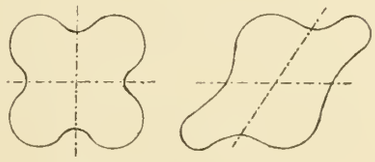


Fig. 41 Fig. 42

Celui du triangle (fig. 45) est à la rencontre des médianes, c'est-à-dire au tiers de la médiane à partir de la base. Celui du cercle est à son centre (fig. 46).

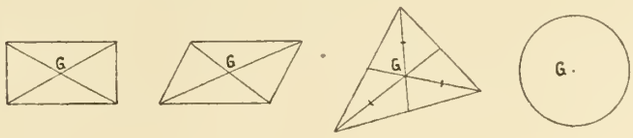


Fig. 43 Fig. 44 Fig. 45 Fig. 46

Pour le trapèze (fig. 47), il se trouve sur la droite qui

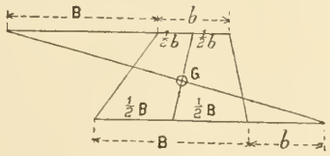


Fig. 47

joint les milieux des deux bases et divise cette droite dans

le rapport $\frac{B+2b}{2B+b}$, en appelant B la grande base et b la petite.

Si la surface considérée est un quadrilatère quelconque ABCD (fig. 48), en joignant deux sommets opposés B et D, par exemple, on le décompose en deux triangles dont les centres de gravité sont en G et G′, points que nous savons

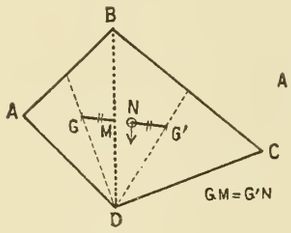


Fig. 48

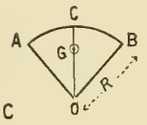


Fig. 49

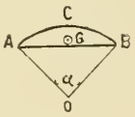


Fig. 50

déterminer. Joignons GG′, cette droite est coupée en M par BD. Si nous retournons, bout pour bout, la droite GG′, le point M venant en N donne la position, N, du centre de gravité du quadrilatère ABCD.

Voici encore quelques positions de centres de gravité :

Secteur circulaire AOB (fig. 49) . . . . $OG = \frac{2}{3}\frac{Rc}{S}$.

c désignant la longueur de la corde AB et S, la longueur de l'arc ACB.

Segment de cercle ACB (fig. 50) . . . . $OG = \frac{c^3}{12\Omega}$.

Ω (surface du segment) étant égal à $\frac{\alpha r^2}{3} - \frac{r \sin \alpha}{2}$.

Segment parabolique ACB (fig. 51) . . . $CG = \frac{3}{5}$ CD.

Demi-segment parabolique ACD (fig. 52) $\begin{cases} GG' = \frac{3}{8} AD \quad \text{et} \\ CG = \frac{3}{5} CD. \end{cases}$

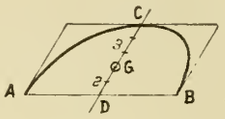


Fig. 51

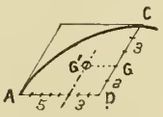


Fig. 52

Ces deux dernières positions de centres de gravité sont importantes à retenir. Nous en ferons usage dans la théorie des poutres droites.

§ 2. — Centres de gravité des figures planes quelconques

67. Recherche des centres de gravité par l'emploi de funiculaires. — Soit ABA′B′ la surface donnée (fig. 53).

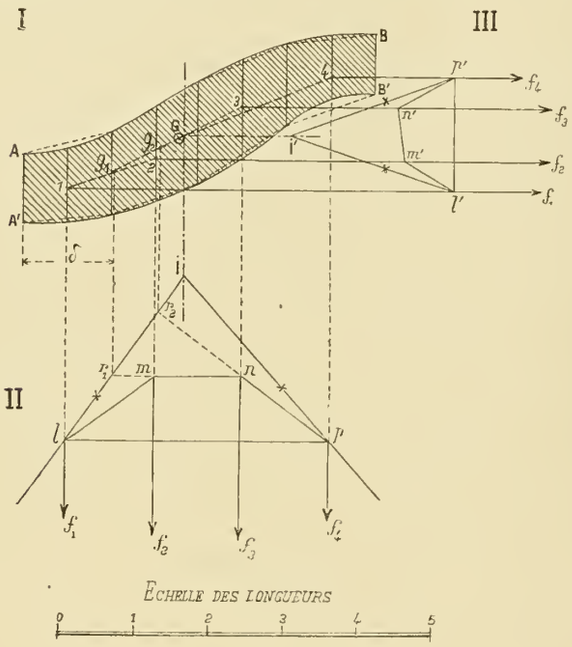


Fig. 53

Décomposons-la en tranches verticales, très minces, que nous pouvons prendre toutes *d'égale* largeur ; nous aurons ainsi une série de trapèzes dont les centres de gravité, si la largeur constante δ est suffisamment petite, seront sensiblement au milieu des médianes.

De plus, si l'on prend comme extrémités de ces médianes *les points d'équivalence* (1) de chaque segment de courbe, on pourra, dans la recherche du centre de gravité, remplacer chaque petit trapèze par une force égale ou proportionnelle à sa surface et appliquée à son centre de gravité ; on pourra donc prendre pour représenter ces forces les longueurs mêmes des médianes.

Construisons, en II, par une méthode quelconque, un funiculaire de ces forces ; le point I de croisement du côté initial et du côté final de ce funiculaire donnera la position de la résultante des forces et le centre de gravité sera sur cette résultante.

En construisant, en III, un deuxième funiculaire répondant à une autre direction des forces parallèles, on obtiendra une nouvelle position de la résultante des forces appliquées aux trapèzes élémentaires, résultante qui passera aussi par le centre de gravité cherché.

Ce centre de gravité sera donc placé à l'intersection G

(1) On a vu, n° 58, que ce point d'équivalence est aux 2/3 de la flèche des arcs.

des lignes d'action des résultantes obtenues par la première et par la deuxième construction.

68. **Simplification de la construction précédente.** — On peut se dispenser de construire le deuxième funiculaire en profitant des remarques suivantes :

Soient 1, 2, 3, 4 les centres de gravité respectifs des trapèzes suivant lesquels la surface totale a été décomposée.

Les centres de gravité respectifs des deux premiers trapèzes élémentaires étant en 1 et en 2, le centre de gravité de leur ensemble doit rester sur la droite 1 — 2. D'un autre côté il doit être aussi sur la ligne d'action de la résultante des forces f_1 et f_2, ligne d'action qui est verticale et qui passe par le point r_1 du funiculaire (v. n° 24). Le centre de gravité de l'ensemble des deux premiers trapèzes est donc placé en g_1 à l'intersection de la droite 1 — 2 et de la verticale du point r_1.

Un raisonnement semblable montrerait que le centre de gravité de l'ensemble des trois premiers trapèzes élémentaires se trouve en g_2 à l'intersection de la droite $g_1 - 3$ avec la verticale du point r_2.

Enfin on verrait de même que le centre de gravité de la figure totale est au point G, intersection de la droite $g_2 - 4$ et de la verticale du point I.

69. **Méthode arithmétique.** — Il est souvent plus commode de déterminer la position du centre de gravité d'une surface par la méthode arithmétique. On procède alors de la manière suivante (figure inutile) :

Après avoir décomposé la surface proposée en aires élémentaires faciles à mesurer, telles que triangles, rectangles, ou petits trapèzes qui en diffèrent peu, on détermine le centre de gravité de chacune de ces aires élémentaires ainsi que sa surface, puis, choisissant arbitrairement deux axes rectangulaires OX et OY, on calcule les moments par rapport à ces deux axes, de forces égales aux aires élémentaires et appliquées en leur centre de gravité.

Soient M_x la somme des moments par rapport à l'axe OX, M_y celle relative à l'axe OY, S la somme des aires élémentaires, x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité ; on a $x_1 = \frac{M_x}{S}$ et $y_1 = \frac{M_y}{S}$. Ces différentes opérations sont facilitées par l'emploi d'un tableau du type suivant :

TYPE DE TABLEAU POUR LA RECHERCHE ARITHMÉTIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ

Dimensions réduites des aires élémentaires		Surfaces élémentaires	Coordonnées des centres de gravité		Moments partiels		OBSERVATIONS
Longueur	Largeur ou hauteur		x	y	par rapport à XX'	par rapport à YY'	
1	2	3	4	5	6	7	8
							Résultats.
	Surface totale S = ...			M_x = ...			x_1 = ... =
					M_y = ...		y_1 = ... =

Les colonnes 1, 2, 4 et 5 sont faciles à remplir ; les nombres qu'elles contiennent résultent de dimensions prises sur le dessin :

Les nombres de la colonne 3 sont les produits de ceux des colonnes 1 et 2 ;

Les nombres de la colonne 6 sont les produits de ceux des colonnes 3 et 5 ; ceux de la colonne 7 sont les produits des colonnes 3 et 4.

Le total de la colonne 3 fait connaître la surface S, les totaux des colonnes 6 et 7 font connaître M_x et M_y.

Cette méthode est très rapide, surtout lorsqu'on peut se servir de la règle à calcul pour faire les produits.

70. **Méthode expérimentale.** — Pour déterminer expérimentalement la position du centre de gravité on commence (fig. 54) par découper dans une feuille de papier fort et bien homogène le contour $mnm'n'$ de la surface proposée, puis fixant un fil à plomb à une aiguille fine plantée en O dans une planchette de bois verticale A, on suspend à la même aiguille la feuille de papier découpée dans laquelle on a eu soin de ménager un petit trou m près du bord, afin d'y passer l'aiguille. En abandonnant alors à elle-même la surface découpée elle exécute autour de son point de suspension une série d'oscillations et finit par s'arrêter dans une position d'équilibre lorsque son centre de gravité reste sur la verticale du point de suspension dont la position est indiquée par le fil à plomb. On indique le point n où le fil à plomb rencontre le contour découpé et, traçant sur le papier

la droite mn, on sait que cette droite contient le centre de gravité. On répète la même opération avec un autre point de suspension m' et on trace ainsi une nouvelle droite $m'n'$

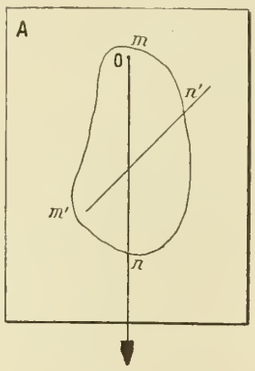


Fig. 54

qui contiendra également le point cherché. Le centre de gravité se trouvera donc au point d'intersection de $m'n'$ et de mn.

71. Moments partiels des aires sectionnées. — Soit ABB'A' une surface donnée (fig. 55); nous aurons, par la

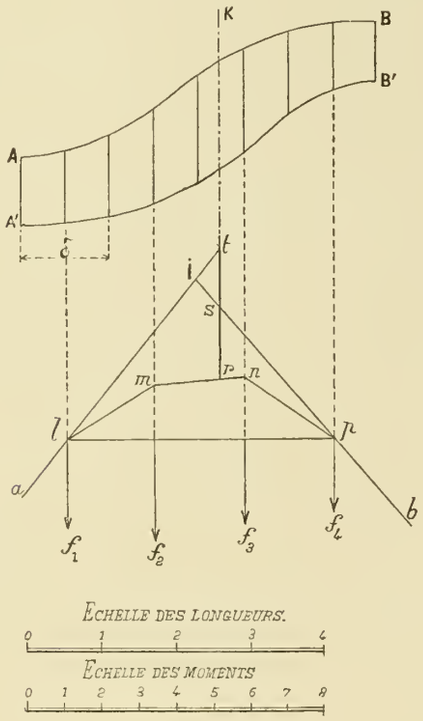


Fig. 55

suite, intérêt à connaître quel est le moment par rapport à une verticale K, de la portion de la surface proposée située soit à gauche, soit à droite de cette verticale.

Prenons la portion de gauche ; cette recherche revient, en somme, à trouver, par rapport à la verticale K, les moments des forces f_1 et f_2 situées à sa gauche; ces forces f_1, f_2, f_3 et f_4 étant proportionnelles aux surfaces élémentaires suivant lesquelles nous avons divisé l'aire totale. Dans la fig. 54 ces forces ont été prises égales aux ordonnées médianes des trapèzes.

Construisons comme précédemment en *almnpb* (v. n° 67) le funiculaire des forces f_1, f_2, f_3 et f_4.

Si nous considérons seulement les forces f_1 et f_2, leur funiculaire partiel aura pour côté initial ll et pour côté final mn. Or nous avons vu (v. n° 34) que la portion de verticale tr comprise entre ces deux droites donne le moment partiel à une certaine échelle. Cette échelle dépend de d, la distance polaire du funiculaire, et de δ, la largeur des trapèzes élémentaires.

Si le funiculaire était unifié le moment cherché serait égal à $\overline{tr}$ mesurée à l'échelle des forces ; mais comme la distance polaire est d le segment $\overline{tr}$ devra être multiplié par d.

En ce qui concerne δ, nous avons pris les forces égales aux longueurs des médianes des trapèzes, tandis que pour obtenir le résultat cherché il aurait fallu les prendre égales au produit de ces médianes par δ. Pour obtenir le même résultat nous devrons multiplier le segment $\overline{tr}$ par δ. Donc, en résumé $\overline{tr}$ devant être multiplié par d et par δ devra l'être par $d\delta$ et nous pourrons écrire, en appelant M le moment partiel

$$M = \overline{tr} \times d\delta.$$

72. Exemple. — Sur la fig. 55 la distance f_1f_4 est $3^m,50$; or, le funiculaire a été établi sur $\overline{lp}$, comme base, par la méthode de M. Collignon ; la distance polaire est donc $1^m,75$ et la distance δ est $\frac{3,50}{3} = 1^m,166$.

Par conséquent $d\delta = 1,75 \times 1,166 = 2^m,05$.

L'échelle des moments sera donc 2,05 fois plus petite que celle des longueurs, ainsi que le montrent les échelles de la fig. 55.

73. Centres de gravité des solides géométriques. — Pour terminer ce qui est relatif aux centres de gravité nous rappellerons que les centres de gravité du cylindre et du prisme sont sur la droite qui joint les centres de gravité de leurs bases et à *égale distance* de celles-ci et que ceux du cône et de la pyramide se trouvent sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, et au *quart* de la longueur de cette droite, en partant de la base.

CHAPITRE VI

MOMENTS D'INERTIE DES AIRES PLANES

§ I. — Généralités sur les moments d'inertie

74. **Définitions.** — Indépendamment des moments statiques que nous avons étudiés en parlant des forces et des centres de gravité, nous aurons souvent dans l'étude de la stabilité des constructions à considérer des moments d'un ordre plus élevé.

Nous verrons notamment très souvent intervenir (fig. 56) la somme de produits tels que ωy^2, d'un élément de surface ω par *le carré* de sa distance à un axe OX ou bien encore ωx^2 lorsque la distance à l'élément de surface sera comptée à partir de l'axe OY, ou bien encore ωr^2 lorsque la distance de l'élément ω sera prise par rapport à un point fixe appelé *pôle*; les sommes de ces moments étant appliquées à tous les éléments d'une surface donnée.

Les expressions ωy^2, ωx^2, ωr^2 se nomment des *moments d'inertie élémentaires.*

Leurs sommes, c'est-à-dire les expressions $\Sigma\omega y^2$, $\Sigma\omega x^2$, $\Sigma\omega r^2$ sont désignées sous le nom générique de *moments d'inertie* de la surface. Les deux premières sont les moments d'inertie par rapport aux axes OX et OY et seront représentées par la lettre I affectée d'un indice qui fera connaître l'axe par rapport auquel on a pris les moments; ainsi on aura $I_x = \Sigma\omega y^2$ et $I_y = \Sigma\omega x^2$.

On appelle quelquefois I_x et I_y des *moments équatoriaux.*

La quantité $\Sigma\omega r^2$ est désignée sous le nom de *moment d'inertie polaire* et sera représentée par la lettre J sans indice (1).

$$J = \Sigma\omega r^2.$$

Il est facile de reconnaître qu'on a toujours $I_x + I_y = J$ lorsque les axes OX et OY sont rectangulaires et qu'ils passent par le pôle.

En effet, en jetant les yeux sur la fig. 56 on voit qu'on a toujours

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et par conséquent

$$\Sigma\omega y^2 + \Sigma\omega x^2 = \Sigma\omega(y^2 + x^2) = \Sigma\omega r^2.$$

(1) On pourrait ajouter un indice qui servirait à désigner le pôle. Sur la fig. 56, on pourrait écrire : $\Sigma\omega r^2 = J_O$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant et son corollaire.

75. **Théorème I, dit du moment d'inertie polaire.** — *Le moment d'inertie polaire d'une surface est égal à la somme de deux quelconques de ses moments équatoriaux pris par rapport à deux axes* OX *et* OY *perpendiculaires entre eux et passant par le pôle.*

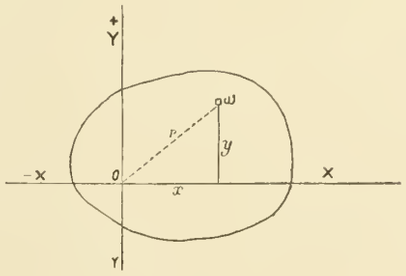


Fig. 56

Corollaire. — *La somme de deux moments d'inertie d'une surface pris par rapport à des axes perpendiculaires entre eux et passant par un point fixe* O *est constante.*

76. **Théorème II, dit du centre de gravité.** — *Moments d'inertie centraux* (fig. 57, v. page suivante).

Considérons une surface ABC dont I_x est le moment d'inertie par rapport à un axe OX *passant par son centre de gravité* G et proposons-nous de trouver la relation qui existe entre I_x et le moment d'inertie de la même surface par rapport à un autre axe O'X', parallèle au premier et séparé de celui-ci par la distance a. Soit $I_{x'}$ le moment d'inertie par rapport au nouvel axe O'X'.

Prenons un élément de surface ω dont les ordonnées par rapport aux deux axes sont y et y'; on a d'abord

$$y' = y + a.$$

Les moments d'inertie de cet élément par rapport aux mêmes axes seront

$$i_x = \omega y^2 \quad \text{et}$$

$$i_{x'} = \omega y'^2 = \omega(y + a)^2 = \omega(y^2 + 2ay + a^2).$$

Si nous faisons la somme de tous ces moments élémentaires nous obtiendrons les moments d'inertie totaux

$$I_x = \Sigma\omega y^2 \quad \text{et}$$

$$I_{x'} = \Sigma\omega y^2 + 2a\Sigma\omega y + a^2\Sigma\omega.$$

Mais dans le 2e membre de l'expression $I_{x'}$ la quantité $\Sigma\omega y^2$ c'est I_x ; $\Sigma\omega y$ c'est le moment statique de la surface ABC par rapport à l'axe OX, moment qui est nul puisque l'axe OX passe par le centre de gravité G ; donc $2a\Sigma\omega y = 0$.

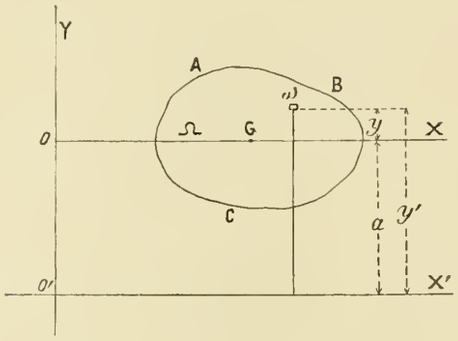


Fig. 57

Quant à $\Sigma\omega$ c'est la surface ABC $= \Omega$; $a^2\Sigma\omega$ est donc le produit de la surface ABC par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe OX', produit que nous pouvons représenter par Ωa^2.

Nous pouvons donc énoncer ainsi le théorème du centre de gravité.

Théorème II, dit **du centre de gravité.** — *Le moment d'inertie $I_{x'}$ d'une surface, par rapport à un axe quelconque, est égal à son moment d'inertie par rapport à un second axe parallèle au premier mais passant par son centre de gravité, augmenté du moment d'inertie, par rapport au premier axe, du centre de gravité auquel on aurait concentré toute la surface Ω.*

Corollaire. — *Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité sont plus petits que tous ceux qui sont pris par rapport à des axes qui leur seraient parallèles.*

77. **Moments centraux d'inertie.** — On nomme *moments centraux d'inertie* ceux qui se rapportent à des axes passant par le centre de gravité.

Dans ce qui va suivre, et à défaut d'indication contraire, nous supposerons toujours que l'axe par rapport auquel on prend le moment d'inertie passe par le centre de gravité de la surface.

78. **Rayon de giration.** — Soit une surface ABCD (fig. 58), d'aire totale égale à Ω et dont nous avons trouvé le moment d'inertie I_x par rapport à un axe OX ; si en dehors de cet axe nous prenons un point M auquel *nous supposerons concentrée toute la surface* Ω, en appelant d la distance de l'axe OX à ce point, le moment d'inertie de M sera Ωd^2. Si en outre d est tel qu'on ait

$$I_x = \Omega d^2 \qquad \text{ou} \qquad d^2 = \frac{I_x}{\Omega},$$

la quantité d sera ce que nous nommerons le *rayon de giration.*

78 *bis*. **Point d'inertie condensée.** — De sorte que si nous désignons sous le nom de *point d'inertie condensée* le point M

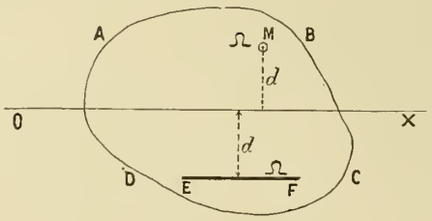


Fig. 58

qui satisfait aux conditions indiquées ci-dessus, nous pourrons dire que le rayon de giration d_x relatif à un axe OX est la distance de cet axe *à tout point d'inertie condensée.*

78 *ter*. **Droite d'inertie condensée.** — Au lieu d'un point M d'inertie condensée nous aurions pu supposer une droite EF de longueur quelconque, parallèle à OX et sur laquelle aurait été concentrée toute la surface Ω ; le moment d'inertie de cette droite, pour être égal à I_x, aurait dû être Ωd^2 et la droite remplissant ces conditions aurait été pour nous une *droite d'inertie condensée ;* de sorte que nous pouvons dire également que le rayon de giration d_x relatif à un axe OX est la distance de cet axe *à toute droite d'inertie condensée.*

§ 2. — Ellipse centrale d'inertie

79. **Axes principaux d'inertie.** — Nous avons dit (n° 74) que l'expression ωy^2 est le moment d'inertie de l'élément ω de surface par rapport à l'axe des x ; nous l'avons désigné par i_x ; c'est un moment du second degré que l'on pourrait appeler un *moment carré* parce que y entre au carré dans son expression.

On pourrait aussi considérer l'expression ωxy ; nous la nommerons un *moment rectangulaire* parce qu'il y entre le même produit $(x \times y)$ que celui qui donnerait la surface d'un rectangle construit sur les coordonnées x et y.

Entre les moments carrés ωx^2 ou ωy^2 et les moments rectangulaires ωxy la différence essentielle consiste en ce

que les premiers sont toujours positifs, même si x ou si y sont négatifs, tandis que les moments rectangulaires peuvent être négatifs, et ils le sont lorsque x et y sont de signes contraires, ce qui arrive pour les points tels que N et N (fig. 59) situés dans le 2e et le 4e quadrant.

Dès lors, si l'on fait la somme de tous ces moments pour avoir $\Sigma\omega y^2$ ou I_x, $\Sigma\omega x^2$ ou I_y et $\Sigma\omega xy$, tandis que I_x et I_y donneront toujours une quantité positive, l'expression $\Sigma\omega xy$ sera positive si le total des ωxy positifs l'emporte sur celui des négatifs, elle sera négative dans le cas contraire.

Je dis qu'il suit de là que, pour une direction convenable des axes, le moment rectangulaire peut être nul.

En effet, supposons que pour la position OX et OY (fig. 59) le moment rectangulaire $\Sigma\omega xy$ soit positif ; si l'on

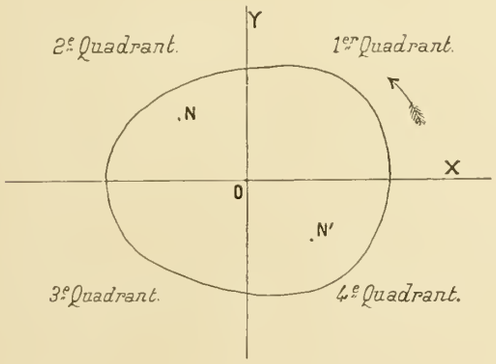


Fig. 59

fait tourner progressivement l'ensemble des axes autour du point O comme pivot jusqu'à ce que OX prenne la place de OY, à ce moment les points de la surface qui étaient situés dans le 1er et dans le 3e quadrant avant le mouvement donné aux axes se trouveront, une fois le mouvement terminé, dans le 4e et le 2e quadrant.

Pour chacun des points situés dans ces quadrants le produit xy aura la même valeur absolue, avant comme après, mais ce produit aura changé de signe ; le premier était positif, le second sera négatif. Pour la même raison les produits xy qui étaient affectés du signe — avant le mouvement des axes prendront après ce mouvement le signe +, d'où l'on conclut que $\Sigma\omega xy$ qui était positif sera devenu négatif. Mais comme le changement de valeur se sera fait d'une manière continue, il est évident qu'à un instant donné le moment rectangulaire $\Sigma\omega xy$ sera passé par une valeur nulle.

Ces axes particuliers pour lesquels $\Sigma\omega xy = 0$ ont reçu le nom d'*axes principaux d'inertie*.

Nous apprendrons à trouver la direction de ces axes et nous montrerons qu'il n'y en a qu'une seule.

80. **Loi de variation des moments d'inertie.** — Supposons connus les axes principaux d'inertie OX et OY ; prenons-les pour axes de coordonnées et cherchons la loi de variation des moments d'inertie lorsque l'axe OX, par rapport auquel on les prend, change de direction et devient OX' par exemple, faisant avec l'axe principal OX un angle α (fig. 60).

Pour un point quelconque M on a

$$i_{x'} = \omega y'^2.$$

Joignons OM et écrivons que la projection de OM sur OY' est égale à la projection sur le même axe, du contour omM, nous aurons

$$y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Elevons au carré

$$y'^2 = y^2 \cos^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha - 2yx \sin\alpha \cos\alpha.$$

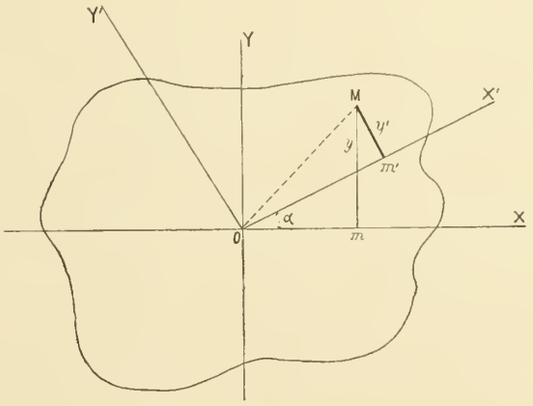


Fig. 60

Multiplions les deux membres par ω et faisons la somme de toutes les valeurs analogues relatives aux autres points de la surface donnée en remarquant que $\Sigma\omega y'^2 = I_{x'}$, nous aurons :

$$I_{x'} = \cos^2\alpha\Sigma\omega y^2 + \sin^2\alpha\Sigma\omega x^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\Sigma\omega xy\,;$$

or les axes OX et OY étant, par hypothèse, les axes principaux d'inertie $\Sigma\omega xy = 0$ (v. n° 79) ; donc l'équation précédente se réduit à celle-ci :

$$(1) \qquad I_{x'} = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha.$$

Telle est la formule algébrique, très simple, qui fait connaître le moment d'inertie $I_{x'}$ par rapport à un axe OX', quand on connaît les moments d'inertie principaux I_x et I_y et l'angle α que l'axe OX' fait avec un des axes principaux d'inertie.

Cherchons à mettre en évidence les rayons de giration.

Désignons par ρ le rayon de giration répondant à l'axe OX' par r et R ceux répondant aux axes OX et OY et par Ω la surface totale de la figure proposée ; d'après ce que nous avons vu plus haut (v. n° 78), on a

$$I_{x'} = \Omega\rho^2, \qquad I_x = \Omega r^2, \qquad I_y = \Omega R^2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1) et en supprimant le facteur commun Ω on obtient la formule :

$$(2) \qquad \rho^2 = r^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha.$$

80 *bis*. **Ellipse d'inertie.** — Nous allons montrer que cette équation qui, en définitive, fait connaître ρ en fonction de l'angle variable α et des quantités constantes R et r peut être interprétée géométriquement par une ellipse.

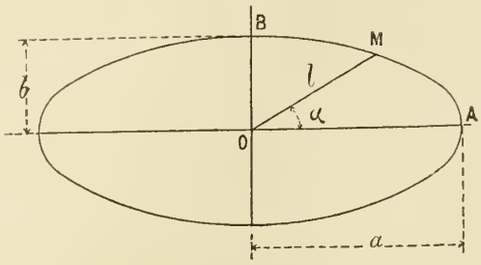


Fig. 61

En effet (v. Ct) l'ellipse qui, rapportée à ses axes, a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (fig. 61),

satisfait, en coordonnées polaires, à l'équation

$$(3) \qquad \frac{1}{a^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{b^2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{l^2},$$

dont l'analogie de forme avec l'équation (2) est frappante. Pour conduire à l'interprétation annoncée, construisons (fig. 62) une ellipse telle que :

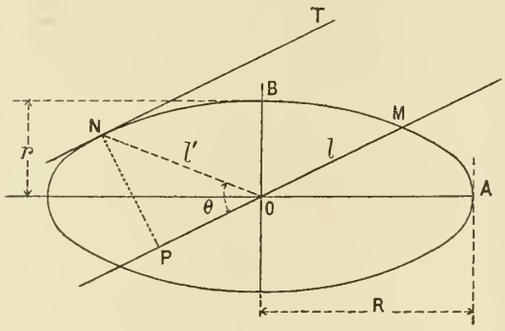


Fig. 62

1° Son axe OB soit égal à r, rayon de giration correspondant à l'axe OX, ce qui revient à dire que le point B est le point d'inertie condensée répondant à l'axe OX ;

2° Son autre axe OA soit égal à R, ce qui revient à dire que A est le point d'inertie condensée répondant à OY.

L'équation polaire de cette ellipse sera, d'après l'équation (3),

$$\frac{1}{R^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{l^2},$$

ou en réduisant au même dénominateur et en simplifiant

$$\frac{R^2 r^2}{l^2} = r^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha,$$

d'où l'on déduit, en identifiant avec l'équation (2)

$$(4) \qquad \rho^2 = \frac{R^2 r^2}{l^2} \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{Rr}{l},$$

ce qui veut dire, puisque Rr est constant, que le rayon vecteur l de cette ellipse est inversement proportionnel au rayon de giration ρ de la direction OM.

Cette ellipse se nomme l'*ellipse d'inertie* (1) ; elle jouit de la propriété d'avoir ses rayons vecteurs inversement proportionnels aux rayons de giration répondant aux droites sur lesquelles ces rayons vecteurs sont comptés.

On conçoit que toute ellipse semblable à celle-ci serait dans les mêmes conditions ; mais l'ellipse d'inertie se distingue de toutes les ellipses semblables par la propriété suivante : Menons à l'ellipse (fig. 62) la tangente NT parallèle à OM ; soit N le point de contact. Joignons ON et soit l' la longueur ON ; désignons par θ l'angle que font les deux diamètres OM et ON, qui, on le sait, sont conjugués l'un de l'autre. En vertu du deuxième théorème d'Apollonius on aura (v. Ct),

$$ll' \sin \theta = Rr,$$

d'où l'on déduit en vertu de l'équation (4)

$$l' \sin \theta = \frac{Rr}{l} = \rho.$$

Mais $l' \sin \theta$ c'est la perpendiculaire NP. Par conséquent NP est le rayon de giration ρ répondant à la direction OM et la tangente NT est une droite *d'inertie condensée* relativement à l'axe OM.

Dès lors nous résumerons comme il suit les propriétés de l'ellipse d'inertie :

80 *ter*. **Propriétés de l'ellipse d'inertie.** — 1° *L'ellipse d'inertie est l'enveloppe des* **droites d'inertie condensée** *de l'aire plane considérée.*

2° *Ses rayons vecteurs sont inversement proportionnels aux rayons de giration qui correspondent aux axes sur lesquels ces rayons vecteurs sont comptés.*

Nota. — Cette théorie de l'ellipse d'inertie est d'une importance capitale en résistance des matériaux. Nous ne saurions trop engager le lecteur à ne pas passer outre sans l'avoir comprise dans tous ses détails.

* 81. **Détermination graphique de l'ellipse centrale d'inertie.** — Soit ABC (fig. 63) une surface quelconque dont on veut déterminer l'ellipse d'inertie. On commencera par déterminer son centre de gravité G et sa surface Ω par l'un

(1) Ce que nous venons de dire ne suppose pas que le point O, soit le centre de gravité de la section. S'il en était ainsi l'ellipse se nommerait ellipse *centrale* d'inertie, ou tout simplement *l'ellipse centrale*.

des moyens que nous avons indiqués (v. nos 67 à 70) ; puis menant par G une droite quelconque GL on cherchera, par l'un des moyens que nous indiquerons plus loin, (v. n° 82 et suivants) le moment d'inertie de la surface par rapport à cette droite. Supposons que nous sachions le trouver et soit I_l ce moment d'inertie.

En faisant le quotient $\frac{I_l}{\Omega}$ on aura d_l, le rayon de giration répondant à l'axe OL. Il suffira alors de mener à cet axe deux parallèles D et D', distantes de la ligne OL de la quantité d_l pour avoir deux tangentes à l'ellipse centrale d'inertie.

On répétera la même opération pour deux autres directions L' et L'', ce qui donnera, finalement, un hexagone 1, 2, 3, 4, 5, 6, circonscrit à l'ellipse d'inertie.

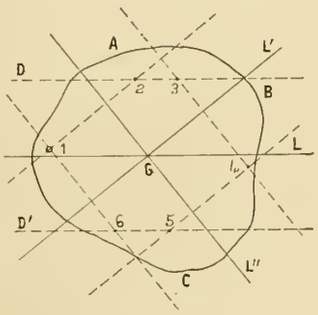


Fig. 63

Le problème est donc ramené à celui-ci : Connaissant un hexagone circonscrit à une ellipse, tracer les axes de celle-ci.

Ce problème est assez difficile à résoudre, mais nous pouvons choisir nos directions L, L' et L'' de manière à simplifier les constructions. Opérons comme suit :

Prenons la deuxième direction L' perpendiculaire sur la première L (fig. 64) et cherchons comme ci-dessus les tangentes correspondantes de l'ellipse d'inertie. Soient AB, A'B', AB', A'B ces tangentes.

D'après un théorème connu, le sommet, B, de l'angle droit circonscrit à une ellipse est sur la circonférence décrite de O comme centre avec la diagonale des axes comme rayon ; on a donc :

$$\overline{OB}^2 = a^2 + b^2.$$

Prenons maintenant la diagonale BB' du rectangle circonscrit comme troisième direction et cherchons comme ci-dessus les tangentes correspondantes de l'ellipse d'inertie. Soient CD et C'D' ces tangentes.

Les diagonales AA' et BB' sont des diamètres conjugués de l'ellipse (1), donc N est le point de contact de l'une de ces tangentes, $ON = b'$ est un demi-diamètre; son conjugué, a', s'obtiendra en appliquant le théorème d'Apollonius

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = \overline{OB}^2.$$

A cet effet : sur OB comme diamètre, décrivons une cir-

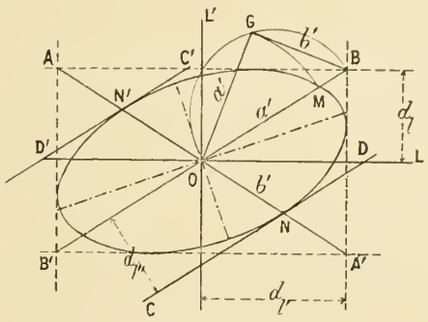


Fig. 64

conférence ; de B comme centre avec une longueur, $BG = ON$, pour rayon, traçons un arc de cercle qui coupera la première circonférence en G à une distance b' du point B ; la distance OG sera la longueur cherchée a' et il suffira de la porter de O en M au moyen d'un arc de cercle.

Connaissant deux diamètres conjugués $OM = a'$ et $ON = b'$ il sera facile de trouver les axes et de tracer cette ellipse (v. Ct, ch. V).

(1) On peut le démontrer en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle ; le rectangle ABA'B' sera la projection d'un losange, car tout parallélogramme circonscrit au cercle est un losange ; les diagonales de ce losange, qui sont à angle droit, donneront en projection les diagonales du rectangle qui seront, par conséquent, deux diamètres conjugués de l'ellipse.

§ 3. — Recherche algébrique des moments d'inertie équatoriaux

82. **La recherche d'un moment d'inertie équatorial ramenée à celle d'un moment statique.** — Nous allons d'abord montrer qu'on peut ramener la recherche d'un moment d'inertie équatorial d'une surface, par rapport à une droite, à celle du moment *statique* d'un volume par rapport à un plan.

Soit ABC (fig. 65 représentée en perspective), dans le plan horizontal, une aire plane dont nous voulons trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque XX' situé dans son plan.

Considérons en E un petit élément de surface ω situé à une distance y de l'axe, son sommet d'inertie partiel est

$$i = \omega y^2.$$

Imaginons un cylindre vertical qui aurait pour base la

courbe ABC et un cylindre vertical plus petit ayant pour base ω ; enfin menons par XX′ un plan incliné à 45° ; ce plan coupera le cylindre total suivant une courbe plane

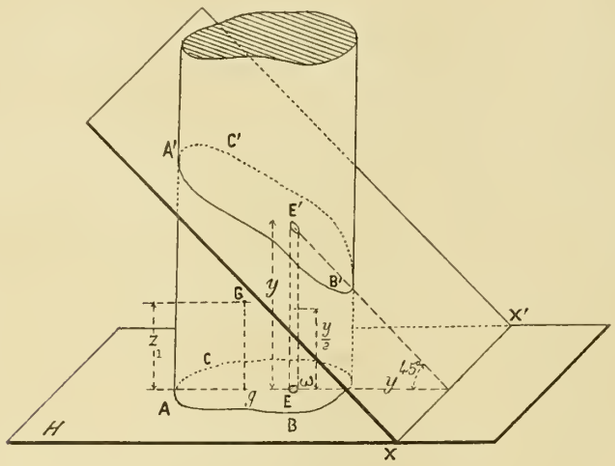


Fig. 65

A′B′C′ et le petit cylindre suivant une section oblique E′.

La hauteur de ce petit cylindre est égale à y, à cause de la direction à 45° du plan sécant ; le volume de ce cylindre élémentaire est donc

$$v = \omega y.$$

Son centre de gravité est au milieu de sa hauteur, c'est-à-dire à une distance $y/2$ du plan H.

Par conséquent le moment statique de ce petit cylindre, par rapport au plan horizontal H, est

$$m = \frac{\omega y^2}{2}, \qquad \text{d'où :}$$

$$\omega y^2 = 2m.$$

Cette égalité montre que le moment d'inertie du petit élément ω par rapport à l'axe XX′ est égal au double du moment statique par rapport au plan H du petit cylindre EE′ ayant ω pour base. Le moment d'inertie total de la surface ABC, par rapport à l'axe XX′, sera donc égal au double du moment statique du tronc de cylindre par rapport au plan H.

Si l'on connaissait le volume V de ce tronc de cylindre, son centre de gravité G et, surtout, la hauteur z_1 de ce centre de gravité, son moment total serait

$$Vz_1 ;$$

on aura donc

$$\Sigma\omega y^2 = I_x = 2Vz_1.$$

En résumé : 1° on considère un cylindre droit ayant pour base l'aire plane donnée ;

2° Par la droite, relativement à laquelle on cherche le moment d'inertie, on mène un plan incliné à 45° sur le plan de base ; ce plan découpe un tronc de cylindre ;

3° On détermine le moment *statique* de ce tronc de cylindre par rapport au plan de base ; ce qui conduit à chercher le volume V de ce tronc et la distance z_1 de son centre de gravité au plan de la base ; Vz_1 est ce moment statique ;

4° Le moment d'inertie cherché est égal au *double* du moment statique ci-dessus trouvé.

83. Application. — *Moment d'inertie du rectangle par rapport à l'un de ses côtés.*

Soient a et b (fig. 66 en perspective) les côtés du rectangle donné. Cherchons d'abord son *moment d'inertie* par *rapport au côté* a.

En construisant comme ci-dessus le prisme qui aurait pour base ABCD et en le coupant par un plan à 45° passant

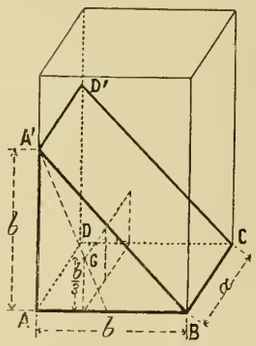


Fig. 66

par la droite BC, on obtient un prisme triangulaire ABA′CDD′ dont le centre de gravité est à une distance z_1 égale à 1/3 de la hauteur b.

On a donc

$$V = \frac{ab^2}{2} \qquad \text{et} \qquad z_1 = \frac{b}{3}.$$

Par conséquent le moment statique du tronc de prisme par rapport au plan de base a pour valeur

$$M = \frac{ab^2}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{ab^3}{6},$$

et le moment d'inertie, qui en est le double, a pour expression :

$$I = \frac{ab^3}{3}.$$

84. Moment d'inertie du rectangle par rapport à un axe X parallèle au côté a et passant par le centre de gravité. — D'après le théorème du centre de gravité (v. n° 76), le moment d'inertie que nous cherchons est égal au moment d'inertie par rapport au côté a, c'est-à-dire à $\frac{ab^3}{3}$, (v. n° précédent), diminué du produit $ab \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{4}$.

Nous aurons donc

$$I = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{4} = \frac{ab^3}{12},$$

expression très importante à retenir.

85. Ellipse centrale d'inertie du rectangle. — Soit d le rayon de giration répondant à la direction parallèle au côté a. D'après la définition du rayon de giration on doit avoir :

$$\Omega d^2 = I = \frac{ab^3}{12},$$

mais $$\Omega = ab,$$

donc $$d^2 = \frac{b^2}{12} \quad \text{et} \quad d = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Telle sera la longueur de l'un des demi-axes de l'ellipse d'inertie du rectangle, l'autre demi-axe sera

$$d' = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ces expressions sont faciles à construire. Sur la fig. 67 montrons comment la construction peut se faire.

Il faut, en définitive, pour avoir d et d' partager les demi-axes $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ du rectangle dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$. Pour cela, sur la demi-diagonale OS′ comme côté, on a construit

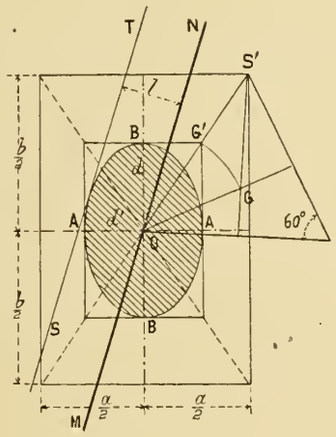


Fig. 67

un triangle équilatéral : on a pris en G les 2/3 de la médiane; et on a porté la longueur OG de O en G′ sur la demi-diagonale.

Cela posé, on sait que dans un triangle équilatéral on a, entre la base OS et le rayon OG du cercle circonscrit, la relation :

$$\overline{OS} = \overline{OG}\sqrt{3}, \qquad \text{donc}$$

$$\text{OG ou son égale} \quad \overline{OG'} = \frac{\overline{OS}}{\sqrt{3}}.$$

En menant par G′ des parallèles aux côtés du rectangle on a partagé, en A et B, les demi-axes dans ce même rapport et on a obtenu, par suite, en AA et BB les axes de l'ellipse centrale.

Ayant les deux axes de l'ellipse d'inertie on pourra tracer cette courbe et en déduire graphiquement le moment d'inertie du rectangle par rapport à un axe quelconque MN passant par le centre de gravité O.

Il suffira en effet de mener parallèlement à MN une tangente ST à l'ellipse d'inertie et, si l'on désigne par l la distance de cette tangente à la droite MN, le moment d'inertie cherché sera

$$I = ab \times l^2,$$

car l est le rayon de giration répondant à MN et ab est la surface Ω du rectangle. (Voir n° 80 *bis*.)

86. Moment d'inertie et ellipse d'inertie du parallélogramme. — Tout ce que nous avons dit relativement au moment d'inertie du rectangle (v. n° 83 et suivants) s'applique au parallélogramme avec cette condition que si a désigne le côté parallèlement auquel on prend le moment d'inertie, b sera non pas l'autre côté mais la hauteur du parallélogramme perpendiculaire à a ; on aura donc pour le moment d'inertie par rapport au côté a

$$I' = \frac{ab^3}{3},$$

et pour moment d'inertie central parallèlement à a

$$I = \frac{ab^3}{12}.$$

Enfin le rayon de giration répondant à la direction a sera, comme pour le rectangle,

$$d = \frac{b}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mais dans le cas du parallélogramme cette valeur ne sera

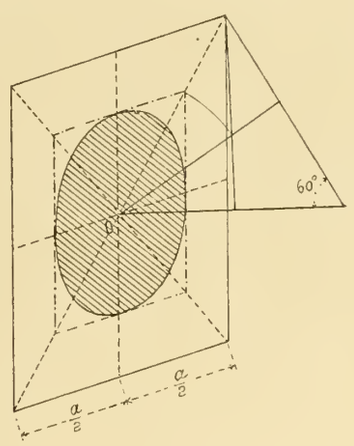


Fig. 68

plus celle du demi-axe de l'ellipse d'inertie, ce sera celle du demi-diamètre conjugué correspondant à la direction du côté a.

Cela résulte de ce théorème que :

Théorème. — Lorsque deux directions sont conjuguées

dans une figure plane, elles le sont aussi dans son ellipse d'inertie (1).

87. **Moment d'inertie du triangle par rapport à l'un de ses côtés.** — Soit ABC, figuré en perspective sur un plan horizontal, le triangle donné dont nous voulons trouver le moment d'inertie par rapport au côté BC.

Imaginons un plan SABC passant par le côté donné BC et incliné à 45° ; il rencontre la verticale du sommet en S.

Dans le prisme qui aurait ABC pour base ce plan à 45° détache une pyramide SABC et d'après ce que nous avons dit (v. n° 82) le moment statique de cette pyramide, par rapport au plan ABC, sera égal à la moitié du moment d'inertie cherché.

Désignons par h la hauteur AP du triangle correspondant au côté BC et par a ce côté. Le volume de la pyramide sera

$$a\,\frac{h}{2}\times\frac{h}{3}=a\,\frac{h^2}{6},$$

et comme son centre de gravité G (non figuré sur le croquis) se trouve au 1/4 de la hauteur à partir de la base le mo-

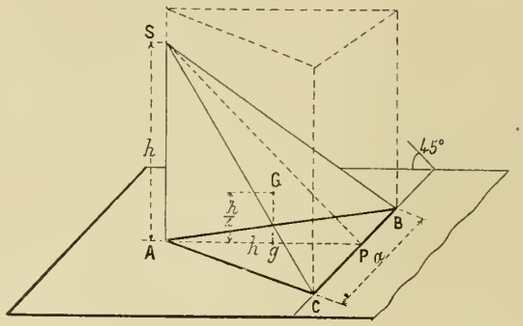


Fig. 69

(1)

* Pour démontrer ce théorème rappelons d'abord (v. Ct, 2e p., ch. V) que dans une ellipse (fig. 68 *bis*), si α et α' sont les angles que deux diamètres conjugués OA′ et OB′ font avec l'axe des x, on a :

(1) $$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2},$$ ou encore

(1′) $$b^2+a^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=0.$$

Cela posé, démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — OA′ et OB′ étant deux directions conjuguées de l'ellipse d'inertie, si l'on prend ces droites pour axes de coordonnées obliques OX′ et OY′, on aura : $\Sigma\omega x'y'=0$.

En effet : θ étant l'angle que font entre elles les directions OX′ et OY′, on a pour un point M, en abaissant les perpendiculaires Mm et Mn sur OX′ et OY′,

$$y'=\frac{\overline{Mm}}{\sin\theta}\qquad\text{et}\qquad x'=\frac{\overline{Mn}}{\sin\theta},$$

et pour un élément ω entourant le point M

$$\omega x'y'=\frac{\omega}{\sin^2\theta}\,\overline{Mm}\times\overline{Mn}.$$

Il suffit donc de prouver que

$$\Sigma\omega\left(\overline{Mm}\times\overline{Mn}\right)=0.$$

Or, d'après le théorème des projections, en écrivant que $\overline{Mm}$ est la projection du contour OPM, on a :

(2) $$\overline{Mm}=y\cos\alpha-x\sin\alpha$$ et de même

(3) $$\overline{Mn}=x\sin\alpha'-y\cos\alpha'.$$

Faisons le produit $\omega\left(\overline{Mm}\times\overline{Mn}\right)$ et étendons-le à toute la surface, il viendra, en remarquant que $\Sigma\omega xy=0$, puisque OX et OY sont les axes principaux d'inertie,

(4) $$\Sigma\omega\left(\overline{Mm}\times\overline{Mn}\right)=-\cos\alpha\cos\alpha' I_x-\sin\alpha\sin\alpha' I_y.$$

Or, si a et b sont les demi-axes de l'ellipse d'inertie et si Ω est l'aire de la surface totale, on a :

$$I_x=\Omega b^2\qquad\text{et}\qquad I_y=\Omega a^2,$$

en remplaçant dans le second membre de (4) il vient

$$\Sigma\omega\left(\overline{Mm}\times\overline{Mn}\right)=-\Omega(b^2\cos\alpha\cos\alpha'+a^2\sin\alpha\sin\alpha').$$

Je dis que la parenthèse du second membre est nulle. En effet : elle peut s'écrire, en mettant $\cos\alpha\cos\alpha'$ en facteur,

(5) $$\cos\alpha\cos\alpha'(b^2+a^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'),$$

et la nouvelle parenthèse est nulle d'après l'équation (1′).

Donc le lemme est démontré.

Lemme réciproque. — Si deux axes de coordonnées obliques, OX′, OY′, sont tels que l'on ait $\Sigma\omega x'y'=0$, ces axes sont deux diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie.

En effet, en évaluant comme ci-dessus le produit $\omega x'y'$ et ensuite $\Sigma\omega x'y'$,

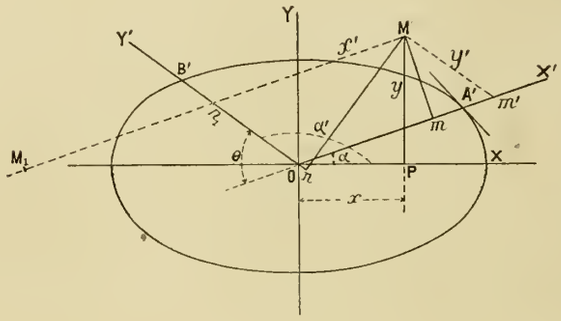


Fig. 68 *bis*

mais sans faire tout d'abord aucune hypothèse sur les valeurs relatives des angles α et α', on retombera sur l'expression 5 égalée à zéro, ce qui conduira à l'équation

$$b^2+a^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=0\qquad\text{ou}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2};$$

ce qui implique que les directions OX′ et OY′ sont conjuguées.

Cela posé, le théorème est maintenant facile à démontrer.

Soient OX′ et OY′ deux directions conjuguées *dans la surface*, je dis qu'elles sont aussi conjuguées *dans l'ellipse d'inertie.*

En effet, dire que OY′ est conjugué de OX′, c'est dire qu'à tout point tel que M ayant pour abscisse x', répondra, de l'autre côté de l'axe OY′, un autre point M_1 ayant même ordonnée y' mais une abscisse $-x'$ égale et de signe contraire à x'. Par conséquent pour les deux points M et M_1 les expressions $\omega x'y'$ auront des valeurs égales et de signe contraire qui se détruiront.

Comme cela se répétera pour tous les points, on voit que l'on aura

$$\Sigma\omega x'y'=0,$$

et que, d'après le lemme réciproque, les axes OX′ et OY′ seront deux diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie. C. Q. F. D.

ment statique de la pyramide par rapport au plan ABC sera

$$\frac{ah^2}{6} \times \frac{h}{4} = \frac{ah^3}{24};$$

le moment d'inertie cherché, qui en est le double, sera donc

$$I_a = 2\,\frac{ah^3}{24} = \frac{ah^3}{12}.$$

88. **Moment d'inertie central du triangle.** — D'après le théorème du centre de gravité (v. n° 76), ce moment d'inertie se déduit du précédent en en retranchant le produit de la surface du triangle par le carré de la distance du centre de gravité au côté BC. Nous aurons donc

$$I = \frac{ah^3}{12} - \frac{ah}{2} \times \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{ah^3}{12} - \frac{ah^3}{18}.$$

$$I = \frac{ah^3}{36}.$$

*89. **Ellipse centrale d'inertie du triangle.** — Le rayon de giration, ρ, répondant au côté BC est donné par la formule générale

$$\Omega\rho^2 = I, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \sqrt{\frac{I}{\Omega}};$$

dans le cas actuel on a donc :

$$\rho = \sqrt{\frac{ah^3}{36} : \frac{ah}{2}} = \sqrt{\frac{h^2}{18}} = \frac{h}{3\sqrt{2}}.$$

Cette valeur va nous permettre de tracer l'ellipse d'inertie.

(*a*) **Triangle équilatéral.** — Considérons d'abord le cas d'un triangle équilatéral (fig. 70).

En raison de l'égalité que présentent toutes les parties de cette figure, son ellipse d'inertie sera un cercle dont le centre sera au centre de gravité du triangle et dont le rayon sera

$$\rho = \frac{h}{3\sqrt{2}} = \frac{h}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Partageons la portion OC de la médiane issue du point C

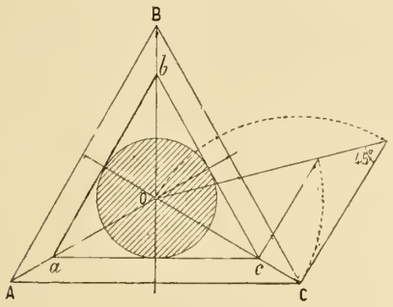


Fig. 70

dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (tracé connu) et menons par le point c, ainsi obtenu, des parallèles aux côtés AC et CB; on aura en ca et cb deux tangentes au cercle d'inertie ; ce dernier est donc déterminé.

Remarquons enfin que la médiane répondant au côté AC est perpendiculaire au diamètre du cercle d'inertie parallèle à ce côté.

(*b*) **Triangle quelconque.** — Si maintenant nous considérons le cas d'un triangle quelconque, nous pourrons toujours, au point de vue des moments d'inertie, envisager ce triangle comme étant la projection d'un triangle équilatéral. (Le théorème précédent sur les directions conjuguées nous y autorise.) Dans cette projection le point c partagera toujours la portion OC de la médiane dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et les projections des droites ab, bc, ca seront les tangentes à l'ellipse d'inertie. Dans celle-ci le diamètre dirigé suivant une médiane du triangle sera le conjugué du diamètre parallèle au côté répondant à la médiane considérée, puisque dans un triangle une médiane BD est conjuguée du côté correspondant AC.

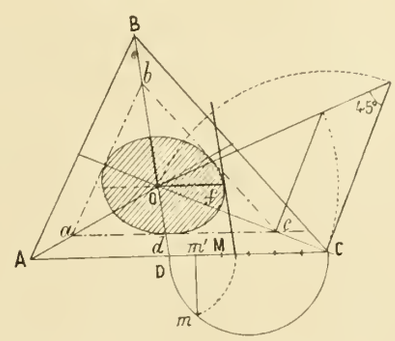


Fig. 71

A l'aide de ces remarques on tracera facilement l'ellipse d'inertie, comme suit :

1° Après avoir partagé la droite OC dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on mènera du point c, ainsi obtenu, des parallèles aux côtés du triangle ; ces parallèles ab, bc, ca seront des tangentes à l'ellipse d'inertie et leur rencontre avec la médiane issue du sommet qui leur est opposé sera le point de tangence. Tel est par exemple le point d.

2° Le diamètre conjugué de Od sera parallèle à AC. Pour en avoir la longueur nous allons déterminer le rayon de giration répondant à la direction BD. Appelons l la longueur de la médiane, et δ la distance de cette droite au point C ; δ est aussi la distance de A à la médiane BD.

Le moment d'inertie du triangle par rapport à la médiane BD sera (v. n° 87)

$$I_l = 2\,\frac{l\delta^3}{12} = \frac{l\delta^3}{6},$$

et le rayon de giration correspondant sera

$$\rho' = \sqrt{\frac{b\delta^3}{6 \times b\delta}} = \frac{\delta}{\sqrt{6}}.$$

On voit donc qu'en prenant sur la base un point M qui divise DC dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{6}}$ et en menant par ce point une parallèle Mf à la médiane BD l'intersection f de cette parallèle avec le diamètre conjugué de Od sera le point de tangence cherché. Connaissant dans l'ellipse d'inertie les deux demi-diamètres conjugués Od et Of, on tracera facilement la courbe et même ses axes, d'après le tracé connu (v. Ct, 2e p., ch. V).

***90. Moment d'inertie du trapèze par rapport à sa grande base.** — En considérant le trapèze comme la réunion d'un

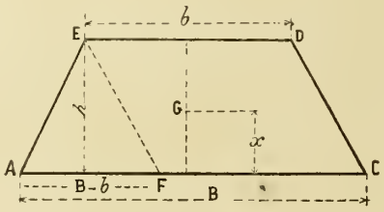


Fig. 72

parallélogramme et d'un triangle on trouve facilement son moment d'inertie par rapport à l'une de ses bases parallèles.

Soit ACDE (fig. 72) le trapèze donné dont h est la hauteur, B la grande base, b la petite. En menant BF parallèle à DE on le décompose en deux surfaces dont nous savons trouver le moment d'inertie : on aura donc

$$I_B = b\frac{h^3}{3} + (B - b)\frac{h^3}{12} = \frac{h^3}{12}(B + 3b).$$

***91. Moment d'inertie central du trapèze parallèlement aux bases.** — En retranchant de la valeur I_B que nous venons de trouver le produit de l'aire du trapèze par le carré de la distance x de son centre de gravité à la grande base on obtiendra le moment d'inertie central cherché. La distance x, d'après ce que nous avons vu (v. n° 66), est égale à

$$x = \frac{h}{3} \times \frac{2b + B}{b + B},$$

on aura donc

$$I = \frac{h^3}{12}(B + 3b) - \frac{h}{2}(B + b) \times \frac{h^2}{9}\frac{(2b + B)^2}{(b + B)^2}$$

ou en réduisant

$$I = \frac{h^3}{12}(B + 3b) - \frac{h^3}{18} \times \frac{(B + 2b)^2}{B + b}.$$

En divisant cette quantité par la surface et en simplifiant on obtiendrait pour valeur du carré du rayon de giration

$$\rho^2 = \frac{h^2}{18}\left(1 + \frac{2Bb}{(B + b)^2}\right.$$

$$\rho = \frac{h}{3(B + b)}\sqrt{\frac{B^2 + 4Bb + b^2}{2}}.$$

§ 4. — Recherche algébrique des moments d'inertie polaire

92. **La recherche d'un moment d'inertie polaire ramenée à celle d'un moment statique.** — Soit ABC (fig. 73) l'aire donnée, G son centre de gravité.

Imaginons comme nous l'avons fait plus haut (v. n° 82) un cylindre qui aurait cette aire pour base et concevons un *cône de révolution* à axe vertical dont le sommet serait le centre polaire G et dont les génératrices seraient *inclinées à 45°* sur le plan de la figure ABC.

Le moment d'inertie polaire d'un petit élément ω situé au point E, et à la distance r, a pour expression

$$j = \omega r^2.$$

Si l'on considère un petit cylindre ayant pour base ω et pour limite, en hauteur, la surface du cône, sa hauteur sera EE′ égale à r puisque le cône est à 45° et son volume v sera

$$v = \omega r.$$

Son centre de gravité étant en $\frac{h}{2}$ au milieu de la hauteur, son moment statique par rapport au plan de base sera

$$m = \frac{1}{2}\omega r^2;$$

d'où l'on tire pour le moment polaire élémentaire j de la surface ω

$$j = 2m.$$

En faisant la somme de toutes les quantités semblables relatives aux éléments de la surface ABC on voit que le moment d'inertie polaire de la surface proposée est égale au double du moment statique, par rapport au plan de la figure, de la portion de cylindre comprise entre ce plan et le cône.

Pour l'obtenir on prendra, en général, le moment statique du cylindre total ABCA′B′C′ et on en retranchera le moment du cône creux GA′B′C′.

Nous avons figuré, en dessous, en l'ombrant (fig. II) ce solide tronconique, dont le moment statique serait égal à la moitié du moment d'inertie polaire cherché.

93. **Moment d'inertie (polaire et équatorial) du cercle.** — Remarquons d'abord que le moment d'inertie équatorial du cercle est le même quel que soit le diamètre par rapport

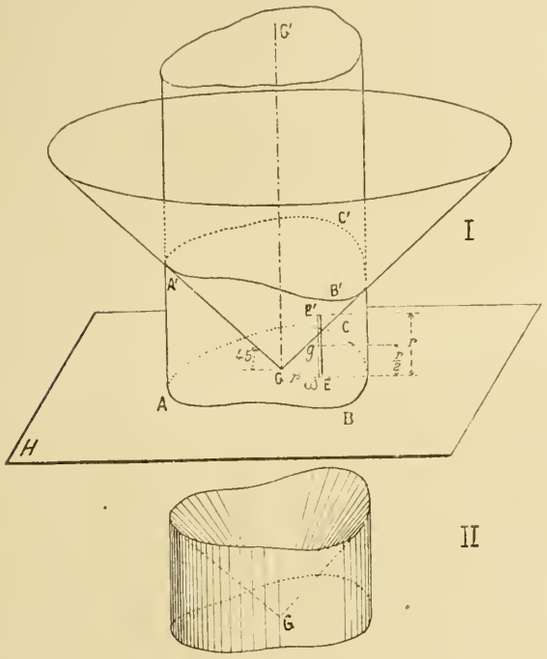


Fig. 73

auquel on le prend, et cela à cause de la symétrie absolue de la figure. On aura donc

$$I_x = I_y$$

et comme $I_x + I_y = J$.
(J étant le moment d'inertie polaire), on aura

$$I_x = \frac{1}{2} J.$$

Cherchons donc le moment d'inertie polaire du cercle.

Considérons comme nous venons de l'indiquer (v. n° 92) la couronne cylindro-conique ABCA'B'C'. En supposant que ABC soit un cercle (une nouvelle figure est inutile) le moment statique de cette couronne par rapport au plan de base est la différence des moments statiques du cylindre et du cône, tous deux de révolution, dans le cas du cercle. Or le moment statique du cylindre est

$$M_1 = \pi R^2 \times R \times \frac{R}{2} = \frac{\pi R^4}{2},$$

celui du cône est

$$M_2 = \pi R^2 \times \frac{R}{3} \times \frac{3R}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

La différence est donc :

$$M_1 - M_2 = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Par conséquent

$$J = 2 \times \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

et

$$I = \frac{J}{2} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Le rayon de giration du cercle est

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{\pi R^2}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}.$$

$$\rho = \frac{1}{2} R.$$

Son ellipse d'inertie est donc un cercle dont le rayon est moitié de celui du cercle proposé.

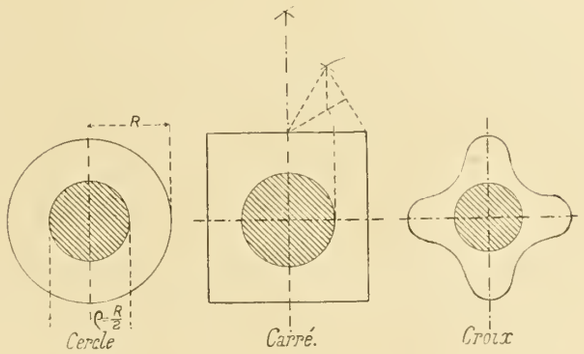


Fig. 73 *bis*

Remarque. — Toute figure telle qu'un carré, ou une croix qui aurait deux axes de symétrie égaux, aurait pour ellipse d'inertie un cercle (fig. 73 *bis*).

§ 5. — *Recherche graphique des moments d'inertie (1)

94. **Emploi des polygones funiculaires.** — Soit ABCD une surface quelconque (fig. 74). Décomposons-la, par des parallèles *gl*, *hk*,..., en éléments verticaux d'épaisseur *très petite* et égale à δ. Nous pourrons remplacer chacun des ces trapèzes élémentaires par une force proportionnelle à sa surface, ou ce qui revient au même, puisque tous ces trapèzes ont même largeur δ, par une force proportionnelle à leur hauteur, ou base moyenne, et appliquée au centre de gravité de chacun d'eux.

Construisons en *a'b'c'd'* le funiculaire de ces forces, en prenant une distance polaire *d* quelconque (2) ; le côté

(1) Tout ce paragraphe peut être passé en première lecture.

(2) On n'a pas figuré le dynamique dont ce funiculaire serait la conséquence.

initial a'l et le côté final d'l se rencontrent en un point de la verticale II′ qui contient le centre de gravité.

Cherchons le moment d'inertie de la surface par rapport à cette verticale II′.

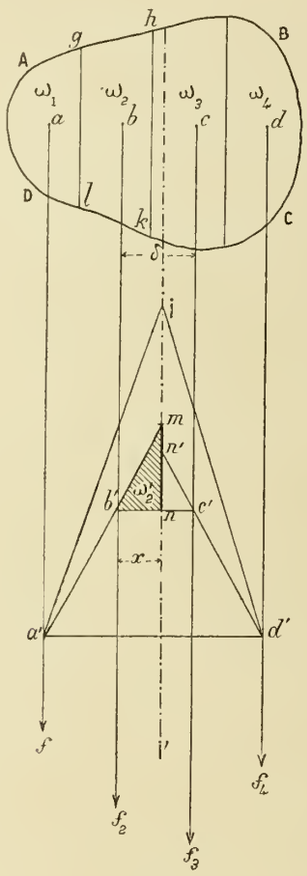


Fig. 74

Ce moment d'inertie sera égal à la somme des moments d'inertie de tous les trapèzes élémentaires tels que *ghkl* par rapport à II′.

Or nous savons d'après le théorème du centre de gravité (v. n° 76) que ce moment d'inertie élémentaire est égal au moment d'inertie du trapèze *ghkl*, par rapport à la verticale de son centre de gravité *b* (ce moment est négligeable, puisque nous supposons le trapèze infiniment mince), augmenté du moment d'inertie de toute sa surface ω_2 supposée concentrée en *b*. Cela posé :

Considérons deux côtés successifs du funiculaire, par exemple $a'b'$ et $b'c'$ et le segment *mn* qu'ils interceptent sur la verticale I.

D'après ce que nous avons vu (v. n°s 34 et 35) le segment *mn* de cette verticale représente le moment *statique* de la force f_2 par rapport au centre de gravité, à la condition de multiplier $\overline{mn}$ par la distance polaire *d* ; on a donc :

$$\overline{mn} \times d = f_2 x. \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad \overline{mn} = f_2 \times x \times \frac{1}{d}.$$

Considérons maintenant le triangle $b'mn$ qui est ombré : sa surface a pour expression

$$\omega'_2 = \overline{mn} \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} f_2 x^2 \times \frac{1}{d}.$$

Mais la force f_2 remplace le trapèze *ghkl* dont la surface ω_2 est égale à $f_2 \times \delta$;

$$\omega_2 = f_2 \delta ; \qquad \text{d'où} \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{\delta}.$$

substituons cette valeur dans l'expression de ω_2', il viendra

$$\omega'_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{d\delta} \times \omega_2 x^2$$

ou bien

$$\omega_2 x^2 = 2\omega'_2 \times d\delta.$$

Mais $\omega_2 x^2$ c'est précisément le moment d'inertie i_2 du trapèze *ghkl* par rapport à la verticale I qui passe par le centre de gravité ; nous arrivons donc à cette conclusion.

Chaque moment d'inertie partiel i_1, i_2, i_3,... des trapèzes élémentaires de l'aire donnée est proportionnel au double des aires des petits triangles extérieurs ω'_1 ω'_2, ω'_3,... du funiculaire ($d\delta$ est le coefficient de proportionnalité) ; donc le moment d'inertie total I *est égal au double de l'aire totale extérieure, a'l$d'c'b'$, comprise entre ses côtés initial et final, multipliée par le produit $d\delta$.*

Par conséquent en appelant Ω' cette aire totale extérieure prise sur le funiculaire, I le moment d'inertie de la surface, Ω l'aire de cette surface, on aura

$$I = 2\Omega' d\delta.$$

Nota. *d* est la distance polaire, et δ la largeur des trapèzes.

95. **Détermination graphique du rayon de giration.** — Si dans la construction du funiculaire précédent nous avions pris

$$d = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \Sigma f$$

l'expression du moment d'inertie aurait été

$$I = 2\Omega' \times \delta \Sigma f ;$$

mais $\delta \Sigma f$ c'est précisément la surface donnée Ω ; nous aurions donc pu écrire :

$$I = 2\Omega' \times \Omega ;$$

d'où l'on aurait déduit en appelant ρ le rayon de l'équation : $\frac{I}{\Omega}$ ou son égal ρ^2,

$$\rho^2 = \frac{I}{\Omega} = 2\Omega'.$$

Cette formule montre que : *lorsque la distance polaire est égale à la somme des forces élémentaires, la surface Ω' comprise entre le polygone funiculaire et ses côtés initial et final est égale à la moitié du carré du rayon de giration.*

Remarque. — En prenant la distance polaire *d* égale à la moitié seulement de Ωf, on aurait eu,

$$\rho^2 = \Omega',$$

ce qui pourrait présenter quelques avantages.

96. Cas où les éléments de surface ont des dimensions notables. — Dans ce que nous avons dit ci-dessus (n°s 94 et 95) nous avons supposé que les éléments trapézoïdaux suivant lesquels la surface donnée était décomposée avaient des dimensions *très petites* en largeur; proposons-nous maintenant d'étudier le cas où ces éléments ont des dimensions plus grandes.

Soit, par exemple, un trapèze ABCD (fig. 75) qui se trouve divisé par la droite BE en un triangle et en un parallélogramme. Le moment d'inertie de ce trapèze par rapport à la médiane GH est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à la même droite 1° du triangle ABE, 2° du parallélogramme BEDC.

Appliquons à ce cas la méthode indiquée au n° 94; à cet effet, aux centres de gravité O_1 et O_2 imaginons des forces f_1 et f_2 proportionnelles aux surfaces du triangle et du parallélogramme, puis construisons sur ces forces un funiculaire, et, puisque nous sommes libres de choisir la distance polaire que nous voudrons, prenons-la égale à $f_1 + f_2$.

Ainsi que nous l'avons dit (n° 94) la surface b_1c_1I du funiculaire ainsi obtenu est proportionnelle à la somme des produits des surfaces élémentaires par le carré de la distance de leur centre de gravité à l'axe GH; mais dans le cas actuel ces produits ne sont plus égaux aux moments d'inertie élémentaires.

En effet, le moment d'inertie du parallélogramme, par exemple, par rapport à l'axe GH est proportionnel au produit de la force f_2 par le carré de sa distance à l'axe GH, augmenté du moment central d'inertie du parallélogramme (v. n° 76)

$$i_2 = (f_2x_2^2 + f_2\rho_2^2) \times K = Kf_2(x_2^2 + \rho_2^2),$$

K étant un coefficient dépendant de l'échelle adoptée pour les forces, on a de même

$$i_1 = (f_1x_1^2 + f_1\rho_1^2) \times K = Kf_1(x_1^2 + \rho_1^2).$$

Pour ramener dans ce cas la recherche du moment d'inertie à celle d'une surface nous pouvons procéder ainsi qu'il suit : traçons les ellipses centrales d'inertie O_1 et O_2 des aires élémentaires; puis menons à ces ellipses, parallèlement à GH, les tangentes QR et TS; les distances de ces tangentes aux verticales O_1U et O_2F sont égales aux rayons de giration ρ_1 et ρ_2 relatifs à la direction GH.

Menons l'horizontale RS qui rencontre les verticales des points O_1 et O_2 en X et en F : En portant sur ces verticales, en XU et FN, les rayons de giration trouvés, nous aurons

$$\overline{PU}^2 = x_1^2 + \rho_1^2$$

et

$$\overline{PN}^2 = x_2^2 + \rho_2^2.$$

Si donc nous substituons aux forces f_1 et f_2 deux autres forces qui leur soient égales et parallèles, mais qui soient placées par rapport au point P à des distances

$$PV = PU = \sqrt{x_1^2 + \rho_1^2}$$

et

$$PL = PN = \sqrt{x_2^2 + \rho_2^2}$$

en construisant sur ces forces un nouveau funiculaire avec la distance polaire précédemment adoptée, la surface $b'_1c'_1$I'I ainsi obtenue sera proportionnelle au moment d'inertie cherché et si, comme nous l'avons fait dans la fig. 75, on a eu soin de prendre la distance polaire égale à la somme des forces, la surface mesurée sur le funiculaire est précisément égale à la moitié du carré du rayon de giration. (V. n° 95.)

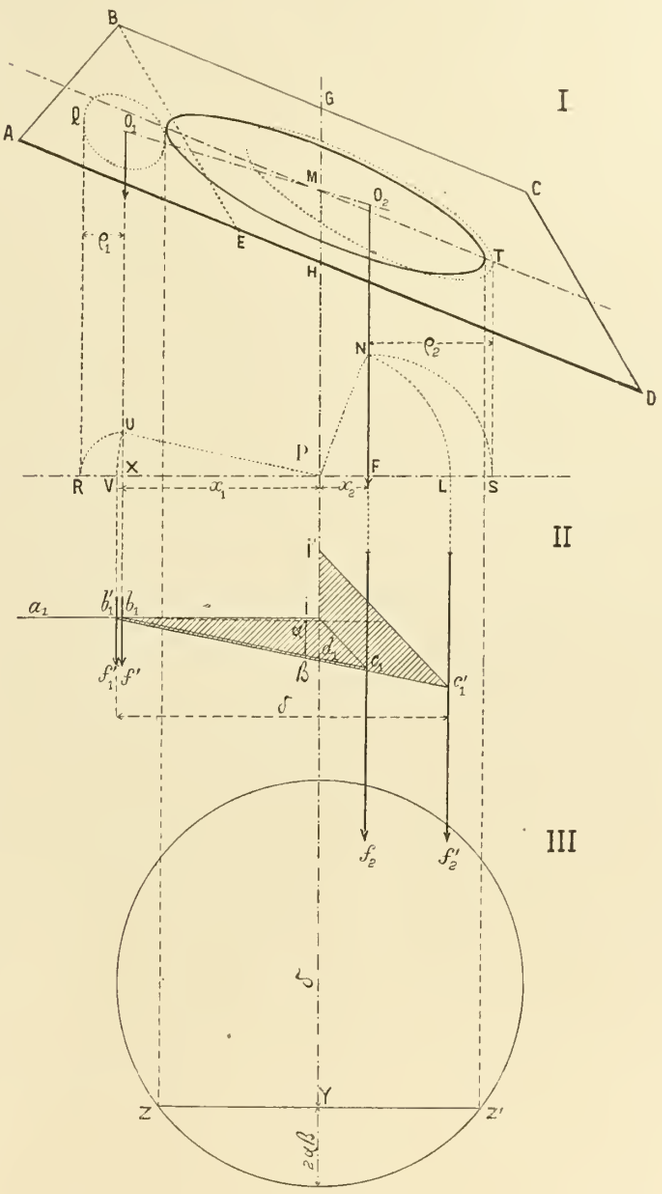


Fig. 75

Nous avons évalué la surface b'_1c_1I'I par la méthode de M. Collignon (v. n° 52), cette surface est égale au produit des longueurs

$$\overline{\alpha\beta} \times \delta \quad \text{(voir } \delta \text{ et } \overline{\alpha\beta} \text{ sur la fig. 75)},$$

le rayon de giration est donc

$$R = \sqrt{2\overline{\alpha\beta} \times \delta}$$

Pour le construire portons bout à bout sur la verticale GH la longueur $2\overline{\alpha\beta}$ et à la suite la longueur δ;

Décrivons une circonférence sur la somme de ces longueurs comme diamètre puis, par le point Y, menons l'horizontale ZZ' ; la longueur YZ sera égale au rayon de giration.

On peut achever le tracé de l'ellipse en construisant le rayon de giration répondant à la direction parallèle à AD, rayon de giration dont nous avons donné la valeur au n° 91, et en remarquant que les directions AD et GH sont celles de deux diamètres conjugués de l'ellipse centrale d'inertie.

On aura donc deux diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie, ce qui permettra de la tracer (v. Ct).

97. **Application (1). — Recherche du moment d'inertie d'un profil de rail à patin. — (*a*) Constructions préalables.** — Soit ABC (fig. 76) un profil de rail dont nous

(1) Nous donnons cette application à titre d'exemple des ressources que présente la statique graphique. Le lecteur pourra passer cette application dans une première lecture, ainsi, du reste, que tout ce paragraphe 5.

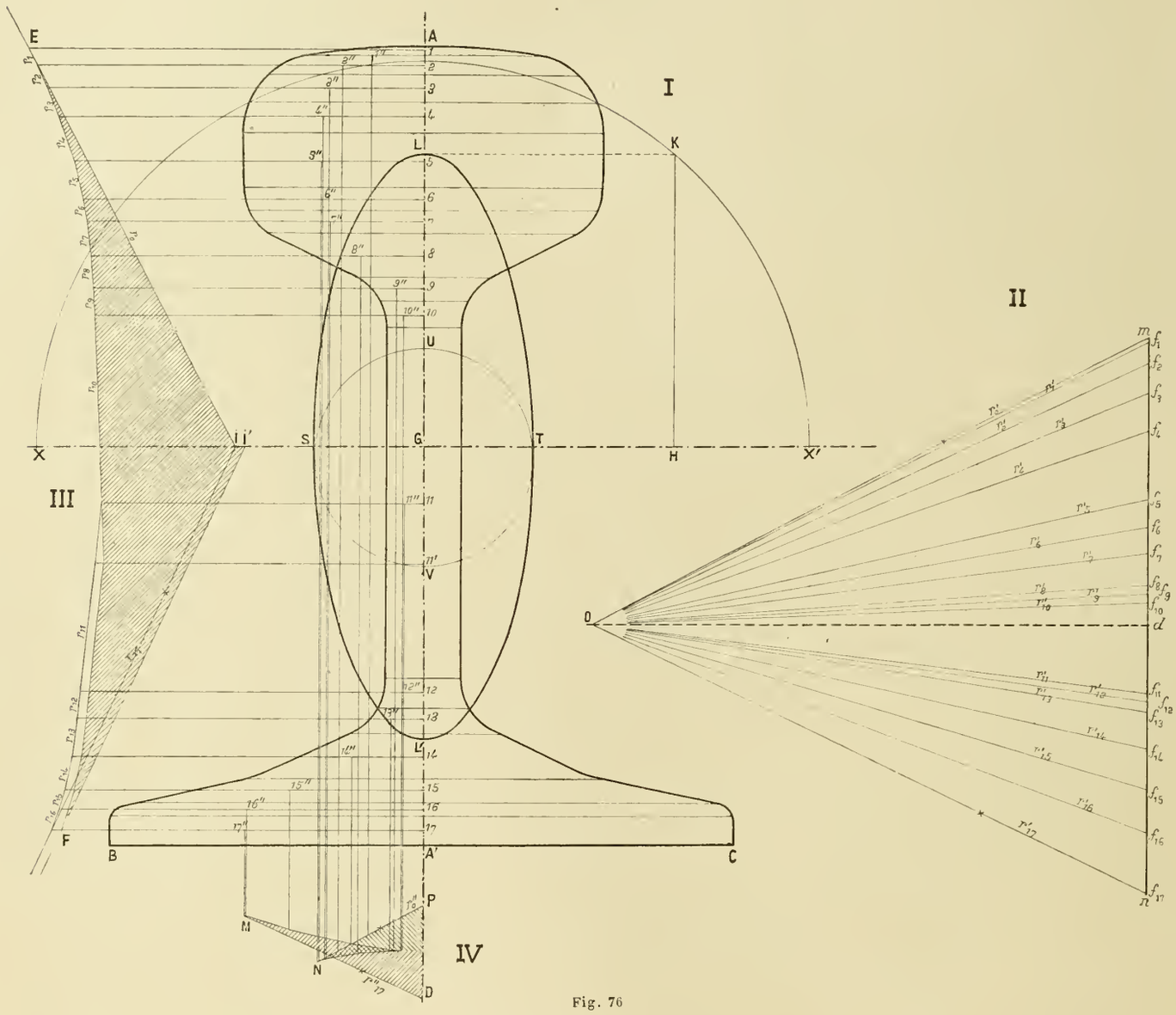


Fig. 76

voulons trouver le moment d'inertie, ou mieux, dont nous désirons déterminer l'ellipse centrale d'inertie, afin de pouvoir ensuite obtenir le moment d'inertie du profil répondant à une direction quelconque.

Nous pouvons dire, *a priori*, qu'en raison de la symétrie de la figure ABC par rapport à la droite AA', cette droite contiendra le centre de gravité du profil et de plus sera un axe principal d'inertie.

Décomposons la surface donnée en tranches horizontales assez petites pour que les segments qu'elles interceptent sur

le contour puissent, sans erreur sensible, être assimilés à des droites; et, aux centres de gravité 1, 2, 3,....., 17 de ces tranches, imaginons des forces horizontales $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{17}$ proportionnelles à leur surface. Nous pouvons remarquer, en passant, que les centres de gravité 1, 2, 3,....., 17 sont tous situés sur l'axe AA′ et qu'ils occupent très sensiblement le milieu de la hauteur des tranches, car celles-ci diffèrent peu de rectangles qui auraient pour base l'horizontale moyenne.

(*b*) **Recherche du centre de gravité.** — Nous commencerons par déterminer le centre de gravité de l'aire ABC et, pour cela, nous emploierons la méthode que nous avons indiquée au n° 67; nous construirons (III) un funiculaire sur les forces $f_1 f_2 \ldots f_{17}$ et la rencontre du côté initial et du côté final de ce funiculaire nous donnera un point de l'horizontale contenant le centre de gravité G cherché; ce centre de gravité, devant en outre se trouver sur la verticale AA′, sera placé à l'intersection de ces deux droites.

Dans la fig. 76 (III), pour obtenir le funiculaire dont nous venons de parler nous avons employé le dynamique *omn* (fig. II) dont les forces sont verticales c'est-à-dire perpendiculaires aux forces $f_1 f_2 \ldots f_{17}$; cela semble en désaccord avec ce que nous avons fait jusqu'à présent; mais pour en déduire le funiculaire (III) au lieu de mener des parallèles à ses rayons polaires nous leur avons mené des perpendiculaires. Le résultat est donc le même que si, après avoir construit le dynamique comme à l'ordinaire et ainsi que nous l'avons indiqué (v. n° 25), et après avoir tracé d'après lui le funiculaire, nous avions fait tourner ce dynamique d'un angle de 90° autour de son pôle pour l'amener dans la position *omn*.

Dans le cas actuel nous avons agi ainsi à cause du manque de place et aussi parce que ce dynamique (II) nous servira pour le funiculaire (IV) dont nous parlerons plus loin. Pour celui-ci, il sera dans la position ordinaire.

Remarquons aussi, en passant, que d'après le conseil que nous avons donné aux n°s 94 et 95, la distance polaire O*d* de ce dynamique a été prise égale à *mn* c'est-à-dire à la somme des forces $f_1 f_2 \ldots f_{17}$.

Le funiculaire $r_0 r_1 r_2 \ldots r_{17}$ qui est résulté de notre dynamique nous donne en I, à l'intersection du côté initial r_0 et du côté final r_{17}, un point de l'horizontale du centre de gravité cherché, ce point est donc en G.

(*c*) **Grand axe de l'ellipse d'inertie.** — Il s'agit maintenant de trouver le rayon de giration. Pour cela nous allons nous servir du funiculaire que nous venons de tracer, mais en le modifiant un peu pour tenir compte, comme nous l'avons fait au n° 96, du théorème du centre de gravité (v. n° 76). Indiquons cette modification.

Si nous désignons par $y_1 y_2 y_3 \ldots y_{17}$ les distances de chacun des points 1, 2, 3,....., 17 au centre de gravité G et par $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{17}$ les rayons de giration de chacune des tranches correspondantes, par rapport à la direction XX′, nous devrons déplacer les points d'application des forces $f_1 f_2 f_3 \ldots f_{17}$ de manière que leurs nouvelles distances au point G soient $\sqrt{y_1^2 + \rho_1^2}$, $\sqrt{y_2^2 + \rho_2^2} \ldots$, etc.

En opérant de cette façon, le nouveau point d'application de la force f_{11} vient en 11′, mais pour toutes les autres forces le nouveau point d'application tombe, graphiquement, sur l'ancien, car la petitesse des hauteurs des trapèzes élémentaires, autres que le trapèze du milieu, fait que les différences ne sont pas appréciables.

Les nouvelles lignes d'action des forces seront donc les horizontales des points 1, 2, 3,..., 10 — 11′ — 12,..., 17, et le funiculaire qui en résulte, en nous servant comme précédemment du dynamique *omn*, est le polygone IEFI′ que nous avons couvert de hachures.

D'après l'observation faite au n° 95, puisque la distance polaire du dynamique est égale à la somme des forces, la surface du polygone hachuré est égale, numériquement, à la moitié du carré du rayon de giration.

Evaluons la surface de ce polygone par l'un des moyens indiqués au ch. IV. En remplaçant le polygone par un triangle équivalent, nous avons trouvé que la base de ce triangle est égale à HX (fig. 1) et sa hauteur à HX′. Le double de la surface du triangle équivalent est donc XH × HX′. Portons bout à bout sur l'horizontale XX′ du centre de gravité G la longueur XH de la base du triangle équivalent et dans le prolongement celle HX′ de sa hauteur; puis, traçons sur XX′, comme diamètre, une demi-circonférence; élevons la verticale du point H; l'intersection de cette verticale avec la circonférence donnera en HK la longueur du rayon de giration, puisqu'on a

$$XH \times HX' = \overline{HK}^2.$$

Portons cette longueur sur la verticale AA′ de chaque côté du centre de gravité G et nous aurons en L et L′ les deux extrémités du grand axe de l'ellipse d'inertie.

(*d*) **Petit axe de l'ellipse d'inertie.** — Pour déterminer l'axe horizontal, ou petit axe, de la même ellipse, nous procéderons d'une manière analogue. Nous nous servirons encore de la division du profil en tranches horizontales; mais, en raison de la symétrie du contour du rail, nous ne considérerons que la moitié des tranches élémentaires situées à gauche de la verticale AA′.

Nous supposerons qu'en chacune de ces demi-tranches est appliquée une force verticale proportionnelle à sa surface. Le dynamique de ces forces est d'ailleurs tout tracé; c'est celui qui nous a déjà servi en *omn* (fig. II); quant aux points d'application de ces forces, nous ne les placerons pas sur les centres de gravité élémentaires; nous les supposerons à des distances x' de la verticale AD données par l'expression générale (v. n° précédent).

$$x' = \sqrt{x^2 + \rho'^2},$$

x étant l'abscisse du centre de gravité d'une demi-tranche

horizontale, et ρ' son rayon de giration relatif à une droite parallèle à AA′ et qui passerait en son centre de gravité.

En assimilant à des rectangles ces tranches élémentaires, cela revient à prendre pour abscisse x' des points d'application des forces

$$x' = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad (^1)$$

a étant la largeur moyenne d'une tranche quelconque. Nous obtenons ainsi les points $1''$, $2''$, $3''$, ..., $17''$.

Sur les verticales de ces points, comme ligne d'action des forces $f_1''f_2''\ldots\ldots f_{17}''$ et à l'aide du dynamique *omn* (fig. III) nous construirons le funiculaire PMND (fig. IV) dont la surface nous fera connaître le rayon de giration du demi-profil de rail relatif à l'axe AA′.

Sur la fig. 76, nous avons couvert de hachures la surface de ce funiculaire, en mettant des hachures croisées sur les surfaces qu'il faut compter deux fois.

Le profil complet ABC a un moment d'inertie double de la valeur du moment d'inertie de sa moitié ABA′ par rapport à l'axe AA′; mais, je dis, en outre, que les rayons de giration de ces deux surfaces par rapport au même axe AA′ sont égaux.

En effet, désignons par Ω la surface totale ABC, par I son moment central d'inertie et par R le rayon de giration correspondant, on aura

$$R = \frac{I}{\Omega}.$$

L'aire de la demi-surface ABA′ sera $\frac{\Omega}{2}$; son moment d'inertie par rapport à AA′ sera $\frac{I}{2}$ et enfin son rayon de giration correspondant R′ aura pour expression

$$R' = \frac{I}{2} : \frac{\Omega}{2} = \frac{I}{\Omega} = R. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de cette remarque que la surface du funiculaire MDDN est précisément égale à la moitié du carré du rayon de giration de la surface totale ABC.

Pour construire ce rayon de giration, remplaçons l'aire MPDN par un triangle de surface équivalente. Portons la base de ce triangle de G en V, sa hauteur de G en U, puis décrivons une circonférence sur UV comme diamètre, l'ordonnée GT de cette circonférence sera le rayon de giration cherché ; la corde ST sera le petit axe de l'ellipse d'inertie : connaissant les deux axes, on tracera facilement l'ellipse (²).

(1) *Note* 1. — Pour démontrer cette formule reportons-nous au n° 85. On y voit que pour un rectangle de largeur horizontale a on a comme distance x de son centre de gravité au coté vertical

$$x = \frac{a}{2},$$

tandis que le rayon central de giration correspondant est

$$\rho' = \frac{a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par conséquent on aura

$$x'^2 = x^2 + \rho'^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}, \qquad \text{d'où}$$

$$x' = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ldots a.$$

(2) *Note* 2. — Cette discussion montre que dans tous les cas analogues à celui-ci, c'est-à-dire lorsque l'on aura décomposé en petits rectangles la partie de l'aire située d'un côté d'une droite passant par le centre de gravité, on prendra pour points d'application des forces fictives proportionnelles aux surfaces de ces petits rectangles les points $1''$, $2''$, $3''$ . . . $17''$ situés, non pas à la moitié des largeurs, mais aux 0,577... de ces largeurs. Le lieu géométrique de ces points donnerait une courbe qui serait une réduction, en largeur et dans le rapport constant 0,577, du contour de l'aire dont on cherche le moment d'inertie. La surface extérieure du funiculaire construit sur ces forces fictives, sera proportionnelle au carré du rayon de giration cherché.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE
(Statique graphique).

DEUXIÈME PARTIE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

CHAPITRE PREMIER

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX DE DÉFIGURATION

§ 1. — Hypothèses sur la constitution des corps

98. **Constitution des matériaux de construction.** — Les matériaux de construction sont, en général, des corps solides, c'est-à-dire des corps qui opposent une résistance appréciable et plus ou moins grande aux défigurations qu'on veut leur faire subir.

Bien que la constitution des corps (solides, liquides ou gazeux) soit loin d'être complètement connue, on peut expliquer les faits que nous aurons à étudier en faisant certaines hypothèses, et nous pouvons dire que tout se passe comme si ces hypothèses étaient l'expression de la réalité.

99. **Molécules. — Equilibre moléculaire.** — Tout se passe comme si la matière était formée d'éléments extrêmement petits et indivisibles appelés *molécules ;* le moindre grain de poussière impalpable en contiendrait un nombre considérable. On suppose que ces molécules sont placées les unes par rapport aux autres à des distances qui sont très grandes si on les compare à leurs dimensions propres ; elles forment une sorte de réseau, dont la limite est précisément la surface extérieure du corps considéré.

Tout se passe comme si les molécules étaient douées de *forces répulsives* qui leur seraient propres et qui tendraient à les écarter, (ces forces variant en raison inverse du carré de la distance) et si, en outre, ces molécules étaient soumises à des *forces attractives* qui tendraient à les rapprocher.

Lorsque les forces attractives et les forces répulsives sont en équilibre, les molécules restent à des distances respectives fixes, et l'on dit qu'il y a *équilibre moléculaire.*

D'où proviennent ces forces attractives? ne seraient-elles pas dues à une sorte de poussée produite sur elles par une atmosphère indéfinie, composée d'atomes plus petits encore que les molécules du corps considéré? c'est ce que nous n'avons pas la prétention de résoudre ici.

100. Modifications de l'équilibre moléculaire. — L'équilibre moléculaire peut être modifié par la chaleur et par les forces extérieures.

La chaleur agit le plus souvent sur les corps en amplifiant les distances intra-moléculaires et, par suite, en augmentant les dimensions extérieures des corps.

Les forces extérieures, lorsqu'elles sont appliquées à un corps solide et qu'elles le laissent en équilibre statique, se font équilibre, c'est-à-dire se neutralisent, sur ce corps ; mais cette neutralisation a lieu par l'intermédiaire des molécules dont les positions relatives changent jusqu'à ce qu'une nouvelle position d'équilibre moléculaire soit prise par elles.

On peut se rendre compte, approximativement, de ce phénomène en imaginant une série de petites boules placées aux sommets de cubes contigus les uns aux autres (fig. 77). Des ressorts à boudins relient les boules qui représentent ici les

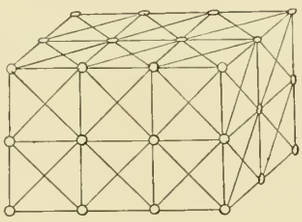


Fig. 77

molécules ; ils les relient non seulement suivant les côtés des cubes, mais encore suivant toutes les diagonales ; on conçoit alors que le moindre effort exercé sur une des boules mettra en jeu tous les ressorts; les uns seront comprimés, les autres seront étirés ; le premier état d'équilibre sera remplacé par un autre auquel répondra une autre forme extérieure du solide.

101. Différents états d'équilibre moléculaire. — L'équilibre moléculaire d'un corps peut être *stable*, *indifférent* ou *instable*.

L'équilibre est *stable* lorsqu'une force extérieure ayant modifié la forme d'un corps, celui-ci reprend son état primitif après que la force aura cessé d'agir. C'est cette propriété qui caractérise les corps dits *élastiques*.

L'équilibre est *indifférent* lorsque la déformation persiste après la suppression de la cause. Cet état caractérise les corps *mous* et *plastiques*. Telle est la terre glaise ou la cire.

L'équilibre est *instable* lorsque la moindre force rompt tout équilibre; le corps change alors de nature. Tels sont les corps détonnants, certains verres trempés comme les larmes bataviques.

En réalité il n'y a de corps ni parfaitement élastiques, ni parfaitement mous.

Les solides naturels se classent tous entre ces deux types extrêmes : l'élasticité de la matière est très grande, presque absolue chez quelques-uns, comme l'acier; elle est très petite, presque nulle chez d'autres, comme la cire.

Nous verrons bientôt comment se comportent les corps soumis à l'action de forces extérieures et dans quelles limites ils conservent *sensiblement* leurs propriétés élastiques.

102. Hypothèses simplificatrices. — Le problème qui consisterait à trouver la répartition des efforts moléculaires sous l'action des forces extérieures serait extrêmement compliqué si l'on n'avait fait, sur la manière dont se comportent les corps solides, certaines hypothèses, permettant de simplifier les calculs

Ces hypothèses ont entraîné des conséquences que l'expérience a contrôlées un assez grand nombre de fois pour nous donner confiance en elles et pour nous engager à les considérer comme suffisamment exactes.

Ces hypothèses simplificatrices sont :

1° L'hypothèse des fibres élastiques longitudinales ou, pour abréger : *hypothèse des fibres* ;

2° L'hypothèse de la conservation plane des sections transversales ou, pour abréger encore : *hypothèse des plateaux*.

103. Hypothèse des fibres. — Une fibre, pour nous, sera une succession de molécules disposées en ligne droite : un fil de caoutchouc en donne une idée assez nette ; nous pourrions encore assimiler une fibre à un petit ressort à boudin ; si nous tirons ce ressort il s'allonge, si nous le comprimons il se raccourcit ; mais dans les deux cas il tend à revenir à sa longueur primitive ; les allongements et les accourcissements qu'il prend sont proportionnels aux efforts développés.

L'hypothèse des fibres peut s'énoncer comme suit :

« Les corps sont formés par la réunion de fibres élastiques « dirigées suivant la longueur de la pièce. »

Les organes de construction ont presque toujours une dimension qui l'emporte sur les autres; telle est, par exemple, une pièce de bois, une poutre de fer, et même un arc que nous considérerons souvent comme un prisme élastique, sans attacher au mot prisme la signification rigoureuse qu'on lui donne en géométrie.

Mais dans ces pièces longues, considérées comme constituées par la réunion de fibres, ces fibres ne seront pas supposées indépendantes les unes des autres comme seraient, par exemple, les fils d'un écheveau ; tout se passe comme si ces fibres étaient agglutinées latéralement, de telle sorte que l'allongement de l'une entraîne, dans une certaine mesure, l'allongement des fibres voisines.

L'hypothèse des plateaux va nous indiquer dans quelle mesure se fait cet entraînement latéral.

104. Hypothèse de la conservation plane des sections

transversales. — (*a*) **Définitions.** — Il convient d'abord de fixer d'une manière nette ce que nous entendrons par *sections transversales* d'une pièce.

Si nous considérons un prisme géométrique MNPQ (fig. 78), les sections droites de ce prisme, telles que *ab*, seront des *sections transversales*.

Si la pièce est limitée par deux cercles concentriques, la section droite *ab* (fig. 79), qui prolongée passe par le centre, sera une section transversale. Remarquons que les angles α et β que forme cette section avec les deux cercles, c'est-à-dire avec leurs tangentes en *a* et *b*, sont égaux, et chacun d'eux vaut, ici, un droit.

Fig. 78 Fig. 79 Fig. 80

Enfin la si pièce est quelconque, comme celle qui est représentée fig. 80, nous appellerons, par analogie, sections transversales toutes celles qui rencontreront le dessus et le dessous de la pièce suivant des angles égaux et de sens contraire (1).

Nous désignerons souvent les sections transversales ainsi obtenues sous le nom de *plateaux*.

Les centres de gravité I de tous ces plateaux forment une ligne que l'on nomme l'*axe longitudinal*, ou *fibre neutre*, ou encore *fibre moyenne de la pièce*.

Souvent les plateaux seront normaux à l'axe longitudinal, ou fibre neutre; nous aurons alors des *sections normales*.

Ces définitions étant arrêtées, voici l'énoncé de la 2e hypothèse simplificatrice.

(*b*) **Hypothèse des plateaux.** — « La solidarisation des « fibres est réglée de telle sorte que les points de ces fibres, « situés sur une même section plane normale à la fibre « neutre, restent encore, après la défiguration, sur un plan « qui sera, lui aussi, normal à la fibre neutre, après sa « défiguration. »

Ces deux hypothèses, nous le répétons, n'ont rien d'absolu; mais les conséquences qu'on en tire sont assez rapprochées des résultats de l'expérience pour qu'on puisse les adopter avec sécurité.

(*c*) **Solide schématique. — Bi-plateaux.** — Le Conservatoire des arts et métiers a fait construire par M. Digeon, pour mettre en évidence cette double hypothèse des fibres et des plateaux, un solide schématique combiné comme suit :

Son élément se compose de deux planchettes rectangulaires A et B (fig. 81) réunies par vingt ressorts à boudin

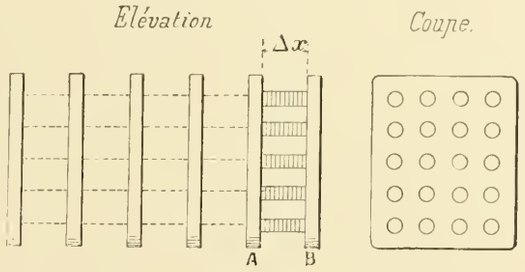


Fig. 81

d'égale force. Cet ensemble constitue ce que nous nommerons un *bi-plateau*; la distance entre les deux plateaux, c'est-à-dire l'épaisseur du bi-plateau, sera désignée par Δx. En groupant ainsi plusieurs bi-plateaux on a réalisé un *schéma* de solide élastique à l'aide duquel il a été facile de faire comprendre à un auditoire les effets de la traction, du glissement, de la flexion et de la torsion.

Si l'on soumet le système ainsi constitué à un effort quelconque, les ressorts, qui représentent ici les fibres du prisme, s'allongent ou se raccourcissent ; mais les points de ces fibres, qui se trouvaient fixés aux plateaux avant l'application de l'effort, y restent encore fixés après; autrement dit : la section, qui était plane avant la défiguration, reste encore plane après que celle-ci a été produite.

(1) M. d'Ocagne nomme ces sections des sections *isogonales*.

§ 2. — Analyse des phénomènes généraux de défiguration

105. **Déplacement le plus général d'une section.** — Lorsque des forces agissent sur un prisme élastique, elles le défigurent, d'une manière plus ou moins simple, et chaque section plane passe d'une position à une autre. Mais, quelque complexe que soit le mouvement imprimé à une section par la défiguration du solide, on peut toujours le considérer comme la résultante de quatre mouvements simples, ainsi que nous allons le montrer.

Considérons dans un prisme élastique, dont l'axe longitudinal est OX (fig. 82), ce que nous avons nommé un *plateau*, c'est-à-dire une section transversale qui restera plane avant comme après la défiguration ; supposons que cette section soit un rectangle et désignons par *abcd* (fig. 82) les angles de ce rectangle. Soient *a'b'c'd'* les positions de ces mêmes angles après la défiguration et enfin soit O' le point de rencontre de la section transversale *a'b'c'd'* avec le nouvel

axe longitudinal OO′ de la pièce. Nous pourrons toujours amener le plateau considéré de la position initiale *abcd* à la position finale *a′b′c′d′* à l'aide de quatre mouvements successifs que nous allons analyser.

106. **Décomposition de ce déplacement.** — (*a*) **1er Mouvement. — Translation longitudinale; traction ou compression.** — Nous pouvons d'abord déplacer *abcd* par une translation, de manière que le point O vienne en O_1 (fig. 83), O_1 étant le pied de la perpendiculaire $O'O_1$ abaissée de O′

Fig. 82

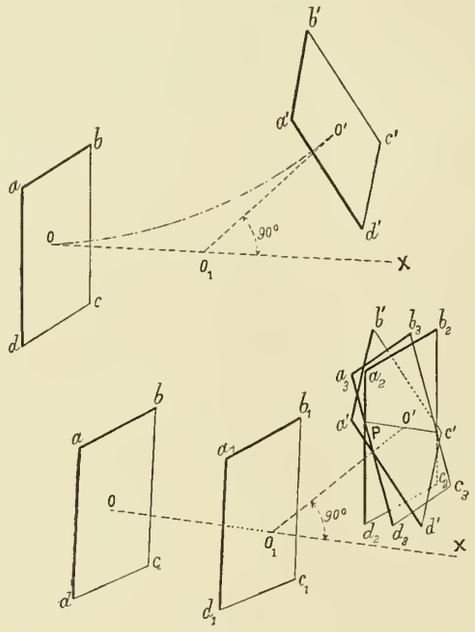


Fig. 83

sur OX. Dans ce mouvement, tous les points de la section *abcd* ont parcouru des chemins égaux, parallèles entre eux et *parallèles* à l'axe OX, comme si le prisme avait été allongé ou raccourci de la longueur OO_1.

(*b*) **2e Mouvement. — Translation transversale ou tranchage** *ou encore* **glissement.** — Par un deuxième mouvement, on peut amener ensuite le centre de gravité O_1 du plateau à coïncider avec le point O′. Tous les points du plateau $a_1b_1c_1d_1$ décrivent des chemins égaux, parallèles entre eux et *perpendiculaires* à l'axe primitif de la pièce. Ils passent de la position $a_1b_1c_1d_1$ à la position $a_2b_2c_2d_2$.

(*c*) **3e Mouvement. — Rotation transversale ou flexion.** — Après le deuxième mouvement, les deux rectangles $a_2b_2c_2d_2$ et *a′b′c′d′*, qui est le rectangle dans la position définitive à laquelle on veut arriver, ont un point commun O′; ils se coupent donc suivant une ligne droite PO′. Si l'on fait maintenant tourner le plateau $a_2b_2c_2d_2$ autour de cette droite comme charnière, on pourra amener à coïncider les deux plans $a_2b_2c_2d_2$ et *a′b′c′d′*. Dès lors, les deux sections transversales auront maintenant même centre O′ et même plan, mais leurs sommets seront différents. Dans ce mouvement, tous les points de la section $a_2b_2c_2d_2$ décriront des arcs de cercles $a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 - d_2d_3$ autour de l'axe PO′ comme charnière. C'est un mouvement de *flexion*.

(*d*) **4e Mouvement. — Rotation axiale ou torsion.** — Enfin, par une rotation autour d'un axe passant par O′ et *perpendiculaire* au plan définitif *a′b′c′d′*, on amènera les sommets $a_3b_3c_3d_3$ à coïncider avec les sommets définitifs *a′b′c′d′*. Dans ce mouvement, le prisme éprouvera ce que l'on nomme une *torsion*.

Ainsi donc un plateau peut passer d'une position *abcd* à une autre *a′b′c′d′*, en obéissant à quatre mouvements élémentaires successifs qui sont :

Une translation longitudinale (*traction ou compression*) ;
Une translation transversale (*tranchage, glissement*) ;
Une rotation transversale (*flexion*) ;
Une rotation axiale (*torsion*).

107. **Défiguration générale d'un prisme élastique.** — (*a*) **Décomposition du prisme en bi-plateaux.** — Pour étudier la défiguration générale d'un prisme élastique, nous supposerons que ce prisme est divisé en une infinité de bi-plateaux par des sections transversales infiniment voisines les unes des autres. Chacune d'elles se déplacera infiniment peu de sa position primitive au moyen des quatre mouvements dont nous venons de parler.

Ces quatre mouvements élémentaires sont, bien entendu, absolument fictifs. Ce qui est indiscutable, c'est le résultat final de la défiguration qui est le même que si chaque plateau avait pris, *successivement*, les quatre mouvements étudiés plus haut, tandis qu'en réalité ces mouvements s'exécutent *simultanément*.

(*b*) **Forces et couples produisant chaque défiguration élémentaire.** — Or, un mouvement ne peut se produire de lui-même, et nous savons que toute cause de mouvement s'appelle une *force*. Le changement de position de chaque section du prisme élastique est donc causé par une force (ou par un groupe de forces), dont les directions et les intensités seraient difficiles à trouver si l'on ne considérait pas les quatre mouvements élémentaires fictifs que nous venons d'analyser.

Ces quatre mouvements pourront être considérés comme produits par quatre forces (ou groupes de forces) que l'on pourra substituer aux causes réelles du mouvement ; voyons ce que seront ces forces.

Nous savons que toute force appliquée au centre de gravité d'un corps ne peut imprimer à celui-ci qu'un mouvement de *translation* parallèle à la direction de la force ; on sait aussi que tout couple appliqué à un corps ne peut lui donner qu'un mouvement de *rotation* autour d'un axe qu'on peut toujours faire passer par son centre de gravité.

Nous pouvons donc considérer toute translation d'un corps comme étant due à une force agissant au centre de

gravité de ce corps et toute rotation comme étant due à un couple.

Dès lors, les quatre mouvements que nous avons analysés ci-dessus peuvent être considérés comme produits de la manière suivante :

1° La *translation longitudinale* sera produite par une force appliquée au centre de gravité de la section transversale et dans le sens des fibres longitudinales. Si pendant le mouvement les fibres sont allongées, on dit qu'il y a *traction;* si elles sont raccourcies, il y a *compression ;* la force qui produit ce résultat est un *effort tirant* (nous lui donnerons le signe moins) ou un *effort comprimant* (nous lui donnerons le signe plus).

2° La *translation transversale* pourra être produite par une force unique, perpendiculaire à l'axe ; on lui donne le nom d'*effort tranchant;* elle tend à cisailler le prisme.

3° La *rotation transversale*, laquelle se fait autour d'une droite située dans le plan du plateau et que nous avons nommée une *flexion*, pourra être produite par un couple qu'on désigne sous le nom de *couple* ou de *moment fléchissant*.

4° La *rotation axiale*, qui se fait autour de l'axe de la pièce et que nous avons nommée une *torsion* de cette pièce, pourrait être due à un couple qui a reçu le nom de *couple* ou *moment tordant*.

108. **Réactions moléculaires.** — Telles seraient les causes (forces ou couples) des quatre mouvements élémentaires. Examinons maintenant comment se comportent les fibres élastiques sous l'action de ces efforts.

Pendant le premier mouvement, les fibres sont allongées ou raccourcies; en vertu de leur élasticité, elles tendent à reprendre leur première longueur ; elles *réagissent* donc et développent un *effort de traction* ou un *effort de compression* qui n'est que la réaction de l'effort tirant ou de l'effort comprimant. Il lui est égal et directement opposé.

Pendant le deuxième mouvement, chaque fibre prend une forme sinueuse (fig. 84), en vertu de laquelle elle est allongée et courbée ; elle tend à revenir à sa position première en développant une réaction à l'effort tranchant, réaction que nous appellerons l'*effort de tranchage*.

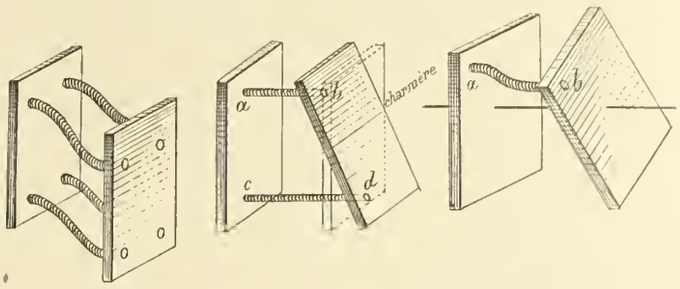


Fig. 84 Fig. 85 Fig. 86

Pendant le troisième mouvement, celui de flexion, certaines fibres, telles que *cd*, sont allongées; d'autres, telles que *ab*, sont raccourcies (fig. 85) ; les réactions qu'elles développent sont donc les mêmes que celles que nous avons examinées plus haut : ce sont des efforts de traction et de compression; mais l'ensemble de toutes ces forces donne lieu à un couple que nous nommerons *le couple ou moment de flexion*. Nous démontrerons plus loin l'existence de ce couple.

Enfin, dans le quatrième mouvement, celui de torsion (fig. 86), les fibres produiront une réaction que nous appellerons le *couple ou moment de torsion ;* il est la réaction moléculaire du couple tordant.

109. **Résumé.** — Tout mouvement d'un plateau par rapport au plateau infiniment voisin, qui forme avec lui ce que nous avons nommé un *bi-plateau*, peut être ramené à quatre mouvements élémentaires, produits par les efforts consignés au tableau ci-après et donnant lieu aux réactions moléculaires inscrites en regard :

Mouvement élémentaire	Produit par une action extérieure qui se nomme :	Donne lieu à une réaction moléculaire qui se nomme :
Translation longitudinale. { Traction ou Compression.	{ Effort tirant (—) ou Effort comprimant (+).	Effort { de traction ou de compression.
Translation transversale. { Tranchage. Glissement.	Effort tranchant.	Effort de tranchage.
Rotation transversale. { Flexion.	{ Couple ou moment { fléchissant.	Couple ou moment { de flexion.
Rotation axiale. { Torsion.	{ Couple ou moment { tordant.	Couple ou moment { de torsion.

§ 3. — Équilibre statique et équilibre moléculaire d'un organe de construction

110. Effets et équilibre statiques. — Ces hypothèses simplificatrices une fois admises, voyons comment, étant donné un prisme élastique faisant partie d'une construction dont il sera l'un des organes, nous pourrons étudier sur lui l'action des forces qui l'attaquent.

Le prisme élastique que nous considérons sera soumis à des forces d'action et de réaction (v. plus loin n° 112) produisant : 1° des effets et un équilibre statiques ; 2° des effets et un équilibre moléculaires.

Les effets statiques seront ceux qui s'observeront sur la masse entière de l'organe ; l'équilibre statique sera réalisé lorsque l'organe tout entier restera en repos. Ainsi, par exemple, le voussoir d'une voûte qui tient est en équilibre statique ; les forces extérieures qui lui sont appliquées (pesanteur, réaction des voussoirs voisins) se font équilibre sur lui.

111. Effets et équilibre moléculaires. — Au contraire, les effets moléculaires se produisent dans la masse intime de l'organe. Lorsque plusieurs forces se font équilibre sur un organe, elles n'agissent pas toujours également sur toutes ses parties ; mais si ces forces ne sont pas exagérées, si le déplacement qu'elles imposent aux molécules les plus éprouvées est compatible avec la résistance de la matière, si cette matière ne se désagrège pas sous l'action des forces, nous dirons qu'il y a *équilibre moléculaire*.

Il peut se faire que cet équilibre moléculaire soit réalisé dans une section, mais ne le soit pas dans une autre, et même qu'étant réalisé pour une fibre d'un *bi-plateau*, il ne le soit pas pour une autre fibre de ce même *bi-plateau*. On est donc obligé d'étudier l'équilibre moléculaire section par section, et même fibre par fibre. Dans cette étude on procédera comme il suit :

112. 1re Opération. — Vérification ou recherche de l'équilibre statique. — (*a*) Classification des forces extérieures. — Un organe quelconque (voussoir, poutre, arc,... etc.) appartenant à une construction et restant au repos, c'est-à-dire en équilibre statique, est soumis à l'action de forces extérieures qui se neutralisent sur lui.

Ces forces extérieures se divisent en *forces indépendantes* ou : *actions*, et en *forces dépendantes* ou : *réactions*.

(*b*) **Actions.** — Les forces d'action sont celles que nous appliquons directement à l'organe, celles que cet organe a pour fonction immédiate d'équilibrer.

Dans une poutre de pont, par exemple, les forces d'action comprennent les charges permanentes et les surcharges accidentelles ; dans les premières on peut placer le poids propre de la poutre et le poids de la chaussée ; dans les secondes on placerait le poids des véhicules, le poids d'une foule circulante, etc...

(*c*) **Réactions des obstacles.** — Sous l'influence de ces forces d'action, le corps, s'il était libre, prendrait un mouvement ; mais nous le supposons en équilibre, il y a des obstacles qui empêchent son mouvement. Ces obstacles sont : les piles et les culées pour un pont, les murs de l'édifice pour un plancher, etc... Ils détruisent les effets que produiraient les forces d'action ; ils neutralisent ces dernières ; ils développent donc des forces de réaction que l'on appelle, pour abréger, des *réactions*. Nous les avons appelées *forces dépendantes*, parce qu'en effet elles dépendent de l'intensité et de la direction des forces d'action. Aussi, tandis que les forces d'action sont connues d'avance, par le fait même des conditions imposées à l'organe, les réactions demandent à être déterminées chaque fois.

Dans certains cas la statique pure suffira pour trouver les réactions ; mais dans d'autres cas, ces réactions seront une conséquence de la défiguration des pièces.

Ainsi, prenons un tabouret à trois pieds disposés en un triangle que, pour simplifier, nous supposerons équilatéral (fig. 87). Il supporte un poids P en son milieu ; chacun des trois pieds recevra du sol une réaction égale au tiers du

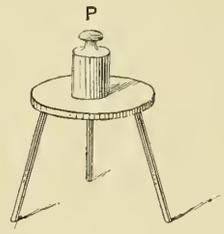


Fig. 87

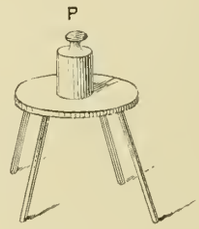


Fig. 88

poids total du tabouret ; que l'on mette sous les pieds des cales de bois dur ou que l'on y place du caoutchouc, le résultat sera le même ; chaque pied supportera un tiers de la charge.

Prenons maintenant un tabouret à quatre pieds disposés en carré et chargé de même. Si les quatre pieds sont bien de niveau, s'ils sont faits exactement du même bois, avec le même diamètre, les réactions seront encore égales entre elles et, par suite, au quart de la charge. Mais, plaçons sous chaque pied des cales ; mettons-les en bois dur sous trois pieds et en caoutchouc sous l'autre. Cette dernière cale se

défigurera plus que les autres, elle cédera sous la charge ; la réaction qu'elle produira diminuera tandis que sous les autres pieds les réactions augmenteront.

Dans ce cas, pour lever l'indétermination qui semble exister relativement aux réactions sous chaque pied, il faut faire intervenir les déformations des cales qui les supportent : nous apprendrons à faire ce calcul.

En définitive, quelle que soit la manière dont nous pouvons déterminer les réactions statiques, supposons, pour l'instant, que ces dernières soient connues comme grandeur, comme direction et comme point d'application. Nous pourrons alors supprimer les obstacles à condition de les remplacer par les réactions qui en émanent.

Dès lors l'organe peut être considéré comme absolument libre dans l'espace, c'est-à-dire dégagé de tout obstacle, mais soumis à toutes les forces extérieures, lesquelles comprennent, telles que nous venons de les définir :

1° Les *actions* ;

2° Les *réactions*.

A ce moment l'équilibre statique est réalisé.

113. 2e Opération. — Equilibre moléculaire. — Pour étudier l'équilibre moléculaire, aux environs d'une section transversale déterminée, considérons en B et B′ ce que nous avons appelé un *bi-plateau* ; l'épaisseur en est infiniment petite. Nous l'avons désignée par Δx (fig. 81).

D'un côté (fig. 89) du bi-plateau agissent les forces F, F′, F″, F‴....., de l'autre côté agissent les forces F_1, F'_1, F''_1, F'''_1 ; appelons les premières le *groupe de gauche* et les autres le *groupe de droite*.

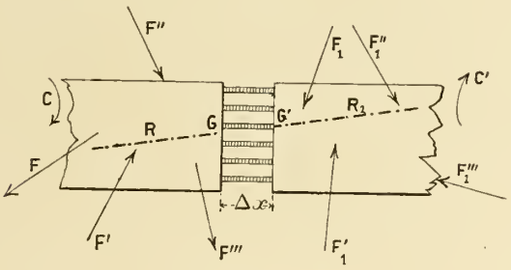


Fig. 89

Le groupe de gauche fait équilibre au groupe de droite puisqu'il laisse le corps en équilibre. Si nous transportons au centre de gravité G du plateau de gauche toutes les forces du groupe de gauche, ce transport donnera lieu à une résultante unique de translation R et à un couple résultant unique, C (v. nos 14 et 15).

De même le transport, au centre de gravité du plateau de droite, de toutes les forces du groupe de droite donnera lieu à une résultante de translation R′ et à un couple résultant C′.

L'ensemble des forces des groupes de gauche et de droite étant en équilibre, il en sera de même de l'ensemble des résultantes de translation R et R′ et des couples résultants C et C′.

Or, on sait qu'une force ne peut être équilibrée que par une autre force, et qu'un couple ne peut l'être que par un couple ; on doit donc avoir séparément :

R égal et contraire à R′

C égal et contraire à C′

Il en résulte que les effets produits sur le bi-plateau par les forces de gauche sont égaux aux effets produits sur lui par les forces de droite, mais de signe contraire. Il nous suffira donc d'étudier ce qui se passe pour un seul côté du bi-plateau, celui de gauche par exemple. Cela posé :

Soit R (fig. 90 I) la résultante de translation appliquée au centre de gravité du plateau. Décomposons-la en deux forces, l'une dirigée suivant l'axe de la pièce, l'autre normale à cet axe ; cette décomposition, exécutée par la règle du parallélogramme, nous permet de remplacer R par ses deux composantes T et P.

L'effort P est un *effort tirant* (il pourrait être comprimant), il produit un allongement des fibres ; quant à T c'est un *effort tranchant*, il tend à cisailler les fibres. Il est bien

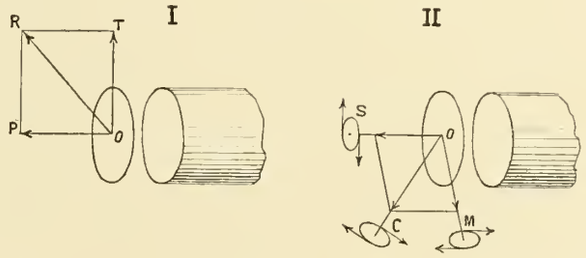


Fig. 90

évident que ces deux effets se produisent simultanément et non pas séparément.

Décomposons de même (fig. 90, II) le couple résultant C, représenté ici par son axe OC, en deux autres S et M (v. n° 13), le premier ayant son axe OS dans la direction de l'axe du prisme élastique, le second ayant son axe OM dans une direction perpendiculaire.

Le second couple M tend à faire tourner le plateau autour de OM comme charnière ; c'est un *couple fléchissant* (v. n° 107) ; il donne lieu à une *flexion* tandis que le premier couple S est un *couple tordant* et donne lieu à une *torsion*.

114. Résumé. — Cette analyse fait bien voir quelle sera, sur une section déterminée, l'effet des forces extérieures, et comment cet effet peut, théoriquement, se décomposer

suivant les quatre effets élémentaires ou, seulement, suivant plusieurs d'entre eux, savoir :

Translation { *longitudinale. — Tension.* { *Compression ou Traction.*
transversale. — Tranchage, Glissement.

Rotation { *transversale. — Flexion.*
axiale. — Torsion.

Ces divers mouvements allongent, raccourcissent ou dévient les fibres suivant des lois que nous devons maintenant étudier.

La flexion ne met en jeu que les phénomènes de tension (compression ou traction), tandis que la torsion n'a pour effet que de dévier les fibres ; c'est pourquoi dans le second chapitre nous étudierons la **tension simple** (traction, compression) et la **tension composée** (flexion), et dans un troisième chapitre la **déviation simple** (**tranchage** ou encore **glissement**) et la **déviation composée** (torsion).

CHAPITRE II

TENSIONS

1re SECTION

Tension simple. — Traction et compression.

§ 1. — Lois de la traction

115. Expérience de Wertheim. — C'est à un savant français, Wertheim, que nous devons les premières expériences sérieuses faites sur la traction.

Pour répéter ces expériences, on prend un fil homogène et d'un diamètre constant; on pince l'une de ses extrémités dans les mâchoires d'un étau D fixé à une potence; l'autre extrémité est prise dans les mâchoires d'un étau semblable D′ supportant une caisse destinée à recevoir des poids;

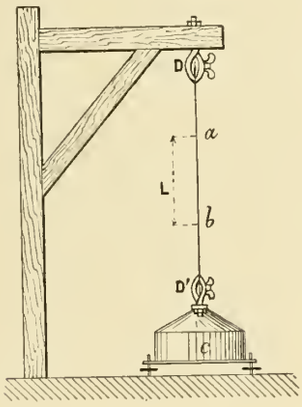


Fig. 91

cette caisse repose sur le sol par l'intermédiaire de vis de calage (fig. 91).

On marque sur le fil deux traits a et b et l'on mesure très exactement la distance qui les sépare au moyen d'un instrument appelé *cathétomètre* dont on peut voir la description dans les traités de physique.

Soit L la longueur $\overline{ab}$, soit ω la section du fil.

Ces dispositions une fois prises on place des poids dans la caisse C, puis en tournant lentement les vis calantes on arrive à laisser la caisse suspendue au fil ; on note alors la charge placée dans la caisse C, dont le poids doit aussi entrer en ligne de compte, et l'on mesure de nouveau la distance des points a et b ; soit L′ cette distance. On déduit de cette mesure l'allongement $l = L' - L$, pris par la portion ab du fil sous l'influence de la charge employée.

On répète l'expérience en augmentant chaque fois et progressivement le poids additionnel placé dans la caisse C, et l'on note chaque fois la charge agissante et l'allongement correspondant de la portion ab du fil.

En comparant les résultats d'expériences nombreuses faites avec des fils de grosseur et de nature différentes, sur lesquels les points a et b ont été pris à des distances inégales, on reconnaît la loi suivante :

« L'allongement du fil, sous l'influence de charges modérées, est proportionnel à la charge qu'il supporte et à sa longueur primitive, tandis qu'il est inversement proportionnel à sa section et à un certain coefficient E qui dépend de la nature de la matière dont le fil est formé. »

116. Formule fondamentale de la traction. — Cette loi peut se traduire par la formule suivante, dans laquelle l est l'allongement du fil :

$$(1) \qquad l = \frac{PL}{E\omega}.$$

Le coefficient E a reçu le nom de *coefficient d'élasticité*, on l'appelle aussi *module d'élasticité*. A notre avis, il conviendrait mieux de le nommer *coefficient de raideur*, car les expériences montrent que, plus ce coefficient est grand, moins l'allongement est considérable ; un grand coefficient d'élasticité correspond donc à une grande résistance à l'allongement, c'est-à-dire à une grande raideur de la matière. Le coefficient d'élasticité de l'acier, par exemple, a une valeur très grande, tandis que celui du caoutchouc est très faible et pourtant on dit tous les jours que le caout-

choc est un corps très élastique. Aussi le mot coefficient de raideur ferait-il disparaître toute confusion.

Nous verrons bientôt quel est le sens précis de E.

Néanmoins, comme nous n'avons pas la prétention de rompre avec des conventions universellement adoptées, nous nommerons E *le module d'élasticité longitudinale.*

117. Interprétation de la formule de la traction ; problèmes qu'elle permet de résoudre. — La formule (1) nous permet de résoudre le problème suivant :

(*a*) **1er Problème.** — « Quel est l'allongement l pris par « une tige de longueur L, de section ω, formée d'une « substance caractérisée par le module E, lorsque cette tige « est soumise à un effort égal à P ? »

Mais cette formule (1), contenant cinq quantités, peut être résolue algébriquement par rapport à l'une quelconque d'entre elles et peut fournir aussi les quatre nouvelles équations suivantes :

$$P = \frac{lE\omega}{L}. \tag{2}$$

$$\omega = \frac{PL}{El}. \tag{3}$$

$$L = \frac{E\omega l}{P}. \tag{4}$$

$$E = \frac{PL}{\omega l}. \tag{5}$$

Les problèmes que ces formules permettent de résoudre sont indiqués dans les énoncés ci-dessous :

(*b*) **2e Problème.** — « Quel est le poids P qui, appliqué « à une tige de longueur L, de section ω et de nature « caractérisée par le module E, lui a donné un allonge- « ment l ?

(*c*) **3e Problème.** — « Quelle est la section ω d'une tige « qui, étant formée d'une substance caractérisée par le mo- « dule E, et ayant une longueur primitive L, s'est allon- « gée de la longueur l sous un effort égal à P ? »

La formule (4) ne répondrait pas à un problème intéressant. Il n'en est pas de même de la formule (5) ; elle répond au problème suivant :

(*d*) **5e Problème.** — « Quel est le module d'élasticité E d'une « substance qui, ayant une longueur L, une section ω, s'est « allongée d'une longueur l sous l'action d'un effort P ? »

Cette formule (5) nous permettra donc de déterminer les modules d'élasticité.

Si dans cette formule (5) nous supposons ω égal à l'unité de surface (le mètre carré), le nombre E représentera le poids dont il faudrait charger la tige pour doubler sa longueur : la formule (5) devient en effet, en faisant $\omega = 1$ et $l = L$:

$$E = \frac{P \times L}{1 \times L} = P;$$

d'où nous concluons :

(*e*) **Signification mécanique du module d'élasticité.** — *Le module d'élasticité serait l'effort qu'il faudrait appliquer à une tige dont la section serait égale à l'unité de surface, pour doubler sa longueur.*

Remarquons immédiatement que la valeur absolue du module d'élasticité dépendra donc de l'unité adoptée pour évaluer les surfaces.

Si l'on prend pour unité le millimètre carré au lieu du mètre carré, le module d'élasticité sera un million de fois plus petit.

Hâtons-nous de dire qu'un pareil allongement est absolument fictif. Presque tous les corps se rompraient avant de l'avoir atteint. En effet, suivant la nature de sa substance, la rupture d'une tige s'opère généralement après les allongements suivants :

$\frac{1}{275}$	de sa longueur pour le fer,	soit	$3^m/^m,6$	par mètre.
$\frac{1}{200}$	id.	l'acier, soit	$5^m/^m$	id.
$\frac{1}{400}$	id.	plomb, soit	$2^m/^m,5$	id.
$\frac{1}{162}$	id.	bois de chêne, soit	$7^m/^m,5$	id.

Ces valeurs étant d'ailleurs susceptibles de varier notablement avec le degré de pureté et le mode de préparation du métal essayé.

Voici à titre de renseignement quelques valeurs trouvées pour le module d'élasticité des principaux matériaux de construction :

MATÉRIAUX	MODULE D'ÉLASTICITÉ E RAPPORTÉ AU millimètre carré (kilog.)	mètre carré (kilog.)
Métaux		
Acier	22.000	22.000 millions
Fer	20.000	20.000 id.
Fonte	10.000	10.000 id.
Cuivre	11.600	11.600 id.
Zinc	9.000	9.000 id.
Bois		
Chêne	900 à 1.300	900 à 1.300 millions
Sapin	1.000 à 1.500	1.000 à 1.500 id.
Châtaignier	800	800 id.

§ 2. — Différentes phases de la défiguration

118. Expériences de M. Bauschinger. — Pendant longtemps, on a admis que lorsqu'un fil, après avoir été soumis à un effort modéré, est ensuite abandonné à lui-même, il reprend sa longueur primitive ; et en effet, en répétant l'expérience de Wertheim (n° 115) et en mesurant les allongements comme nous l'avons indiqué, on constate que le fil revient bien à sa longueur primitive lorsqu'on le décharge après lui avoir fait supporter un effort modéré. Cependant il résulte d'expériences dues à M. Bauschinger, de Munich, qu'en réalité le fil qui a été allongé conserve toujours un certain allongement statique. Il ne revient jamais rigoureusement à sa longueur primitive.

Dans ses expériences, M. Bauschinger opère sur une barre courte, de section carrée, portant à ses extrémités deux renforts que saisissent les mâchoires d'un banc à tirer. Pour mesurer les allongements, voici le principe de la disposition imaginée par le savant Professeur. La barre d'essai porte en *a*, *b*, *c* et *d* (fig. 92) quatre traits qui forment des encoches assez fines pour ne pas affaiblir la pièce. Dans les traits *a* et *b* pénètrent des couteaux F et G qui sont poussés contre la barre d'essai par une traverse qui n'est pas figurée ici et qui les embrasse ; dans les traits *c* et *d* pénètrent d'autres couteaux H et K qu'on maintient au contact de la pièce d'essai de la même manière que les couteaux F et G.

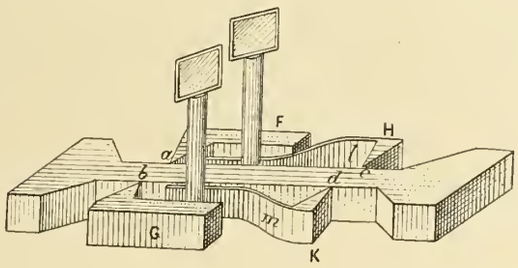


Fig. 92

H et K sont munis de ressorts *l* et *m* qui se prolongent jusque sous les queues des couteaux F et G. Enfin entre ces derniers et les ressorts *l* et *m* on place des cylindres à surface légèrement rugueuse.

On comprend que lorsque la barre d'essai s'allongera, les cylindres placés entre les ressorts *l* et *m* et les couteaux F et G se déplaceront en roulant sur les surfaces de contact, comme ferait un crayon que l'on forcerait à tourner en le serrant entre les deux mains et en déplaçant ces dernières en sens inverse l'une de l'autre.

Afin d'apprécier les déplacements de ces cylindres, si minimes qu'ils soient, M. Bauschinger les munit de petits miroirs qui réfléchissent l'image de divisions faites sur l'un des murs de la salle d'expérience.

On pourrait envoyer dans ces miroirs un faisceau lumineux émanant d'une lampe ; par réflexion il se produirait une image brillante sur le mur ; le moindre allongement de la tige entraînerait une rotation des miroirs et, par suite, un déplacement, très amplifié, de l'image brillante sur le mur.

Pour la clarté des explications qui vont suivre nous prions le lecteur de se figurer sur le mur cette image brillante et d'admettre que ses déplacements sont proportionnels aux allongements de la tige en expérience.

A l'aide de cette ingénieuse disposition on peut évaluer des allongements de $\frac{1}{5000^e}$ de millimètre.

119. 1re Phase de l'extension, dite : phase d'élasticité.— En opérant avec une pareille précision on a reconnu qu'il n'y a pas de corps parfaitement élastique. Tous, sauf peut-être l'acier trempé, conservent un allongement permanent lorsqu'on les a soumis à l'action de forces. Mais si l'on fait l'expérience de M. Bauschinger en ayant soin de noter l'effort exercé sur la barre et l'allongement correspondant, proportionnel au déplacement de l'image brillante, en faisant varier les efforts et en mesurant, chaque fois, l'allongement produit, on remarque que, durant une certaine phase :

Les allongements observés sont proportionnels aux charges qui les déterminent.

La formule fondamentale (1) se trouve ainsi vérifiée et applicable dans ce cas.

$$l = \frac{PL}{E\omega}$$

ou bien en prenant L égal à l'unité de longueur (le mètre ou le millimètre si nous voulons) et ω égale à l'unité de surface (le millimètre carré),

$$l = \frac{P}{E} \quad \text{d'où} \quad E = \frac{P}{l}.$$

Dans la période que nous venons d'examiner E est constant, c'est pourquoi nous la désignerons sous le nom de *phase d'élasticité constante* ou, pour abréger, *phase d'élasticité*.

120. 2e Phase, dite : de grande extension.— Continuons l'expérience ; augmentons progressivement les charges appliquées sur la barre d'épreuve et observons chaque fois, par le déplacement de l'image brillante, les allongements produits. On reconnaît qu'au-delà d'une certaine limite la formule (1) $l = \frac{Pl}{E\omega}$ n'est plus vérifiée ; *les allongements*

croissent plus rapidement que les charges. La pièce semble avoir changé de nature, elle paraît plus faible, plus lâche, pour ainsi dire ; mais il n'en est rien, au contraire. En réalité voici ce qui se passe :

Il faut faire deux parts de l'allongement total ; une première qui sera *l'allongement permanent* et qui ne sera jamais regagnée par le solide (elle répond à une sorte d'*écrouissage* du métal) : une seconde qui sera l'*allongement élastique* et qui disparaîtra avec la charge. Ce dernier allongement obéit à la formule fondamentale et, jusqu'au bout de l'expérience, ce sera toujours le même module d'élasticité, E, qui en réglera la valeur.

Cette période a reçu le nom de *phase de grande extension* et la limite qui la sépare de la phase précédente se nomme la *limite d'élasticité.*

La limite d'élasticité est très importante à connaître ; pour la déterminer avec une approximation suffisante il n'est pas besoin de disposer d'appareils aussi perfectionnés que ceux de M. Bauschinger. Dans la pratique lorsque l'on applique à une barre des charges croissantes et que, chaque fois, on laisse la pièce revenir sur elle-même on constate que l'instant où les allongements permanents deviennent sensibles est bien nettement appréciable. L'effort unitaire (c'est-à-dire rapporté à l'unité de section) qui correspond à cette période de l'expérience peut être pris comme limite d'élasticité. On conçoit néanmoins que ce procédé, qui consiste à apprécier un changement d'allure dans les allongements, puisse laisser à désirer ; c'est pourquoi M. Considère a proposé de prendre pour limite d'élasticité l'effort unitaire pour lequel l'allongement permanent serait égal à l'allongement élastique, c'est-à-dire moitié de l'allongement total ; cette proposition n'est pas encore passée dans la pratique.

121. 3e **Phase. — Période de filage limité.** — Dans les deux phases que nous venons de décrire, les allongements pris par la barre d'épreuve étaient atteints au moment même où la charge venait d'agir ; au contraire dans la troisième phase, celle dans laquelle nous entrons maintenant, et qui correspond à des charges plus grandes, l'allongement définitif de l'éprouvette (1) ne se réalise pas immédiatement ; il continue à se produire pendant un certain temps qui suit l'application de l'effort. Pour mieux comprendre ce qui se passe plaçons-nous dans les conditions de l'expérience citée.

Tandis que tout à l'heure, à peine avions-nous appliqué la charge, que nous voyions l'image lumineuse se déplacer et se fixer immédiatement ; maintenant nous mettons la charge et nous voyons le point lumineux continuer à marcher pendant quelque temps (de moins en moins vite, il est vrai) et finir par s'arrêter.

(1) La tige sur laquelle on fait les épreuves de résistance se nomme une *éprouvette.*

En définitive, le métal cède ; on dit qu'il *file* comme le ferait un corps mou. Cependant au bout d'un certain temps, après l'application de l'effort, ce filage s'arrête et la longueur de l'éprouvette arrive à rester constante ; c'est pourquoi nous avons donné à cette troisième phase le nom de *période de filage limité.* La limite qui le sépare de la phase précédente se nommera la limite de *grande extension.*

122. 4e **Phase, dite : de filage illimité ou phase de striction.** — (*a*) **Striction et rupture.** — Enfin, en augmentant toujours la charge supportée par la barre d'épreuve et en suivant des yeux le point lumineux sur le mur, on constate que pour une certaine charge, ce point ne s'arrête plus : le filage n'est plus limité ; la pièce s'allonge de plus en plus et finit par rompre. Nous sommes dans la période de filage illimité. Mais alors si l'on observe l'éprouvette pendant cette période, voici ce que l'on constate (fig. 93) :

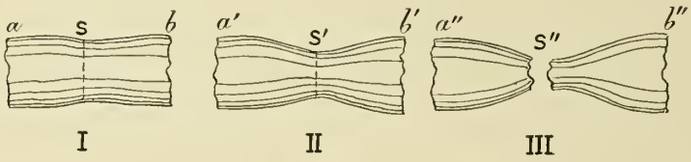


Fig. 93

Il arrive un moment où celle-ci présente en un de ses points, S, une diminution de section, un étranglement que l'on nomme une *striction.* Il en résulte qu'en ce point la pression par unité de surface est plus grande qu'ailleurs, le filage de la pièce se continue alors, comme l'indique S', jusqu'à la rupture par *arrachement* qui se produit en S'', au point où la striction s'est manifestée.

La limite qui sépare cette phase de la précédente, se nommera la *limite de filage limité.* Elle n'est pas très importante à considérer et elle est difficile à déterminer avec précision. Celle qui clôt l'expérience, c'est-à-dire qui répond à la rupture, se nomme la *limite de rupture* ; elle est importante à connaître.

Chacune des limites que nous venons d'indiquer s'exprime par un poids rapporté à l'unité de surface (le m² ou le mm²). Ainsi, par exemple, on dira que tel métal a :

Pour limite d'élasticité.	15^k
Pour limite de grande retension.	22^k
Pour limite de filage limité.	x
Pour limite de rupture.	48^k

Ces poids étant rapportés au mm².

Cela voudra dire qu'au moment où l'éprouvette de ce métal entre dans la seconde période, la charge totale supportée P (évaluée en kilos), divisée par la section (évaluée en millimètres carrés), a donné pour quotient 15.

Mais on conçoit que lorsqu'il s'agit de la rupture *après*

striction, cette manière de compter ne représente plus la réalité des faits.

En effet, lorsque la pièce s'est rompue (fig. 93, III), c'est la section dans la partie étranglée S″ qu'il importe de connaître ; c'est par elle, et non pas par la section primitive, qu'il aurait fallu diviser la charge totale de rupture pour savoir quel était à ce moment l'effort *unitaire* (c'est-à-dire par mm²) supporté par le métal. Supposons que, ω étant la section primitive, ω'' soit la section de striction.

Le rapport $\omega'' : \omega$ se nomme le coefficient de striction ; il est toujours plus petit que l'unité et il peut atteindre des valeurs assez faibles, 0,70, 0,60, 0,50 et même moins, ce qui veut dire qu'au moment de la rupture la section de striction est les 0,70, 0,60 ou 0,50 de la section primitive. L'effort unitaire de rupture doit être multiplié par le rapport inverse pour représenter ce qui se passe réellement dans la section étranglée. Ainsi, dans le cas précédent, supposons que 48 k. ait été obtenu en divisant la charge totale ayant amené la rupture par la section primitive ; mais admettons qu'en mesurant l'étranglement S″ on ait trouvé que le coefficient de striction est égal à 0,70 ; alors pour avoir le véritable effort unitaire de rupture il faudra diviser 48 par 0,70, ce qui donnera 68k,5, au lieu de 48 k. ; cela prouve que le métal vaut, en réalité, beaucoup mieux qu'il ne paraissait.

Certains métaux ont la propriété de filer pendant longtemps avant de rompre et, par conséquent, d'avoir un coefficient de striction assez faible : tels sont les *aciers doux*, que l'on nomme quelquefois des *fers fondus*. Nous verrons plus loin pourquoi, grâce à cette qualité, ils sont très appréciés dans la construction ; au contraire des aciers durs ou trempés qui cassent sec, sans présenter de striction préalable notable, sont dangereux à employer (voir plus loin n° 126...).

(*b*) **Conservation de la densité.** — Il est important de remarquer que, dans les diverses phases de l'allongement d'une barre soumise à un effort de traction, la densité du métal ne varie pas sensiblement. Il résulte, en effet, d'expériences exécutées par M. **Barba**, au Creusot, que des échantillons pris après rupture auprès de la section contractée, et d'autres pris loin de cette section, dans la même barre d'épreuve, ont, à $\frac{7}{100.000}$ près, la même densité qu'avant la rupture.

§ 3. — Analyse de la qualité d'un métal

123. **Ductilité.** — (*a*) **Allongement de striction.** — L'existence d'une striction très prononcée indique un métal qui, avant de se rompre, s'est allongé considérablement. Pour comprendre cet effet détachons, par la pensée, dans la zône où se produira la striction, un cylindre d'une très petite longueur (l, par exemple) ; si ω est sa section primitive, le volume de ce cylindre est $v = l\omega$.

Après la striction, la longueur de ce cylindre AB est devenue l', tandis que sa section s'est réduite à ω' ; son volume est $v' = l'\omega'$. Mais comme d'après l'expérience du Creusot la densité du métal n'a pas changé, il en résulte que les deux volumes sont égaux et que l'on a

$$\omega l = \omega' l' \qquad \text{d'où l'on déduit}$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{\omega}{\omega'}, \qquad \text{et}$$

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'} = \frac{\omega}{\omega'} - 1,$$

$l' - l$, c'est l'allongement et par conséquent $\frac{l' - l}{l}$ c'est l'allongement proportionnel *ou allongement de striction* que les fibres du métal ont pu prendre avant de rompre ; c'est bien ce rapport qui donne une mesure de la ductilité de la matière et, peut-être, conviendrait-il de le prendre comme *coefficient de ductilité*.

Pour certains aciers très doux, cet allongement de striction peut atteindre 100, 150 et même 200 pour 100.

Les métaux qui sont dans ce cas possèdent donc une sorte de *plasticité* qui fait qu'ils résisteront mieux que d'autres, qui seraient plus cassants, soit à des efforts imprévus, soit à des commencements d'altération ou de rupture. C'est ce qu'un exemple emprunté au remarquable mémoire de M. **Considère** (1) va faire comprendre.

(*b*) **Effet d'une fissure dans un métal non ductile.** — Prenons une lame rectangulaire de tôle (fig. 94-II) sur le bord de laquelle nous aurons pratiqué en *iJ* une petite entaille transversale figurant une fissure ; exerçons maintenant, sur cette lame, une traction longitudinale.

Le lecteur fera facilement l'expérience avec une lanière de caoutchouc. Les stries 1, 2, 3, 4... du caoutchouc (fig. 94) figurent assez bien des sections transversales normales à la fibre moyenne. Si la lanière est bien saine (fig. 94-I), en la tirant on constatera que les stries restent rectilignes et parallèles ; elles s'écartent régulièrement et prennent les positions 1′, 2′... indiquées en dessous ; mais si (fig. II), avec un canif, on pratique sur le bord, en *iJ*, une fente transversale et si l'on exerce une traction, alors on voit la fente s'ouvrir et prendre à peu près la figure d'un demi-cercle ; les sec-

(1) « Fer et acier », par M. Considère, ingénieur en chef des ponts et chaussées. Annales des ponts et chaussées, 1885, I, page 574.

tions telles que 1, 2, 3... qui, primitivement, étaient droites se sont recourbées et ont pris les positions et les figures courbes 1′, 2′, 3′, 4′ de la fig. II située au dessous.

On constatera qu'une traction, même très faible, amènera dans ces conditions la rupture par déchirement. Cherchons à expliquer ce fait.

Si l'on considère le point I′ (fig. II) placé au fond de la fissure, la fig. 94 *bis*-I fait voir, à plus grande échelle, que c'est l'élément I*g* de fibre transversale qui a dû fournir le

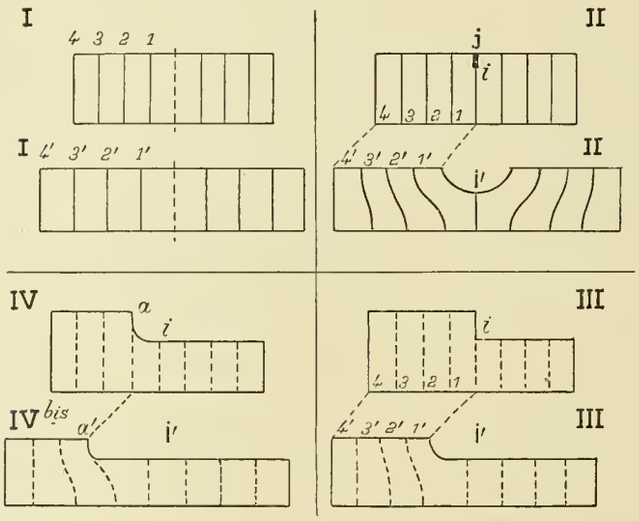


Fig. 94

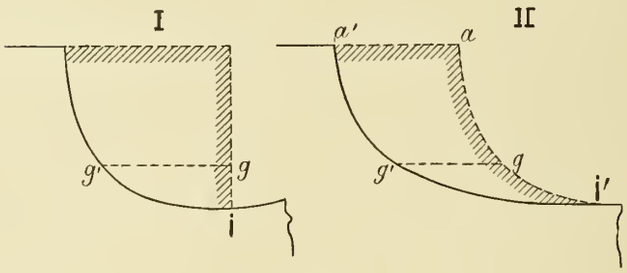


Fig. 94 *bis*.

bord I*g*′ de l'échancrure et comme entre l'arc I*g*′ et la flèche I*g* la différence est très grande, il en résulte que la fibre transversale a dû subir, dans les environs du point I, fond de la fissure, un allongement proportionnel considérable, pour passer de la longueur I*g* à la longueur I*g*′. Par conséquent si la matière n'est pas ductile la fibre I*g* se rompra et, à sa suite, entraînera la rupture de toute la section.

(*c*) **Effet d'un changement brusque de section ou d'un changement raccordé.** — Si la bande de caoutchouc avait la forme de la fig. 94-III, c'est-à-dire si elle présentait en *i* un changement brusque de section, alors les sections transversales prendraient, par traction, les figures courbes 1′,2′,3′,... ; un effet analogue à celui que nous venons d'étudier se produirait : la fibre transversale avoisinant l'angle rentrant *i* subirait un allongement proportionnel considérable qui amènerait sa rupture, si la matière n'avait pas de ductilité.

Au contraire, (fig. 94-IV) imaginons que le changement de section soit obtenu par un congé tangentiel *ai*, en quart de cercle ; sous l'influence de la traction ce congé s'élargira et deviendra sensiblement elliptique, tout en restant tangentiel en *i*′. (Suivre maintenant sur la grande figure 94 *bis* II).

Le quart de cercle I′*a* sera devenu le quart d'ellipse I′*a*′ qui a plus de longueur que lui ; mais au point dangereux, c'est-à-dire en I′, (voir fig. II) c'est l'arc de cercle infiniment petit I′*g* qui est devenu l'arc d'ellipse I′*g*′ et, entre eux, la différence est petite au lieu d'être très grande, comme elle était entre l'arc et la corde dans la fig. I. C'est pourquoi l'allongement proportionnel n'aura pas besoin d'être considérable et la rupture sera moins à craindre.

(*d*) **Avantages des métaux ductiles.** — Cette discussion met en évidence les deux points suivants : 1° Si dans la masse d'une pièce métallique il y a un commencement d'altération, une fissure, et si le métal est sec et cassant cela pourra entraîner la rupture de toute la pièce ; au contraire si le métal est ductile le danger sera bien moindre.

2° Les changements de section ne doivent jamais être brusques ; il faut les réaliser par des congés tangents à la pièce tout le long de la section la plus faible.

124. Classification des produits ferreux. — Les expériences faites par différents ingénieurs ont porté presque exclusivement sur le fer et sur l'acier qui sont les métaux dont l'emploi dans les constructions est, de beaucoup, le plus important. Aussi n'est-il pas inutile de donner ici quelques indications sur ces produits ferreux, afin de fixer d'une manière nette ce qu'on entend par *fer* et par *acier*.

Parmi tous ces produits ferreux l'acier est celui dont l'emploi exige de la part du constructeur le plus d'attention, à cause surtout de la trempe que peuvent prendre les pièces pendant qu'on les met en œuvre, et aussi des propriétés très différentes que présentent les aciers. Mais la métallurgie a fait dans ces dernières années des progrès extraordinaires et les usines bien outillées peuvent livrer, aujourd'hui, des aciers possédant la qualité que l'on désire. Le métal parfait serait celui qui posséderait à la fois une grande résistance de rupture et un fort allongement de striction.

Le tableau suivant donne les définitions qui ont été arrêtées par une commission internationale lors de l'Exposition de Philadelphie en 1876 :

PRODUITS FERREUX Fontes Origine de tous les fers. — Fer et carbone en proportions indéterminées (de 5 à 10 et 12 0/0) de carbone.			
Fers contiennent de 0 à $\frac{2}{1000^e}$ de carbone ne subissent pas la trempe.		Aciers contiennent de $\frac{2}{1000^e}$ à $\frac{20}{1000^e}$ de carbone subissent la trempe.	
Fers soudés	*Fers fondus* dits : aciers doux.	Soudés	Fondus
Décarburation de la fonte par le pudlage.	Décarburation de la fonte par affinage.	Carbone ajouté au fer par cémentation.	Décarburation incomplète de la fonte liquide ou carburation du fer fondu par addition de fontes spéciales.
Paquets chauffés au rouge et soudés par { martelage. laminage.	Procédés { Bessemer. Siemens-Martin. Thomas.	Paquets chauffés au rouge et soudés par { martelage. laminage.	

§ 4. — Effets des efforts prolongés et des chocs

125. Effet des efforts prolongés. — Lorsque l'on soumet, dans un laboratoire d'essai, les métaux à des épreuves de rupture, on les fait passer dans un temps très court, c'est-à-dire en quelques instants, ou si l'on veut en quelques heures, de la charge zéro à celle de rupture. Dans ces conditions, une charge moins forte que celle de rupture ne fait pas rompre la pièce; mais n'y arriverait-elle pas si elle agissait pendant un temps plus ou moins long? C'est ce que **Vicat**, et après lui M. **Thurston** et M. **Considère** ont étudié.

Des expériences de Vicat, il semblerait résulter que le métal soumis pendant des mois et des années à des charges inférieures au *tiers* de la limite de rupture et même à la *moitié* de celle d'élasticité prendrait un allongement continu, qui entraînerait nécessairement la rupture.

Des expériences de M. **Thurston**, il résulterait qu'une charge supérieure à la limite d'élasticité amènerait la rupture au bout d'un temps plus ou moins long.

Les expériences de M. **Considère** corrigent celles de **Vicat** et donnent des résultats beaucoup moins inquiétants; néanmoins il semble avéré que, dès que la charge dépasse la limite d'élasticité, le danger d'une rupture augmente avec le temps.

126. Effets des efforts répétés un petit nombre de fois. — (*a*) **Education du métal.** — Tant que la limite d'élasticité n'est pas atteinte, le métal soumis à une charge momentanée revient, très sensiblement, à son état primitif aussitôt que l'on supprime l'effort.

Appliquons un effort p_1 dépassant la limite d'élasticité; alors, ainsi que nous l'avons dit au n° 122, le métal prend un double allongement, l'un qui est dit *élastique* et qui disparaît avec l'effort, l'autre qui est *permanent*. Une fois l'effort p_1 supprimé, la tige reprend donc une longueur l_1 qui est un peu supérieure à sa longueur primitive l. Elle va maintenant se conduire comme si elle était faite d'un métal nouveau qui aurait une limite d'élasticité supérieure à la première et très sensiblement égale à la charge p_1 que l'on vient de quitter. Si donc on applique à ce *nouveau metal* la même charge p_1 il reprend la longueur l_1 en ne subissant qu'un allongement élastique; mais si la charge qu'on lui applique est p_2, supérieure à p_1, alors la tige prendra une longueur nouvelle, en subissant un allongement qui sera, lui aussi, en partie élastique et en partie permanent; l'allongement élastique étant toujours donné par la formule fondamentale, avec même module d'élasticité. Quand elle reviendra sur elle-même, ce sera pour garder définitivement une longueur l_2 supérieure à l_1, et nous avons encore un autre métal différent du second état. En renouvelant plusieurs fois l'expérience, et en soumettant le métal à des charges croissantes, le même effet se reproduira en s'accentuant chaque fois jusqu'au moment où le métal entrera franchement dans la période de striction.

Ainsi donc, ces efforts répétés et croissants ont pour effet d'augmenter la limite d'élasticité; ils font en quelque sorte l'*éducation du métal*, selon l'expression de **Tresca**. D'autres expériences prouvent aussi qu'ils augmentent également sa limite de rupture, et M. **Bauschinger** a pu porter de 32 k. à 44 k. la résistance de rupture d'un métal par sept chargements successifs. Par contre, la ductilité du métal diminue. Avec nos idées nouvelles sur la bonne influence de la ductilité, l'éducation du métal, faite par ce procédé, laisse donc à désirer.

(*b*) **Limite de cette éducation.** — Jusqu'à quelle limite pourra-t-on faire ainsi cette éducation du métal? Il résulte des expériences de M. **Bauschinger** que ce ne sera que jusqu'à la limite de grande extension; et que, si la charge dépasse cette limite, on constate alors que le métal voit sa limite d'élasticité brusquement abaissée et réduite presque à zéro. Il ne pourra donc plus y avoir, à partir de cette limite, que des allongements permanents, et le metal entrera vite dans la phase de rupture.

° 127. **Effet des chocs répétés.** — Un choc se produit lorsqu'un corps possédant une certaine masse et une certaine vitesse en rencontre un autre et vient y anéantir sa *puissance vive* (produit $\frac{mv^2}{2}$ de la masse m par la moitié du carré de la vitesse v). Cette puissance vive ne peut être détruite que par un travail moléculaire produit dans le corps choqué, travail qui résulte de ce que les fibres moléculaires se raccourcissent.

Pour comprendre l'effet d'un choc, évaluons d'abord le travail moléculaire accompli dans une barre unitaire, c'est-à-dire qui aurait 1 mètre de longueur, 1 mm² de section et à laquelle on imposerait un effort unitaire p. Si E est le module d'élasticité, le travail moléculaire (v. plus loin, n° 159) sera donné par la formule

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E}, \text{ (1)}$$

Si $\frac{mv^2}{2}$ est la puissance vive unitaire du choc, c'est-à-dire la puissance vive totale répartie sur chaque barre unitaire du solide qui le reçoit, on devra donc avoir :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2E}, \qquad \text{d'où}$$

$$(2) \qquad p = v\sqrt{mE}.$$

Cette formule (2) fera connaître l'effort unitaire p produit dans une fibre par un choc d'intensité, ou, plutôt, de puissance vive connue.

Cela posé : 1° Si p ainsi calculé est inférieur à la limite d'élasticité, le métal rebondira, en quelque sorte, sous le choc et reprendra son premier état ; le choc sera sans effet nuisible, même si on le répète un grand nombre de fois.

2° Si p ainsi calculé est supérieur à la limite d'élasticité mais inférieur à celle de grande extension, il résulte de l'étude faite au numéro précédent que chacun des chocs produira une déformation permanente mais en même temps fera l'éducation du métal jusqu'à ce que ce métal modifié ait acquis une nouvelle limite d'élasticité égale à p ; à partir de ce moment, il n'y aura plus de déformation permanente ; on rentrera dans le premier cas ; néanmoins le métal restera moins ductile et plus fragile.

Mais 3° si p est supérieur à la limite de grande extension, alors, chacun des chocs produira une déformation permanente, puisque dans ces conditions la limite de l'éducation du métal [v. n° précédent (*b*)] sera toujours dépassée; la phase de striction sera donc, plus ou moins vite, mais forcément, atteinte et la rupture définitive sera la conséquence de ces chocs répétés un nombre suffisant de fois.

Un calcul, que nous ne ferons pas ici, nous permettrait de prouver qu'un acier qui aurait 50 kilog. de résistance de rupture et un allongement de striction égal à 20 p. 100, se romprait sous un choc *répété* possédant une puissance vive unitaire égale à 0,0575 tandis que pour se rompre sous un choc *unique*, ce dernier devrait posséder une puissance vive unitaire 160 fois plus grande que la précédente.

(1) La formule du n° 159 est $T_p = \frac{1}{2}\frac{p^2L}{E\omega}$; on obtient celle que nous écrivons en y faisant $L = 1$ et $\omega = 1$.

§ 5. — Effets des efforts répétés ou alternés

128. **Expériences et lois de Wœhler.** — (*a*) **Définitions et expériences.** — On s'est beaucoup préoccupé en Allemagne des effets produits sur le fer et sur l'acier par des efforts répétés toujours dans le même sens, soit à la traction, soit à la compression, c'est ce que nous nommerons des *intermittences*, et par des efforts alternés de traction et de compression, c'est ce que nous nommerons des *alternances*.

Des machines spéciales imaginées par M. **Wœhler** lui ont permis de faire subir à des barrettes métalliques un nombre considérable soit d'alternances, soit d'intermittences.

M. **Wœhler** et après lui MM. **Spangenberg** et **Bauschinger** ont reconnu que tel effort qui, agissant une seule fois ou même un nombre limité de fois, aurait laissé le métal indemne, amènerait sa rupture si on le répétait un nombre de fois très considérable.

De leurs expériences on a pu déduire la loi générale dont voici l'énoncé :

(*b*) **Loi de Wœhler.** — « Le nombre d'intermittences ou « d'alternances d'efforts amenant la rupture est d'autant plus « petit que l'écart entre les efforts extrêmes est plus grand. »

Si les deux efforts extrêmes sont de même sens, par exemple, deux tractions, l'une de 15 k., l'autre de 8 k., l'écart sera $15 - 8 = 7$ k.

Si l'un des efforts agit par traction (13 k. par exemple) et l'autre par compression (7 k. par exemple), l'écart sera $13 + 7 = 20$ k.

Dans ce dernier cas, il y aura rupture beaucoup plus tôt que dans le premier.

En France cette loi de Wœhler, qui conduit à réduire le travail à imposer aux organes de construction qui seront

soumis à des efforts alternés de traction et de compression, n'est pas encore généralement prise en considération. On a fait remarquer que des échantillons levés sur des organes ayant subi un grand nombre d'alternances (tels que rails de chemin de fer ou barres de treillis de pont), ont donné des résultats très satisfaisants aux épreuves à la traction, résultats qui ne laissaient pas supposer une diminution dans les qualités du métal.

Néanmoins, en présence des cas de plus en plus fréquents de rupture de ponts métalliques qui se sont produits dans ces dernières années, il devient nécessaire de tenir compte de la loi de Wœhler, car il est reconnu que ces ruptures sont dues, pour la plus grande part, aux efforts variables et répétés auxquels les charges roulantes ont soumis ces ouvrages.

(*c*) **Formules traduisant la loi de Wœhler.** — Il résulte de cette loi que tel métal, qui se romprait sous un effort égal à A appliqué une seule fois, finira par se rompre sous un effort plus petit A″ répété un très grand nombre de fois, tandis qu'il doit exister un effort limite A′ qui serait le plus élevé pour lequel les efforts, même répétés indéfiniment, n'amèneraient pas la rupture.

Il serait important de pouvoir déduire A′ de A, connaissant les conditions dans lesquelles sera placé le métal.

Or, d'une part, d'après la loi de Wœhler, ces conditions dépendent de l'écart des efforts extrêmes que le métal aura à supporter dans la construction ; d'autre part nous apprendrons à calculer ces efforts extrêmes.

Désignons par $f_{min.}$ la charge extrême minima, et par $f_{max.}$ la charge maxima que supportera une pièce, et convenons de donner le signe + aux compressions et le signe — aux tractions ; il semble naturel d'admettre que A′ doit être à la fois une fonction de A, de $f_{min.}$ et de $f_{max.}$

Divers ingénieurs ont cherché à déduire cette fonction des résultats d'expériences de Wœhler ; mais leurs formules sont en général compliquées.

Une seule, celle de M. **Séjourné**, ingénieur des ponts et chaussées, est véritablement simple et comme elle concorde suffisamment avec les expériences de Wœhler c'est elle qui semble devoir être admise en France.

Elle ne fait pas connaître les limites de rupture à admettre, mais seulement les résistances de sécurité ; c'est pourquoi nous ne l'expliquerons que plus loin (v. n° 138).

§ 6. — Influence du mode de fabrication et des actions mécaniques déformatrices

129. **Acier moulé.** — Par les procédés nouveaux, Bessemer ou autres, on peut en quelques minutes transformer de la fonte en acier tout prêt à être coulé. L'acier coulé présente une texture cristalline d'autant plus marquée qu'il s'est refroidi plus lentement. Sa résistance est inférieure à celle de l'acier laminé ou forgé, mais elle est le double, au moins, de celle de la fonte. Son allongement de striction peut atteindre de 1 à 5 p. 100, et sa résistance de rupture, 40 k.

Le *recuit* rend la structure de l'acier moins cristalline, augmente son allongement de striction qui peut atteindre 8 p. 100, et aussi, (ce qui est une exception à la règle habituelle) sa résistance à la rupture, laquelle peut atteindre 45 à 50 k.

Ces aciers ont donc, pour les pièces moulées qui doivent résister à des efforts de traction, un avantage considérable sur la fonte dont la résistance de rupture à la traction est de 10 à 20 k., avec un allongement de striction insignifiant. On ne s'explique pas, en présence de ces avantages et de la faible majoration des prix de l'acier coulé sur ceux de la fonte, pourquoi le premier métal n'est pas plus souvent substitué au second pour les pièces moulées.

La *trempe*, suivie d'un recuit, améliore énormément l'acier ; elle peut lui donner 45 k. de résistance avec 20 p. 100 d'allongement de striction, ou 60 k. de résistance avec 12 p. 100 d'allongement de striction. Malheureusement la trempe n'est, jusqu'à présent, praticable que pour de petites pièces.

130. **Acier laminé.** — (*a*) **Température de laminage.** — Les aciers extra-doux (1,2 à 1,5 p. 1000 de carbone), qui sont du fer presque pur, ont un point de fusion très élevé ; on peut les laminer au rouge blanc. Les aciers plus durs (5 à 6 p. 1000 de carbone) sont plus fusibles ; ils doivent être laminés au jaune orange ; au-delà de cette température, ils seraient trop voisins de leur point de fusion, et tomberaient en débris sous la pression du laminoir.

Le laminage doit être terminé au rouge vif ; sinon, à une température plus haute, le métal ne serait pas assez *corroyé* et garderait sa texture cristalline ; à une température plus basse il serait *écroui*. Il aurait gagné de la résistance, mais aurait perdu de sa ductilité.

(*b*) **Recuit.** — Le recuit rendra leur ductilité aux aciers qui ont été laminés ou forgés à une température trop basse.

(*c*) **Qualités de l'acier laminé.** — L'acier doux, laminé ou forgé dans de bonnes conditions de température, est un admirable métal de construction. Sa résistance de rupture, évaluée sur la *section primitive*, peut atteindre 41 k., mais, comme l'allongement de striction peut être de 132 p. 100, cela représente un effort de rupture de 73 k. dans la section de striction.

131. **Ecrouissage.** — L'écrouissage se produit lorsque l'on change mécaniquement la forme d'un métal dont la température est inférieure à celle du rouge cerise. On dit alors que l'on opère à froid. On peut écrouir un métal par le martelage, par le laminage à froid, par l'étirage à la filière,

ou tout simplement par la traction. Nous avons vu, en effet, que dans ce dernier cas le métal gagnait de la résistance en perdant de la ductilité. C'est là, précisément, ce qui caractérise l'écrouissage.

L'étirage à la filière est le moyen d'écrouissage le plus puissant : il peut doubler la résistance, mais en annulant presque complètement l'allongement de striction. Un recuit suffisant fait disparaître les effets de l'écrouissage.

132. Effet de la température. — Jusqu'à 200° ou 300°, la résistance du fer et de l'acier n'épouve pas de variations importantes. Vers 360° le fer impur devient très cassant, et il semblerait (mais ce n'est pas encore bien prouvé) que tous les aciers sont, eux aussi, fragiles vers 360°.

Au dessous de zéro, la résistance ne varie pas, mais la ductilité diminue ; par les grands froids, surtout pour les fers phosphoreux, la fragilité augmente considérablement ; c'est ce qui explique, par les hivers rigoureux, les ruptures fréquentes des rails de chemins de fer et des bandages des roues de wagons.

§ 7. — Lois de la compression

133. Formule de la compression. — Les lois de la compression sont les mêmes que celles de la traction et elles sont traduites par la même formule

$$l = \frac{PL}{E\omega}.$$

Seulement l représente ici un *accourcissement*.

Le module d'élasticité E est en général le même à la compression et à la traction; cependant, pour l'acier *trempé*, le module de la traction paraît être beaucoup plus grand que celui à la compression.

134. Phases de la compression. — Les phases de la compression sont analogues à celles de la traction ; nous ne les décrirons donc pas de nouveau. Il y a une *limite d'élasticité* et une *limite de rupture* ; cette rupture se fait par *écrasement*, et non plus par *déchirement*.

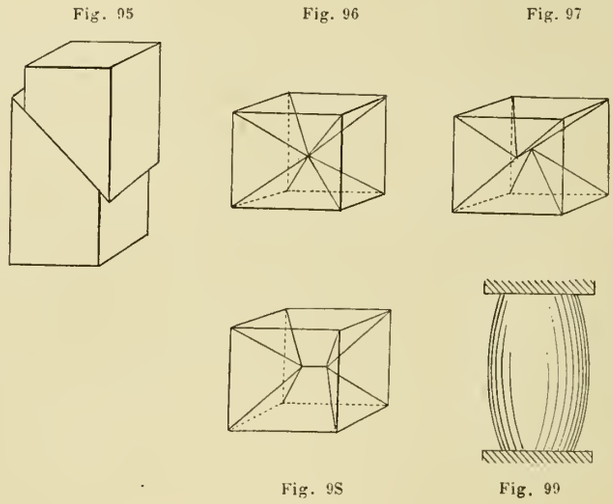
Lorsque l'on fait des expériences de compression il faut opérer sur des *blocs*, c'est-à-dire sur des pièces courtes, parce que, si l'on opère sur des pièces longues, celles-ci fléchissent et se courbent ; on dit alors qu'elles *flambent*. Ce *flambage* met en jeu le phénomène, beaucoup plus complexe et plus dangereux, de la flexion. Nous étudierons au chapitre « *Pièces chargées de bout* » les conditions dans lesquelles doit se trouver une pièce longue comprimée pour ne pas flamber.

La striction, qui s'observait sur les pièces tirées, sera remplacée par un *gonflement* qui aura tendance à devenir général et non pas à se localiser en un point. En effet supposons qu'un gonflement se produise sur une section ; cette section prenant plus d'étendue en surface verra sa pression unitaire diminuer. Par conséquent son gonflement s'arrêtera ; ce sera une autre section qui se gonflera et la dilatation en largeur gagnera de proche en proche. Aussi, tandis que dans la traction, le phénomène de la striction était une aggravation, dans la compression celui du gonflement produira un soulagement relatif.

135. Rupture par écrasement. — La rupture des blocs par écrasement se fait de manières différentes suivant la nature des matériaux.

Dans les corps granuleux, comme la fonte, la pierre tendre, il se manifeste au moment de la rupture un plan de séparation ordinairement à 45° (fig. 95).

Quelquefois aussi, surtout quand le bloc est un cube, il se forme, à la rupture, six pyramides ayant chacune des six faces du cube pour base (fig. 96 à 98).



Le bois se rompt souvent par fentes verticales, après gonflement (fig. 99) ; nous avons dit que ce gonflement est l'inverse de la striction.

La pierre très compacte et le verre se rompent de même, en produisant des écailles latérales.

L'humidité diminue la résistance des bois et des pierres tendres. Cette résistance varie aussi avec la direction des fibres (pour le bois), ou du lit de carrière (pour les pierres). Perpendiculairement aux fibres, le bois ne supporte que les 80 p. 100 de ce qu'il pourrait supporter dans le sens des fibres.

De même la résistance d'une pierre posée sur son lit de carrière est sensiblement plus grande que lorsqu'elle est posée en délit.

§ 8. — Modules et coefficients usuels

136. Résistance théorique. — Résistance de sécurité. — La *résistance théorique* c'est l'effort par unité carrée (m^2 ou mm^2) de section primitive (c'est-à-dire sans striction), qui amènerait la rupture de la pièce dans les conditions où elle est employée, tandis que la *résistance de sécurité* s'obtient en multipliant la première par un coefficient dit : de sécurité, toujours plus petit que l'unité, qui dépend de la prudence du constructeur et de la nature de la construction.

Plus le constructeur sera prudent, plus le coefficient de sécurité qu'il adoptera sera petit. On conçoit aussi, d'après ce que nous avons dit précédemment, que pour des ouvrages de peu de durée ce coefficient peut être plus grand que lorsqu'il s'agit de constructions définitives, devant résister pendant longtemps aux efforts qui tendent à les détruire.

Cependant, dans la pratique, on s'écarte peu des chiffres indiqués dans le tableau ci-après, chiffres qui se trouvent reproduits dans la plupart des aide-mémoire.

137. Tableau des modules et coefficients usuels. — Pour les métaux, la résistance de sécurité est prise, en général, égale au sixième de la limite de rupture, cette dernière étant calculée sur la section primitive et non sur la striction. Pour les bois et pour les pierres on prend ordinairement le dixième de la limite de rupture.

A l'inspection du tableau ci-après on voit que le fer et l'acier ont des résistances à peu près égales, qu'ils travaillent à la traction ou à la compression. Ce sont, suivant l'expression de **M. Trélat**, des matériaux à *résistances symétriques*. C'est là une propriété précieuse pour le constructeur.

Au contraire, la résistance de la fonte à la compression est très grande tandis qu'à la traction cette résistance est beaucoup plus faible. La fonte ne présente pas de striction au moment de la rupture, de sorte qu'on n'est pas prévenu du moment où le métal va céder par traction; elle casse sec.

Il résulte de tout cela que la fonte présente des qualités médiocres, et lorsqu'on l'emploie, c'est surtout à la compression qu'il faut la faire travailler.

Tableau des modules et coefficients de résistance

Nature des matériaux		Poids du mètre cube	Module d'élasticité E	Charge de rupture par m/m carré		Résistance de sécurité par m/m carré	
				à la traction	à la compression	à la traction	à la compression
1		2	3	4	5	6	7
Fer en barres (soudé)		7 800k	20 000	38	30	6	6
Tôle laminée = (1)				36	29		
Tôle laminée ⊥ (2)				32	26		
Acier dur (fondu)		7 850	22 000	65	79	10	10
— demi-dur				55	67		
— doux				45	55		
Fonte		7 200	10 000	13	78	3	10 12
Cuivre		8 400	11 600	23	57	»	»
Zinc		7 000	9 000	2	»	»	»
Bois	Chêne	de 650 à 1 200	de 900 à 1 300	de 6k à 8	de 4k à 5 ,5	0k,6	0k,8
	Sapin	de 460 à 670	de 1 000 à 1 500	de 6 à 8	de 6 à 8	0 ,6	0 ,7
	Châtaignier	de 690 à 1 100	800	de 6 à 8	de 6 à 8	0 ,6	»
Pierres	Granite	2 800	»	»	de 10 à 20	»	Pour les pierres prendre la charge de sécurité égale à un dixième de la charge de rupture.
	Marbre et calcaire dur	2 600	»	»	de 3 à 5	»	
	Bonnes briques	1 900	»	»	de 1 à 2	»	
	Ciment de Portland	2 300	»	»	de 2 à 3	»	

(1) Ce signe indique que l'effort agit parallèlement au sens du laminage.
(2) Ce signe indique que l'effort agit perpendiculairement au sens du laminage.

Note importante. — Ces modules et ces charges sont rapportés au millimètre carré ; pour les rapporter au mètre carré il faudrait les multiplier par 1 million (1.000.000).

138. Résistance de sécurité dans le cas d'efforts répétés ou alternés. — Formule Wœhler Séjourné. — Nous avons énoncé (v. n° 128) la loi de Wœhler relative aux efforts répétés ou alternés. De toutes les formules proposées pour traduire cette loi, celle de M. Séjourné est la plus simple. Voici cette formule

$$R' = \frac{R}{1 - 0{,}4\varphi}.$$

Dans cette formule φ est le rapport (positif ou négatif) de l'effort minimum (f_{min}) à l'effort maximum (f_{max}) que la pièce pourra supporter. On aura soin de mettre en numérateur de φ le plus petit, en valeur absolue, de ces deux efforts extrêmes. Comme signe, un effort de compression sera positif et un effort de traction sera négatif. C'est pourquoi φ peut avoir le signe + ou le signe —. R est la résistance de sécurité telle qu'elle est portée au tableau précédent. Elle est, en général, obtenue en prenant le sixième de l'effort de rupture qui résulterait d'un essai au banc de traction.

R′ sera la résistance de sécurité à adopter pour la pièce considérée.

Premier exemple. — Une pièce de fer, essayée au banc de traction, a donné comme effort de rupture 36 k. dont le sixième donne

$$R = 6 \text{ k}.$$

Dans la construction une pièce de la même qualité de fer supportera, en *intermittences*, les charges extrêmes suivantes :

Traction	$f_{min} = 890$	(signe négatif).
Traction	$f_{max} = 2020.$	(signe négatif).

On a donc :

$$\varphi = \frac{-896}{-2020} = +0{,}44, \qquad \text{d'où}$$

$$0{,}4\varphi = 0{,}176 \qquad \text{et} \qquad 1 - 0{,}4\varphi = 0{,}824.$$

On aura donc pour la résistance de sécurité à adopter R′

$$R' = \frac{R}{1 - 0{,}4\varphi} = \frac{6}{0{,}824} = 7^{k},3.$$

Deuxième exemple. — Une pièce de la même qualité de fer supportera, en *alternances*, les charges extrêmes suivantes :

Compression	$f_{min} = 890$	(signe positif).
Traction	$f_{max} = 2020$	(signe négatif).

On a donc

$$\varphi = \frac{+890}{-2020} = -0{,}44, \qquad \text{d'où}$$

$$0{,}4\varphi = -0{,}176, \quad 1 - 0{,}4\varphi = 1{,}176, \quad \text{et par suite}$$

$$R' = \frac{6}{1{,}176} = 5^{k},1.$$

On voit par ces exemples que cette formule traduit bien, sinon les chiffres absolus qui résultent des expériences de Wœhler, chiffres qui sont peut-être discutables, du moins le sens de sa loi, laquelle est indéniable.

Le facteur φ, qui est le quotient des rapports extrêmes, entre dans le dénominateur de la formule. Cela peut paraître un inconvénient au point de vue algébrique.

En réalité, ainsi que nous le verrons en étudiant la flexion, c'est un avantage parce que, dans les formules de la flexion, ce sera la résistance pratique de sécurité R′ qui entrera en dénominateur, ce qui introduira, par conséquent, φ en numérateur des dites formules.

2e SECTION

Tension composée. — Flexion

§ 1. — Formule générale de la flexion

139. Analyse du mouvement de flexion. — (*a*) **Infléchissement élémentaire.** — Le phénomène de la flexion simple, ainsi que nous l'avons vu (v. n° 106, *c.*), est celui dans lequel une des sections transversales du prisme élastique (un des *plateaux*) accomplit une rotation autour d'une droite PQ située dans son plan et passant par son centre de gravité O (fig. 100).

Considérons deux plateaux infiniment voisins réunis par des fibres élastiques. Nous avons déjà appelé cet ensemble un *bi-plateau*.

Laissons le plateau de gauche, A (fig. 100), immobile et faisons tourner celui de droite B d'un angle très petit θ décrit dans le sens positif, c'est-à-dire de droite à gauche, autour de la droite PQ qui passe par son centre de gravité ; cet angle θ se nommera *l'infléchissement* élémentaire (1).

Soit ΔS la distance des deux plateaux.

Le plateau B prend la position B′ et les fibres de la partie supérieure, telles que MN, qui se sont raccourcies de la quantité N*n*, vont former ressort et *pousser* le plateau B′ pour le ramener à sa position primitive.

(1) La fig. 100-II montre le plateau B dans sa vraie grandeur : O est son centre de gravité. PQ est l'axe de rotation. OX′ et OY′ sont supposés être les axes principaux d'inertie. On rappelle ici que, selon nos conventions, tout effort de compression est positif et tout effort de traction est négatif.

Inversement les fibres de la partie inférieure, telles que N′, qui se sont allongées, cherchent à revenir à leur longueur primitive en *tirant* sur le plateau B′.

Nous nous proposons 1° d'évaluer les intensités des tractions ou des compressions exercées dans chaque fibre, telle que MN ou M′N′ ; 2° de prouver que toutes les actions moléculaires ainsi développées dans le bi-plateau AB se réduisent à un couple ; 3° d'évaluer le moment de ce couple en fonction de l'angle d'infléchissement θ, et 4° de montrer comment la forme du prisme élastique intervient par le moment d'inertie de sa section transversale (fig. II).

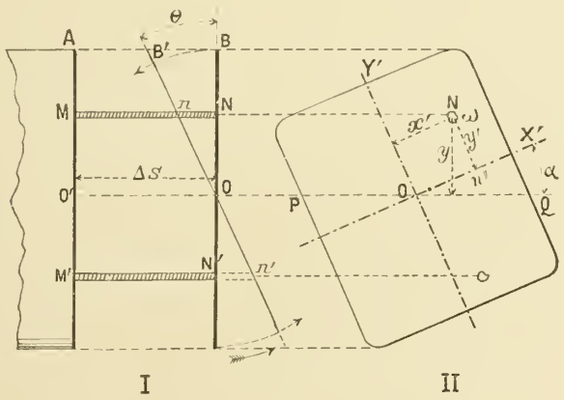


Fig. 100

(*b*) **Effort moléculaire ou tension de chaque fibre.** — Nous supposons que l'angle θ est positif et très petit ; nous pouvons donc confondre l'arc avec la tangente et admettre que l'allongement N*n*, ou l'accourcissement N′*n*′, de chaque fibre se fait suivant une ligne droite.

Si nous désignons par *f* l'effort supporté par la fibre MN de section ω, en appliquant à cette fibre la formule fondamentale de la traction ou de la compression (v. n° 116), nous aurons :

$$f = \frac{\overline{Nn} \times E \times \omega}{\Delta S}$$

Soit *y* la distance de la fibre tirée à l'axe de rotation PQ ; comme θ est l'angle au centre du petit arc N*n*, on a :

$$\overline{Nn} = y\theta$$

et en remplaçant dans la formule précédente $\overline{Nn}$ par sa valeur il vient

$$(1) \qquad f = \frac{y\theta \times E\omega}{\Delta S}$$

L'effort unitaire, c'est-à-dire par unité de section, serait

$$p = \frac{f}{\omega} \qquad \text{c'est-à dire}$$

$$(1') \qquad p = \frac{Ey\theta}{\Delta S}.$$

Nous avons supposé le cas d'une fibre comprimée MN ; avec une fibre tirée M′N′, le résultat serait le même au signe près.

La fibre MN étant comprimée, nous affecterons l'effort qui lui correspond du signe + tandis que pour la fibre M′N′, qui est tirée, l'effort sera effecté du signe —. On voit que la formule (1) introduit tout naturellement les signes voulus par le fait que la distance *y* est positive au-dessus de l'axe de rotation PQ et négative au-dessous.

(*c*) **Composition de tous les efforts moléculaires. — Leur réduction à un couple.** — Si nous voulons savoir à quoi se réduisent tous les efforts moléculaires, transportons-les au centre de gravité O du plateau B. Chaque transport donne lieu : 1° à une force appliquée en O et 2° à un couple. Mais tous les efforts élémentaires tels que *f*, étant perpendiculaires au plateau B, sont parallèles ; ils auront donc une résultante unique F égale à leur somme algébrique et qui sera

$$F = \Sigma f = \Sigma \frac{Ey\theta\omega}{\Delta S}.$$

Dans cette formule les quantités E, θ et ΔS sont constantes ; elles entrent dans la somme de toutes les expressions telles que *f* comme facteurs communs ; on pourra donc écrire la formule ci-dessus de la manière suivante :

$$F = \frac{E\theta}{\Delta S} \Sigma y\omega.$$

Si maintenant nous remarquons que l'axe de rotation, par rapport auquel nous avons mesuré les distances *y*, passe par le centre de gravité du plateau B et que, dès lors, $\Sigma\omega y = 0$, nous verrons que $F = 0$.

Donc la résultante de translation est nulle et tous les efforts moléculaires, composés entre eux, se réduisent à un couple que nous allons maintenant étudier.

140. **Etude du couple résultant** (1). — Lorsque nous effectuons le transport, au point O, de toutes les forces telles que *f*, chaque transport donne lieu à un couple dont le moment est le produit de la force *f* par sa distance *y*, au centre de translation O.

Nous nous proposons maintenant de trouver la valeur du moment du couple résultant dans le cas le plus général, celui où l'axe PQ occupe une direction quelconque, ainsi que nous l'avons supposé dans la figure 100-II.

Nous allons démontrer que le plan de ce couple a pour trace sur le plateau une droite qui forme avec l'axe de flexion PQ deux diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie du plateau.

(*a*) **Moments élémentaires évalués suivant les axes d'inertie.** — Soient OX′ et OY′ les axes principaux d'inertie de la section transversale du plateau B ; désignons par *x*′ et par *y*′ les coordonnées d'un point quelconque N de

(1) Avant d'aborder cet alinéa le lecteur fera bien de relire, dans la première partie, tout ce qui a rapport à la théorie de l'ellipse d'inertie (v. nos 79 à 82), et, dans le complément, la théorie des diamètres conjugués de l'ellipse.

cette section transversale par rapport à ces axes principaux OX′ et OY′.

Au lieu de transporter immédiatement au point O la force f, due à la réaction moléculaire développée en N, nous pouvons, sans changer le résultat final, transporter d'abord f de N en n'' sur l'axe d'inertie OX′ puis ensuite de n'' en O.

Le moment $m_{x'}$ du couple ainsi introduit par le premier transport au point n'' sera

$$m_{x'} = f \times y'$$

et le moment $m_{y'}$ que donnera le deuxième transport aura pour valeur

$$m_{y'} = f \times x'.$$

Remplaçons dans ces expressions f par sa valeur (1) trouvée ci-dessus (v. n° 139), il viendra

$$(1) \qquad \begin{cases} m_{x'} = \dfrac{E\theta}{\Delta S}\,\omega y y' \\ m_{y'} = \dfrac{E\theta}{\Delta S}\,\omega y x'. \end{cases}$$

Remarquons de suite que le premier *moment élémentaire* $m_{x'}$ tend à faire tourner autour de OX′ et que, par conséquent, si nous figurions le couple par son axe représentatif (v. théorie des couples, n° 10), cet axe serait précisément dirigé suivant OX′ et nous devrions porter sur OX′ (v. plus loin fig. 101) une longueur égale à la valeur ci-dessus de $m_{x'}$. Il en serait de même pour le moment $m_{y'}$; il serait figuré par son axe dirigé suivant la ligne OY′ sur laquelle on porterait une longueur égale à $m_{y'}$.

(*b*) **Composition des moments élémentaires.** — Cela posé, appelons α l'angle que fait l'axe OX′ avec la direction PQ et remarquons, comme nous l'avons fait dans la théorie de l'ellipse d'inertie, que l'on a :

$$y = y' \cos\alpha + x' \sin\alpha,$$

nous pouvons écrire, en substituant dans (1) :

$$(2) \qquad \begin{cases} m_{x'} = \dfrac{E\theta}{\Delta S}\,[\omega y'^2 \cos\alpha + \omega x' y' \sin\alpha] \\ m_{y'} = \dfrac{E\theta}{\Delta S}\,[\omega x' y' \cos\alpha + \omega x'^2 \sin\alpha]. \end{cases}$$

En composant tous les couples analogues, répondant à toutes les fibres de la section B, nous obtiendrons la valeur des couples résultants et il viendra en les totalisant :

$$(3) \qquad M_{x'} = \frac{E\theta}{\Delta S}\,\Sigma(\omega y'^2 \cos\alpha + \omega x' y' \sin\alpha),$$

$$(4) \qquad M_{y'} = \frac{E\theta}{\Delta S}\,\Sigma(\omega x' y' \cos\alpha + \omega x'^2 \sin\alpha).$$

Mais, par hypothèse, OX′ et OY′ sont les axes principaux d'inertie, on a donc (v. n° 79)

$$\Sigma\omega x' y' = 0,$$

et les expressions (3) et (4) peuvent s'écrire

$$M_{x'} = \frac{E\theta}{\Delta S} \cos\alpha\, \Sigma\omega y'^2,$$

$$M_{y'} = \frac{E\theta}{\Delta S} \sin\alpha\, \Sigma\omega x'^2.$$

Or nous savons que $\Sigma\omega y'^2$ c'est le moment d'inertie de la section transversale B par rapport à l'axe OX′, moment d'inertie que nous avons représenté par $I_{x'}$; de même $\Sigma\omega x'^2$ c'est le moment d'inertie de la même section par rapport à l'axe OY′, moment d'inertie que nous avons représenté par $I_{y'}$.

Nous pourrons donc écrire

$$(5) \qquad M_{x'} = \frac{E\theta}{\Delta S} \cos\alpha\, I_{x'},$$

$$(6) \qquad M_{y'} = \frac{E\theta}{\Delta S} \sin\alpha\, I_{y'}.$$

Tels sont, non plus les moments élémentaires, mais les *moments totaux* évalués suivant les axes principaux d'inertie OX′ et OY′. Pour avoir le moment du couple définitif, ou plutôt l'axe représentatif de ce moment, nous allons composer $M_{x'}$ et $M_{y'}$ d'après la règle du parallélogramme des couples.

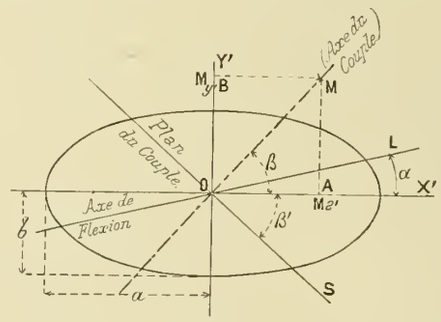


Fig. 101

A cet effet : à partir du point O (fig. 101) (1), origine des coordonnées, portons sur les axes OX′ et OY′, en OA et OB, les valeurs (5) et (6) des moments de flexion que nous venons de trouver ; l'axe du couple résultant sera donné en grandeur et direction par la diagonale OM du parallélogramme construit sur OA et sur OB, comme côtés.

Soit β l'angle que fait l'axe du couple OM avec l'axe OX′, on aura :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_{y'}}{M_{x'}};$$

remplaçant $M_{x'}$ et $M_{y'}$ par leurs valeurs tirées des expressions (5) et (6) et se rappelant que, a et b étant les demi-axes de l'ellipse d'inertie, on a :

$$\frac{I_{y'}}{I_{x'}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

On aura

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{I_{y'} \sin\alpha}{I_{x'} \cos\alpha} = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Il nous reste maintenant à prouver que la trace OS du plan du couple résultant est conjuguée de l'axe de flexion OL par rapport à l'ellipse centrale d'inertie du plateau B ; n'oublions pas que OS, plan du couple, est perpendiculaire sur OM, axe de ce couple.

(1) Sur la fig. 101 l'axe d'infléchissement est OL ; c'est la même ligne que celle qui était représentée en PQ sur la fig. 100.

En effet, soit β' l'angle (négatif ici) que fait OS avec l'axe OX'; puisque OS est perpendiculaire sur OM on a (v.C[1],ch.II) :

$$\operatorname{tg}\beta \times \operatorname{tg}\beta' = -1.$$

Remplaçant dans (7) la valeur de tg β tirée de cette expression il vient :

$$\operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{tg}\beta' = -\frac{b^2}{a^2},$$

ce qui prouve que les deux directions OL et OS sont conjuguées. C. Q. F. D.

Il résulte de cette dernière relation le théorème suivant :

(*c*) **Théorème sur l'orientation du couple de flexion.** — « Dans toute flexion l'axe d'infléchissement (OL) et la trace « (OS) du plan du couple de flexion sont conjugués par rap- « port à l'ellipse d'inertie de la section fléchie. »

Plus simplement, mais aussi moins complètement, le théorème pourrait s'énoncer :

« Le couple de flexion est conjugué de son axe d'infléchissement. »

Inversement, quand on donne la direction du plan du couple on peut en déduire la position de l'axe d'infléchissement.

§ 2. — Cas usuels de la flexion

141. Cas où l'axe de rotation est en même temps un axe principal d'inertie. — Si l'axe d'infléchissement PQ (fig. 100) est confondu avec l'un des axes principaux d'inertie, OX' par exemple, l'angle α est nul, dès lors :

$y' = y$, $x' = x$, et l'on a dans ce cas :

$$\sin\alpha = 0, \quad \text{et} \quad \cos\alpha = 1$$

par suite les composantes du couple résultant sont

$$M_x = \frac{E\theta}{\Delta S} \times I_x$$

et

$$M_y = 0.$$

Le moment du couple résultant est donc

$$(1) \qquad M = \frac{E\theta}{\Delta S} \times I_x$$

et la trace du plan du couple sur le plateau est perpendiculaire à l'axe d'infléchissement PQ. C'est l'axe OY.

Si l'axe d'infléchissement PQ était confondu avec l'axe principal d'inertie OY', en raisonnant comme ci-dessus, on trouverait pour moment du couple résultant

$$(1') \qquad M = \frac{E\theta}{\Delta S} I_y.$$

Ces cas particuliers sont ceux qui se présentent le plus souvent dans la pratique. Dans ce qui va suivre nous supposerons donc que l'axe de rotation est toujours confondu avec l'un des axes de symétrie.

Pour simplifier nous écrirons dorénavant I sans indice.

142. Equation de l'infléchissement. — En résolvant l'équation (1) du n° **141** par rapport à θ on a la relation :

$$(A) \qquad \theta = \frac{M}{EI}\Delta S.$$

Cette formule est très importante, nous l'appellerons *formule* ou *équation de l'infléchissement*. Elle est facile à retenir car on voit que l'effet produit, c'est-à-dire θ, est proportionnel : 1° à la cause de la flexion, c'est-à-dire au moment fléchissant M ; 2° à la distance des plateaux considérés, tandis que, 3° elle est inversement proportionnelle au module d'élasticité E, ce qui est naturel puisque ce module indique, en quelque sorte, la puissance de résistance de la matière à toute cause d'indétiguration, et 4° au moment d'inertie I du plateau considéré.

Cette quantité I donne ici l'influence de la forme du plateau, c'est-à-dire, en définitive, de la figure de la pièce considérée.

Il est bon, dans cette formule (A), de voir la part qui est faite à chaque chose :

θ. Infléchissement : c'est l'*effet produit*.

M. Moment fléchissant : c'est la *cause*.

E. Module d'élasticité : c'est la *capacité d'indéfiguration* de la matière.

I. Moment d'inertie : c'est la *capacité d'inflexibilité* du plateau, ou *profil*, de l'organe de construction considéré.

On voit également que le moment d'inertie I étant, dans ses éléments, proportionnel au carré y^2 de la distance de chaque fibre à l'axe d'infléchissement, ce moment d'inertie augmentera plus vite que les dimensions en hauteur de la pièce ; l'infléchissement, θ, pris par celle-ci, diminuera donc très vite, toutes choses égales d'ailleurs, quand la hauteur de la section de la pièce augmentera.

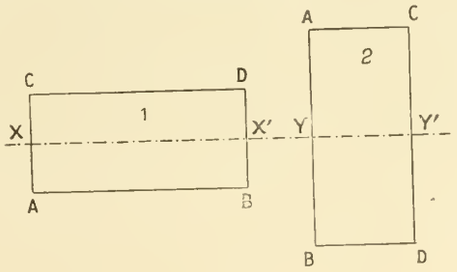


Fig. 102

Ainsi, par exemple, prenons une poutre dont la section AB, CD soit un rectangle (fig. 102), dans lequel le côté AB est le double du côté BD. Si nous supposons que le grand côté AB est horizontal, le moment d'inertie présente une certaine valeur I.

Donnons quartier à la poutre, c'est-à-dire rendons vertical

le côté AB qui était primitivement horizontal ; le moment d'inertie I_y, dans ce deuxième cas, est non pas le double mais le quadruple de I_x ; de sorte que l'infléchissement, dans ce dernier cas, n'est que le quart de ce qu'il était dans le premier cas. On pourrait presque dire que posée *de champ* la pièce se déforme quatre fois moins que posée *à plat*.

143. **Equation de l'effort fibraire** (1). — (*a*) **Pour une fibre quelconque.** — Il est également important de connaître l'effort unitaire p, c'est-à-dire l'effort par millimètre carré de section, qui sera imposé à une fibre déterminée par un moment fléchissant M.

Reprenons la formule (1') du n° 139.

$$p = \frac{Ey\theta}{\Delta S}.$$

Dans cette formule remplaçons θ par sa valeur donnée par l'équation d'infléchissement (A), nous obtenons

$$p = \frac{Ey}{\Delta S} \times \frac{M}{EI} \times \Delta S$$

qui, en simplifiant, nous donne l'équation (B).

$$\text{(B)} \qquad p = \frac{My}{I}$$

Cette formule est aussi très importante ; nous la nommerons *formule ou équation de l'effort fibraire.*

Nous remarquerons dans cette formule que l'effort fibraire est proportionnel à la distance y de la fibre considérée à l'axe de flexion et qu'il est indépendant du module d'élasticité. Les efforts fibraires ne dépendent donc pas de la nature des matériaux.

(*b*) **Pour la fibre extrême.** — Puisque la distance y entre en numérateur dans la formule (B) il en résulte que les fibres les plus fatiguées sont celles qui sont les plus éloignées de l'axe. Aussi, lorsqu'une pièce travaillera à la flexion, c'est sur la fibre la plus éloignée, la *fibre extrême*, que nous chercherons à déterminer si cet effort est compatible avec la résistance de la matière dont est formé le prisme élastique ; si cette condition est réalisée pour la fibre extrême elle le sera, *a fortiori*, pour tout le reste de la section.

Si, par exemple, nous avons un prisme dont la section transversale est AB (fig. 103) et dont l'axe de flexion est XX' ; en menant des tangentes au contour de la section parallèlement à XX', les points de tangence A et B seront ceux sur lesquels devront porter nos calculs. Soit v la distance à l'axe du point A qui en est le plus éloigné ; l'effort fibraire en ce point sera donné par la formule

$$p' = \frac{Mv}{I}$$

(1) Le mot *fibraire* n'est pas français ; nous le créons par analogie avec le mot *moléculaire* qui dérive de molécule comme fibraire pourrait dériver de fibre.

que l'on écrit quelquefois sous la forme

$$\text{(C)} \qquad p' = \frac{M}{\left(\frac{I}{v}\right)}$$

Telle est l'équation *de la fibre extrême.*

L'expression I : v qui entre en dénominateur dans cette équation joue un rôle considérable dans la résistance des matériaux ; plus sa valeur sera grande, moins la fibre extrême sera fatiguée.

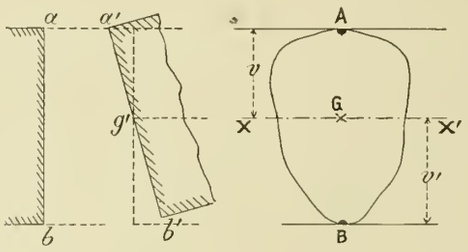


Fig. 103

Remarque. — Sur la figure 103 la fibre extrême supérieure A est comprimée ; sa distance à l'axe de flexion est v. Mais la fibre extrême inférieure B est tirée ; si sa distance v' à l'axe est plus grande que v, elle sera plus éprouvée que la fibre A.

(*c*) **Moment de résistance d'un profil.** — On donne généralement à cette expression I : v le nom de *moment de résistance de la section.* Il est bon que l'on sache que quelques auteurs ont adopté pour elle le nom de *moment d'élasticité.* Il est préférable, à notre avis, de la désigner sous le nom de *moment de résistance* du profil, puisque la résistance de la pièce, au droit de ce profil, croît avec cette quantité I : v. Néanmoins, nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre.

(*d*) **Moment de résistance du rectangle.** — Reportons-nous au n° 84 ; nous y voyons que le moment d'inertie du rectangle, dont les côtés sont a et b, par rapport à un axe qui, passant par son centre de gravité, serait parallèle au côté a, est

$$I = \frac{ab^3}{12}.$$

La distance v de la fibre la plus éloignée est égale à 1/2 b, on aura donc pour le rectangle

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}.$$

(*e*) **Moment de résistance du cercle.** — Le moment d'inertie du cercle par rapport à un axe qui passerait par son centre est (v. n° 93)

$$I = \frac{\pi R^4}{4}.$$

On a évidemment $v = R$, par conséquent

$$\frac{I}{v} = \frac{\pi R^3}{4}.$$

Nous indiquerons plus tard, à l'occasion des poutres, des planchers, des arcs... la manière de trouver les moments de résistance des profils usuels des principaux fers, tels que : fers à Té et à double Té, cornières, fers circulaires creux, fers en croix, fers composites, etc.

(*f*) **Application de la formule de la fibre extrême.** — Comme exemple d'application de la formule (C), reprenons la section rectangulaire ABCD (fig. 102) que nous avons déjà considérée dans deux positions, au point de vue des infléchissements, et proposons-nous de comparer ces deux mêmes positions de la section au point de vue des efforts développés dans la fibre extrême.

Quand on prend le rectangle en hauteur (fig. 102-2) en appelant a sa petite base et b sa grande base, on a :

$$I = \frac{ab^3}{12} \qquad \text{et} \qquad \frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}.$$

Si on le prend en largeur (fig. 102-1), on a :

$$I' = \frac{ba^3}{12} \qquad \text{et} \qquad \frac{I'}{v'} = \frac{ba^2}{6}.$$

Comparons ces quantités ; nous aurons les rapports :

$$\frac{I}{I'} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I}{v} : \frac{I'}{v'} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi, les moments d'inertie sont entre eux comme les *carrés* des côtés, b et a, tandis que les moments d'élasticité ne sont entre eux que comme les *premières puissances* de ces mêmes côtés.

Cela prouve que, au point de vue de l'indéfiguration, comme ce sont les moments d'inertie I et I' qui les règlent en quelque sorte, la pièce mise en hauteur vaut quatre fois mieux que mise en largeur. Ce nombre 4 provient de ce que nous avons supposé dans l'exemple actuel que $b = 2a$; mais au point de vue de la résistance, comme ce sont, pour ainsi dire, les moments de résistance qui la mesurent, elle ne vaut plus que deux fois mieux.

144. Introduction de la résistance de sécurité. — Equation de l'équarrissage. — Au point de vue de l'économie dans les dépenses, il y a intérêt à choisir les profils de telle sorte que la fibre extrême travaille, dans chacun d'eux, à ce que nous avons appelé la *charge de sécurité* R, parce que, de cette manière, nous aurons juste la quantité de matière voulue pour assurer la conservation indéfinie de l'organe de construction.

Si donc dans la formule (C) nous remplaçons p' par R nous aurons

$$R = \frac{M}{\left(\frac{I}{v}\right)} \qquad \text{ou} \qquad M = \frac{RI}{v}$$

ou encore

$$\text{(D)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{M}{R}.$$

Toutes ces expressions sont des formes diverses d'une même équation dont la dernière est la plus usitée ; nous l'appellerons l'*équation de l'équarrissage* parce qu'elle sert à déterminer les dimensions des pièces, c'est-à-dire leur équarrissage, quand on connaît les quantités M et R.

Il y aura, en général, une infinité de profils répondant à l'équation d'équarrissage ; dans le choix à faire on sera guidé par des considérations diverses, soit de facilité de travail, soit d'économie de matière, etc...

145. Fibre neutre. — Si l'on a un prisme élastique MN soumis uniquement à des couples, (ce qui arrivera très rarement), chaque section A ou B ne sera soumise, elle aussi, qu'à un couple et ne prendra qu'un mouvement de flexion en tournant autour d'un axe transversal passant par son centre de gravité. Si l'on réunit, par une ligne, les centres de gravité GG'G'' des différentes sections, la fibre qui aurait cette ligne pour axe ne serait donc ni allongée ni accourcie ; c'est pourquoi nous lui donnons le nom d'*axe neutre* ou de *fibre neutre* de la pièce.

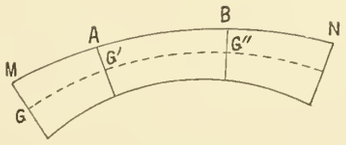


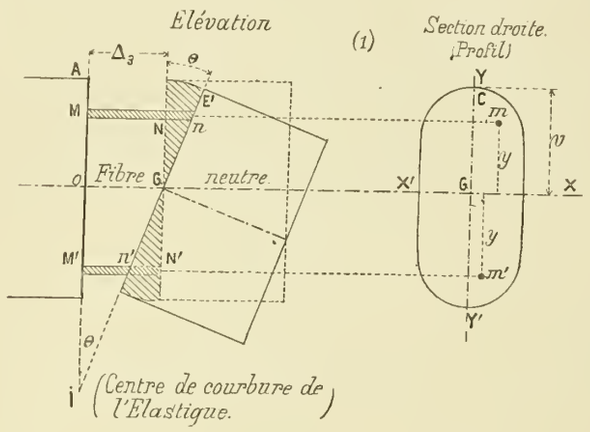
Fig. 104

Dans la même pièce, il y aura toute une série de fibres jouissant de la même propriété ; l'ensemble de ces fibres formera la *surface neutre*.

Enfin, si nous remarquons que, presque toujours, les pièces sont symétriques et symétriquement chargées, par rapport à un plan vertical, toutes les fibres neutres se projettent alors sur un plan parallèle à ce plan de symétrie, suivant une ligne GG'G''...; de sorte que la surface neutre sera un cylindre dont la base, sur le plan de projection, sera la courbe GG'G''...; ce sera le *cylindre neutre*, c'est-à-dire le cylindre des fibres neutres.

146. Résumé. — Comme résumé nous avons réuni dans le tableau ci-dessous les résultats auxquels nous sommes arrivés dans notre étude de la flexion.

TABLEAU DES FORMULES DE FLEXION



EQUATIONS

(A) De l'infléchissement..... $\theta = \frac{M}{EI}\Delta s$.

(B) De l'effort fibraire..... $p = \frac{My}{I}$.

(C) De la fibre extrême..... $p' = \frac{Mv}{I}$.

(D) D'équarrissage..... $\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$.

NOTATIONS ET SIGNES

θ	*Infléchissement :* Positif, si les fibres du haut sont accourcies. Négatif, si les fibres du haut sont allongées.
$I = \Sigma\omega y^2$	*Moment d'inertie* ou encore Capacité d'inflexibilité du profil.
$\frac{I}{v}$	*Moment d'élasticité* ou encore *Moment de résistance* du profil, à la flexion.
y	*Distance d'une fibre à l'axe de flexion :* Positive au-dessus / Négative au-dessous } de l'axe d'infléchissement.
v	*Distance de la fibre extrême.*
p ou p'	*Tension unitaire d'une fibre :* Positive, si c'est une compression. Négative, si c'est une traction.
M	*Couple ou moment fléchissant :* Positif, s'il *comprime* les fibres du haut. Négatif, s'il *tire* les fibres du haut.
E	*Module d'élasticité longitudinale de la matière.*
R	*Résistance de sécurité à l'arrachement.*

(1) NOTA. — Sur cette figure l'infléchissement θ est négatif ; il était positif sur les fig. 100 et 103.

En définitive les deux formules importantes sont :

1° *la formule de l'infléchissement* $\theta = \frac{M}{EI}\Delta S$;

2° *la formule de l'équarrissage* $\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$.

La première donne le moyen de calculer les défigurations, la deuxième le moyen de connaître la fatigue de la fibre extrême. Nous avons déjà donné ci-dessus (n° 143) un exemple de leur application en montrant que lorsqu'une poutre de section rectangulaire est posée sur champ, c'est-à-dire en hauteur, elle est dans de bien meilleures conditions au point de vue de la résistance et, surtout, au point de vue de l'indéfiguration que lorsqu'elle est posée à plat.

Cet exemple nous a montré qu'une simple modification dans la répartition de la matière peut changer considérablement les conditions élastiques d'une pièce. Aussi l'industrie a-t-elle appliqué ce principe dans la construction des fers dits en *double Té*.

Dans ces fers la matière a été épanouie aux deux extrémités de la section afin de leur permettre de mieux résister, à poids égal, que les sections pleines.

Fig. 104

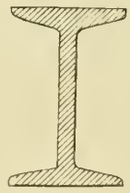


Fig. 105

Nous verrons que les profils usuels de ces fers répondent à deux types biens distincts : les fers à petites ailes, (fig. 104) et les fers à larges ailes (fig. 105).

A résistance égale les deuxièmes sont plus stables que les premiers; mais ils prennent des flèches plus grandes par l'effet des charges : chacun de ces deux profils présente donc ses avantages propres mais porte aussi, avec lui, ses inconvénients. C'est au constructeur à déterminer, d'après les conditions qu'il doit remplir, quel est celui des deux profils qui convient le mieux. Cette question sera élucidée lorsque nous étudierons les planchers.

§ 3. — Limite d'application des formules de la flexion

147. **Désaccord apparent des formules.** — Voici comment des expériences bien conduites, mais mal interprétées, sembleraient indiquer que le métal ne se comporte pas à la flexion comme il le ferait à la traction.

On prend une barre du métal à essayer; on en mesure la section ω; on la tire au banc d'épreuve, jusqu'à ce qu'elle se rompe sous une charge P; on divise alors P par ω et on dit : « Le métal possède telle résistance à la rupture »; admettons, pour fixer les idées, $44^k,30$ par mm^2.

Cela fait, on prend une autre barre du même métal; on la pose sur deux appuis (v. plus loin fig. 106); et on la charge au milieu jusqu'à ce qu'elle se rompe. La rupture se produit, en général, au milieu de sa longueur après qu'a été prise une flèche de plus en plus grande.

On connaît alors le poids qui chargeait la pièce; on connaît aussi sa longueur entre appuis; un calcul ou une construction graphique que nous avons appris à faire par la statique graphique (v. n° 35) nous permet de savoir quelle était alors la valeur du moment fléchissant M, dans la section de rupture. Après quoi appliquant, *à tort*, la formule (C) dite « de la fibre extrême »,

$$(C) \qquad p' = \frac{Mv}{I},$$

on en tire, soi-disant, la valeur de l'effort unitaire p' que supportait la fibre extrême au moment de la rupture. Eh bien! en opérant ainsi on trouve toujours que p', calculé par la formule (C), est supérieur à la résistance de rupture trouvée au banc de traction.

Voici, en effet, les résultats d'épreuves faites sur trois échantillons de métal, A, B et C qui mettent ce fait en évidence.

Nature du métal 1	Résistance absolue de rupture à la traction 2	Effort unitaire ayant, soi-disant, amené la rupture de la fibre extrême; calculé par la formule $p' = M\frac{v}{I}$. 3
A { Acier doux. 0,14 % de carbone.	$44^k,30$	$79^k,20$, soit 1,78 de la résistance absolue.
B { Acier demi-dur. 0,66 % de carbone.	$62^k,00$	86^k, soit 1,36 de la résistance absolue.
C { Acier dur. 0,96 % de carbone.	$83^k,00$	$84^k,8$, soit 1,02 de la résistance absolue.

On conclurait donc de ces expériences que le métal résiste mieux à la rupture quand il est soumis à une flexion que lorsqu'il supporte une simple traction. Ce serait mal raisonner. En effet :

1° Nous avons vu (v. n° 122) que lorsqu'un métal se rompt par traction il présente d'abord, surtout si c'est de l'acier doux, une striction et que, pour être juste, il faudrait prendre pour résistance absolue à la rupture, non pas le quotient de la charge P par la section primitive ω, mais bien ce quotient par la section de striction ω'. Cela aurait pour effet, sur le tableau ci-dessus, de majorer les résistances de rupture d'autant plus que le métal est plus doux; et, de ce fait, l'anomalie apparente serait déjà atténuée.

2° Toutes les formules que nous avons établies pour la flexion ont été obtenues en supposant que la proportionnalité existait entre les efforts imposés aux fibres et les allongements que prennent ces fibres sous leur influence.

On doit donc s'attendre à trouver ces formules en défaut lorsque cette proportionnalité n'existe plus, c'est-à-dire dès que les efforts supportés par les fibres de l'organe examiné seront supérieurs à la limite d'élasticité. Or, surtout pour un métal ductile, lorsque la rupture par flexion se produit il y a longtemps que la plus grande partie des fibres, et particulièrement les fibres extrêmes, sont sorties de la phase d'élasticité, et même de celle de grande extension, pour entrer dans la phase de striction. Donc nous n'avons plus le droit d'appliquer la formule (C) et, pour ces deux raisons, la soi-disant valeur p' de résistance à la rupture qu'elle fournit n'est aucunement en rapport avec la réalité des faits.

148. **Travaux de M. Considère.** — (*a*) **Expérience.** — Afin d'élucider la question, **M. Considère** a exécuté l'expérience suivante :

Un barreau d'acier de section carrée, ayant 39^{mm} de côté

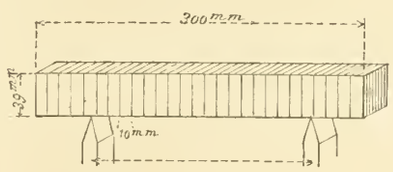


Fig. 106

Fig. 107

et 300^{mm} de longueur, a été posé sur deux appuis distants de 203^{mm} (fig. 106). Il avait préalablement tracé sur les quatre faces de ce barreau des lignes droites très fines, espacées

de 10^{mm} l'une de l'autre; ces lignes représentaient une série de sections transversales, planes, espacées de 10^{mm}.

Ces dispositions prises, il a chargé le milieu de la pièce avec des poids progressivement croissants et il a pu arriver à une charge de $18\,700^{k}$ *sans obtenir la rupture*. Or, la formule de la fibre extrême appliquée dans ce cas à la section du milieu eût donné pour tension de cette fibre $94^{k},9$ par millimètre carré, soit une valeur qui est 1,73 de celle de la charge de rupture par traction directe.

On voit que c'est à très peu près le cas du métal A indiqué au tableau précédent.

M. **Considère** reconnut d'ailleurs, et c'est là une constatation très importante, que les lignes tracées sur les faces du barreau étaient restées droites, mais que la section de la pièce, qui était carrée d'abord, avait pris la forme d'un trapèze curviligne, comme l'indique, en l'exagérant, la fig. 107, sa surface n'ayant presque pas varié ; de $1\,521^{mm^2}$ elle était passée à $1\,491^{mm^2}$.

Les lignes tracées sur les faces du prisme, qui étaient à 10^{mm} l'une de l'autre avant la flexion, étaient, à la fin, à 13^{mm} sur la face inférieure et à $8^{mm},25$ sur la face supérieure. Enfin il put constater que l'axe neutre n'était plus au milieu de la hauteur, mais qu'il s'était relevé.

De tout ceci on peut conclure :

1° Que l'hypothèse de la conservation plane des sections transversales (*hypothèse des plateaux*) est admissible, puisque, même quand on approche de la rupture, les lignes de contour des sections transversales qui étaient droites conservent encore leur rectitude ;

2° Que la formule relative à la charge de la fibre extrême n'est plus vraie au-delà d'une certaine limite, lorsque les allongements des fibres ne sont plus proportionnels aux efforts qui leur sont appliqués, c'est-à-dire lorsque l'on dépasse pour elle la limite d'élasticité.

(*b*) **Explication des faits observés.** — Voici d'ailleurs comment on peut se rendre compte de l'expérience. Expliquons d'abord le changement dans la forme de la section et le relèvement de l'axe neutre.

Les fibres pendant la flexion ont dû passer successivement par les phases suivantes :

1° *Phase d'élasticité.* — Pour les fibres extrêmes et, *a fortiori*, pour les autres, la limite d'élasticité n'étant pas encore atteinte, l'infléchissement des plateaux se fait régulièrement, conformément aux formules que nous avons établies ; l'axe neutre passe par le centre de gravité des plateaux (1). Il n'y a encore ni déformation de section ni relèvement de l'axe neutre.

2° *Phase de grande extension partielle.* — Lorsque la limite d'élasticité a été dépassée pour la fibre extrême, l'allongement de celle-ci augmente plus vite que l'effort et nous avons vu qu'une partie notable de cet allongement est permanent.

La fibre extrême qui est tirée, s'amincit, tandis que la fibre extrême qui est comprimée se gonfle ; la première est devenue plus faible qu'elle n'était tandis que la seconde est, au contraire, devenue plus forte.

Les choses se passent donc, en ne considérant que les fibres extrêmes, comme si deux ressorts B*b* et C*c*, primitivement d'égale force (fig. 108), également tendus et appliqués aux extrémités du plateau, voyaient leurs forces se

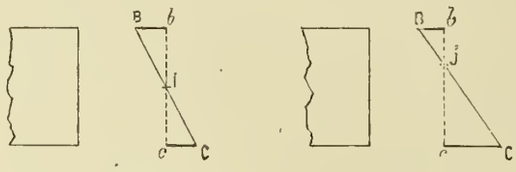


Fig. 108 Fig. 109

modifier. Celle du ressort inférieur C diminuerait tandis que celle du ressort supérieur B augmenterait. Alors le ressort C, cédant plus que le ressort B, l'axe de rotation (fig. 110) se relève et se place en J, plus près de B que de C.

Ceci explique comment, au fur et à mesure que la flexion augmente, l'axe neutre s'éloigne davantage de celle des fibres extrêmes qui est tirée et pourquoi la section s'élargit dans la partie comprimée tandis qu'elle s'amincit dans la partie tirée.

Mais, se demandera-t-on, comment se fait-il que les fibres extrêmes ne se rompent pas lorsqu'elles dépassent la limite du filage limite? En effet, dans son expérience, M. **Considère** a constaté que l'allongement de la fibre extrême tirée avait été de 30 0/0, tandis que, par la traction directe, la période de filage illimité commençait après un allongement de 14 à 15 0/0.

Cette différence provient de ce que, dans le travail du métal à la flexion, toutes les fibres ne sont pas également chargées; or, comme elles sont solidaires les unes des autres, les fibres extrêmes peuvent être en équilibre instable, tandis que les fibres moyennes sont en équilibre stable et résistent aux forces extérieures. Les fibres de la portion *a*, *b*, *c*, *d* (fig. 110), sont dans la période du filage illimité, ou

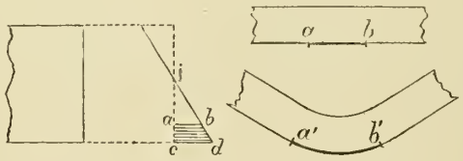


Fig. 110 Fig. 111

peut-être même de striction, tandis que celles de la portion I*ab* sont encore dans la période d'élasticité ou dans celle de

(1) A la condition que le module d'élasticité soit le même à l'extension et à la compression. S'il n'en était pas ainsi, on verra plus loin, ch. IV, ce qui se passe dans les matériaux à composition dissymétrique.

grande extension. C'est la résistance de ces dernières qui empêche le filage des premières de se continuer ; on pourrait appeler cette troisième phase : *phase d'équilibre instable partiel.*

Enfin lorsque la résistance, ou plutôt l'apport de résistance, qui provient de la partie *abl*, n'est plus suffisante, la rupture se produit.

Il est facile de comprendre que ces phénomènes de soutien mutuel des fibres sont d'autant plus sensibles, que le métal est plus ductile.

(*c*) **Les anomalies ne sont qu'apparentes.** — M. **Considère** a tracé en *a* et *b*, sur la pièce avant la flexion, à l'endroit où elle devra se rompre, deux petits repères très rapprochés (fig. 111). Il a mesuré une première fois leur distance *ab* avant l'expérience et une seconde fois leur écartement *a'b'*, au moment de la rupture. Il a pu se rendre compte ainsi de l'allongement proportionnel de la fibre extrême, et il a trouvé qu'il était égal à l'allongement de striction tel qu'il est défini au n° 123.

De plus, après avoir relevé très exactement le profil de la figure 107, c'est-à-dire de la section déformée au moment où elle s'est rompue, il lui a été possible de calculer avec précision, en fonction du moment fléchissant M, la valeur exacte de l'effort unitaire supporté par la fibre extrême inférieure. Et il a trouvé que cet effort était précisément le même que celui que supportait, dans la section de striction, la barre de même métal quand on l'éprouvait à la rupture sur le banc de traction.

M. **Considère** a donc conclu de ses expériences que l'anomalie signalée ci-dessus n'était qu'apparente et qu'elle tenait, d'une part, à ce que l'on appliquait, à tort, la formule (C), et, d'autre part, à ce que l'on rapportait la résistance absolue de rupture à la section primitive au lieu de la rapporter à la section de striction.

(*d*) **Coefficients de majoration à adopter.** — Cette théorie tient compte, en partie, de la ductilité du métal et, en partie aussi, du nombre et, par suite, de l'apport de résistance des fibres qui avoisinent le *centre* de la section. Par conséquent, étant admis que l'épreuve au banc de traction fait connaître la résistance absolue de rupture d'un métal évaluée sur la *section primitive*, et non pas sur la section strictionnée, il serait utile de connaître de quel coefficient de majoration on serait en droit de la frapper pour les calculs de résistance à la flexion.

Il résulte, de ce qui précède, que plus le coefficient de striction sera petit (v. nos 122 et 123) plus ce coefficient de majoration sera élevé.

Mais, d'un autre côté, plus il y aura de matière répartie aux environs du centre, plus le soutien mutuel des fibres sera efficace et plus le coefficient de majoration sera élevé.

Le coefficient final sera donc le produit de deux coefficients partiels ; l'un que l'on pourrait appeler le *coefficient de ductilité* et l'autre le *coefficient de forme.*

Le tableau ci-joint donne des indications à cet égard.

NATURE DES SECTIONS	COEFFICIENTS rapportés à la résistance absolue.	COEFFICIENTS rapportés à la résistance à la rupture, par flexion, du fer carré.	OBSERVATIONS
1	2	3	4
A Double T	1,40	0,77	L'axe neutre est au milieu, la matière y est rare.
B Simple T	1,48	0,81	L'axe neutre est près de l'aile inférieure, la matière y est assez abondante.
C Carré	1,82	1,00	La matière est abondante près de l'axe neutre.
D Rond	2,21	1,23	La matière est très abondante près de l'axe neutre.

Le coefficient de ductilité du métal éprouvé est 1,82, écrit, dans la colonne 2, en caractère gras, en face du carré : il est très sensiblement égal à l'inverse du coefficient de striction ; il dépend, bien entendu, de la nature du métal.

Quant aux coefficients de forme, ils sont inscrits dans la colonne 3 ; enfin, la colonne 2 donne les produits des coefficients de forme par le coefficient de ductilité 1,82.

Exemple : Un acier éprouvé au banc de traction a donné les résultats suivants :

Résistance absolue de rupture $= 62^k$.

Inverse du coefficient de striction $(\omega : \omega') = 1,73$.

(ω étant la section primitive, et ω' étant la section de striction.)

On fabrique avec cet acier une poutre du profil A, à double Té : On demande quelle résistance de rupture (x) on peut adopter dans l'application, supposée justifiée, des formules de la flexion ?

Le coefficient final de majoration sera le produit de 1,73 par 0,77, soit 1,33, et l'on aura par suite

$$x = 62^k \times 1,73 \times 0,77 = 82^k,46.$$

149. **Essais sommaires de qualité.** — L'expérience inverse pourrait se faire comme suit : 1° On romprait par flexion un barreau de l'un des types A, B, C ou D du tableau ci-dessus, par exemple du type carré C ; 2° on calculerait le moment fléchissant M qui a produit la rupture et, à l'aide de la formule de la fibre extrême, on en déduirait le *soi-disant* effort unitaire p' qui a fait rompre la fibre extrême ; 3° on aurait, au préalable, tracé sur la barre des repères a et b très rapprochés (v. plus haut fig. 111) ; on aurait mesuré leur allongement $a'b'$ après rupture, et l'on en aurait déduit le coefficient de ductilité et ensuite le coefficient final de majoration ; comme il vient d'être dit ci-dessus.

Après quoi en *divisant* p' par ce coefficient final on serait en droit de prendre ce quotient pour résistance absolue de rupture par traction directe.

M. **Considère** pense que, sur le chantier, cette expérience pourrait encore être simplifiée de la manière suivante :

Prenons par exemple un barreau ou tout simplement une lame ou un morceau quelconque du métal à essayer ; traçons à sa surface, comme sur la figure 111, deux repères a et b, *très rapprochés* et mesurons leur *distance*, (soit 20 millimètres) ; plions maintenant le barreau, à froid, par un procédé quelconque (marteau, presse, poids appliqué.....) jusqu'à ce qu'il se rompe au milieu de la ligne ab. — Mesurons alors l'écartement $a'b'$ (soit 27 millimètres). Nous en déduisons un allongement proportionnel qui est

$$\frac{27 - 20}{20} = \frac{7}{20} = 35\ 0/0,$$

et nous admettons avec raison, d'après les expériences de M. Considère, que 35 0/0 est aussi l'allongement de striction du métal.

Dès lors, en consultant une table (qui n'est pas encore faite mais qui le sera certainement un jour), faisant connaître les résistances absolues des aciers en fonction de leurs allongements proportionnels, nous pourrions en déduire la résistance absolue de ce métal.

Nous serions donc complètement fixé sur la qualité du métal (résistance et ductilité) et cela sans avoir recours à des appareils de haute précision, car l'expérience ci-dessus peut se faire, presque séance tenante, sur un chantier quelconque et elle n'exige que des mesures de longueurs.

* § 4. — Flexion dans les matériaux a élasticité dissymétrique

150. **Position de l'axe d'infléchissement.** — (a) **Cas général.** — Certains matériaux n'ont pas le même module d'élasticité à la compression qu'à la traction. Désignons par E′ le premier (compression) et par E″ le second (traction). Ainsi, pour l'acier trempé, E′, module à la compression, serait, paraît-il, beaucoup plus petit que E″, module à la traction ; autrement dit, il serait beaucoup plus facile de raccourcir un fil d'acier trempé que de l'allonger. Nous allons montrer que, dans ce cas, l'axe d'infléchissement ne passe pas par le centre de gravité de la section. En effet, reportons-nous à l'établissement de la formule fondamentale (v. n° 141).

Nous avons montré que toutes les réactions moléculaires développées par l'infléchissement θ donnaient comme résultante de transport F

$$F = \Sigma \frac{Ey\theta\omega}{\Delta S}.$$

Les forces moléculaires, telles que f, dont F est la somme, avaient pour expression

$$f = \frac{Ey\theta\omega}{\Delta S}.$$

Les unes sont situées au-dessus de l'axe de flexion : pour elles leur distance, que nous désignerons par y', est positive, et si θ est positif alors elles sont comprimées. Pour elles aussi, c'est le module d'élasticité à la compression E′ qui convient. Pour les autres, situées au-dessous, y est négatif (désignons par y'' ces y négatifs). Elles sont tirées et il faut leur appliquer le module E″. Dès lors faisons deux parts dans la valeur de F. (Fig. 112.)

L'une F′ sera la somme des compressions

$$F' = \Sigma \frac{E'y'\theta\omega'}{\Delta S} = \frac{\theta}{\Delta S} \times E' \times \Sigma\omega'y' \quad \text{(positif)}.$$

L'autre F″ sera la somme des tractions

$$F'' = \frac{\theta}{\Delta S} \times E'' \times \Sigma\omega''y'' \quad \text{(négatif)}.$$

Pour que toutes les réactions moléculaires se réduisent à un couple, c'est-à-dire pour que XX′ soit l'axe d'infléchissement, il faut que la résultante de transport soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait : $F' = F''$, ou, en substituant à F′ et à F″ leurs valeurs.

(1) $$E' \times \Sigma\omega'y' = E'' \times \Sigma\omega''y''.$$

Soit XX′ l'axe d'infléchissement établi d'après cette condition. Il divisera la section en deux parties. Désignons par Ω' l'aire de la partie supérieure, comprimée, par G′ son cen-

tre de gravité et par z' la distance de ce point à l'axe. Désignons par Ω'', G'' et z'' les quantités analogues pour la section inférieure, qui est tirée. On aura d'après la théorie des centres de gravité :

$$\Sigma\omega' y' = \Omega' z' \qquad \text{et} \qquad \Sigma\omega'' y'' = \Omega'' z''.$$

Dès lors, en substituant dans (1) on a

$$E' \times \Omega' z' = E'' \times \Omega'' z'', \qquad \text{ou encore}$$

$$(2) \qquad \frac{\Omega' z'}{\Omega'' z''} = \frac{E''}{E'},$$

formule qui peut se traduire par l'énoncé suivant :

Théorème. — « Dans les pièces fléchies, à *élasticités dissymétriques*, l'axe d'infléchissement se place de telle sorte « que les moments statiques ($\Omega' z'$ et $\Omega'' z''$), pris par rapport « à cet axe, des segments qu'il détermine dans la section « soient en raison inverse des modules d'élasticité à la com- « pression et à la traction. »

(*b*) **Cas du rectangle.** — Si la section est un rectangle de largeur a et de hauteur b (fig. 113), l'axe neutre partagera la hauteur b en deux parties de hauteur b' et b'' et les moments statiques des deux segments auront pour expression :

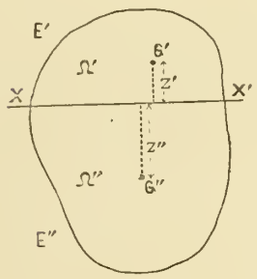


Fig. 112

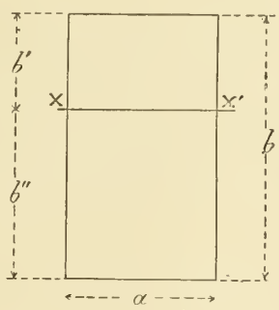


Fig. 113

$$\frac{ab'^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{ab''^2}{2}.$$

On devra donc avoir :

$$\frac{b'^2}{b''^2} = \frac{E''}{E'}; \qquad \text{ou}$$

$$(3) \qquad \frac{b'}{b''} = \frac{\sqrt{E''}}{\sqrt{E'}}.$$

« Dans un rectangle l'axe d'infléchissement partage la « hauteur dans le rapport *inverse* des racines carrées des mo- « dules d'élasticité. »

151. Modifications à apporter aux formules. — Voyons rapidement, pour le rectangle, ce que deviennent alors les formules générales de la flexion.

Evaluons les moments fléchissants.

Pour la partie comprimée on aura

$$M' = \frac{E'\theta}{\Delta S} I',$$

pour la partie tirée

$$M'' = \frac{E''\theta}{\Delta S} I'',$$

formules dans lesquelles I' et I'' représenteront les moments d'inertie des segments *par rapport à l'axe de flexion*. On aura dans le cas actuel (v. n° 83)

$$I' = \frac{ab'^3}{3} \qquad \text{et} \qquad I'' = \frac{ab''^3}{3}.$$

En combinant ces équations avec celles ci-dessus, qui donnent M' et M'', on en déduit :

$$\frac{M'}{M''} = \frac{E'I'}{E''I''} = \frac{b''^2}{b'^2} \times \frac{b'^3}{b''^3} = \frac{b'}{b''}.$$

Etudions maintenant les efforts fibraires extrêmes. Ils ont pour expression :

1° Dans la partie comprimée :

$$p' = \frac{M'}{I'} b';$$

2° Dans la partie tirée :

$$p'' = \frac{M''}{I''} b''.$$

Cherchons le rapport de p' à p'' ; nous aurons :

$$\frac{p'}{p''} = \frac{M'}{M''} \times \frac{I''}{I'} \times \frac{b'}{b''}$$

d'où, en utilisant les relations précédentes,

$$(4) \qquad \frac{p'}{p''} = \frac{\sqrt{E'}}{\sqrt{E''}}.$$

Ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait croire *a priori*, la fibre la moins déformée est celle qui fatigue le plus ; et « Dans un rectangle les efforts fibraires extrêmes sont « en raison *directe* des racines carrées des modules d'élas- « ticité. »

152. Conséquences d'une résistance dissymétrique. — Si les résistances absolues, ainsi que les résistances de sécurité, sont différentes à la compression et à la traction, les conséquences de la dissymétrie dans l'élasticité peuvent être aggravées ou atténuées, suivant les cas.

Par exemple, si les résistances de sécurité sont proportionnelles à $\sqrt{E'}$ et $\sqrt{E''}$, alors, d'après la formule (4), les fibres extrêmes pourront travailler toutes deux, en même temps, à la résistance de sécurité et nous serons dans d'excellentes conditions ; mais si leur rapport est dans un sens inverse ce sera le contraire.

Tel est le cas de la fonte : son module d'élasticité E'', à la traction, est plus fort que le module E', à la compression ; au contraire, sa résistance à la traction est beaucoup plus faible qu'à la compression ; c'est pourquoi la fonte est un détestable métal pour résister à la flexion.

CHAPITRE III

GLISSEMENT

1re SECTION

Glissement simple ou tranchage

§ 1. — Lois du glissement simple

153. **Expérience ; formule fondamentale.** — Le glissement simple que nous avons appelé aussi déviation transversale, ou *tranchage*, est, ainsi que nous l'avons déjà vu (v. nos 106, 107, 108), l'action qui se produit entre deux sections très rapprochées A et B (fig. 114) auxquelles les forces extérieures tendent à donner un mouvement relatif paralèlle à leur plan de direction commune.

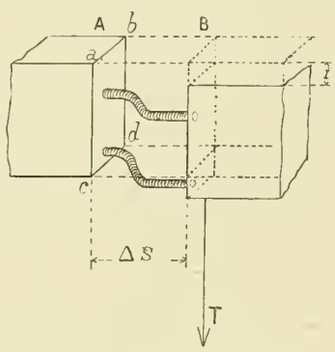


Fig. 114

Nous avons appelé *effort tranchant* la force T, qui produit cet effet.

On conçoit qu'il est beaucoup plus difficile que pour les tractions et les compressions de faire des expériences sur les coefficients d'élasticité au glissement transversal ou tranchage. En effet, dès que la distance ΔS des deux plateaux devient appréciable, l'effort tranchant que l'on exerce détermine une flexion et non plus un glissement simple.

Aussi le module d'élasticité transversale, que nous désignerons par la lettre G, pour le distinguer du module d'élasticité longitudinale E, a-t-il été déterminé plutôt par des expériences de torsion, ainsi que nous l'indiquerons bientôt, de même que le module d'élasticité longitudinale E peut l'être par des expériences de flexion.

Procédant par analogie, plutôt que par expériences directes, on admet que la loi du glissement transversal est la même que celle des tractions et des compressions.

En désignant par :

Ω la surface d'un plateau ;

ΔS la distance de deux plateaux ;

i le déplacement transversal produit ;

T l'effort tranchant ;

G le module d'élasticité transversale,

nous aurons la formule

$$i = \frac{T\Delta S}{G\Omega}$$

qui est analogue à la formule que nous avons établie pour la traction et qui était :

$$l = \frac{P\Delta S}{E\Omega} \qquad \text{(v. n° 116).}$$

Les expériences ont montré que pour les matériaux de construction on peut admettre pour le module G une valeur comprise entre 0,37 et 0,40 du module E.

154. **Résistance au glissement.** — (*a*) **Résistance de rupture par cisaillement.** — Lorsque l'on coupe une lame de tôle avec une cisaille ou lorsqu'on la perce avec un poinçon pour faire des trous de boulons, on met en jeu la résistance des fibres au glissement transversal. Lorsque la rupture se produit, on dit qu'il y a *cisaillement* du métal. Si à ce moment on divise l'effort tranchant T par la surface cisaillée Ω (v. fig. 113 la surface *abcd*), le rapport T : Ω donne la résistance unitaire de rupture ou résistance absolue au cisaillement.

On conçoit que les expériences sur la résistance à la rupture par cisaillement soient plus faciles à faire que celles sur les déplacements. Voici quelques résultats obtenus par M. **Bauschinger** sur des aciers à proportion variable de carbone. Elles prouvent que la résistance absolue au cisaillement

S′ est dans un rapport à peu près constant, 0,80, avec la résistance absolue à l'arrachement R′.

RÉSISTANCES ABSOLUES AU CISAILLEMENT

PROPORTION 0/0 du carbone contenu dans l'acier essayé	RAPPORT de la résistance S′ au cisaillement à la résistance R′ à l'arrachement.	NATURE DU MÉTAL
0,16	0,77	Acier doux.
0,46	0,67	Acier demi-doux.
0,66	0,66	Acier demi-dur.
0,96	0,70	Acier dur.

En résumé on peut retenir les résultats moyens suivants,
G étant le module d'élasticité transversale,
E étant le module d'élasticité longitudinale,
S′ étant la résistance absolue au cisaillement,
R′ étant la résistance absolue à l'arrachement,

$$G = 0,4E$$
$$S' = 0,8R'.$$

(*b*) **Résistance de sécurité.** — Pour la résistance de sécurité au cisaillement, on adoptera le même coefficient de sécurité, 1/6, que pour la traction et la compression ; autrement dit la résistance de sécurité sera, en général, le sixième de la résistance absolue de rupture. En désignant par S la résistance de sécurité au cisaillement et par R la résistance de sécurité à la traction ou à la compression, on aura donc :

$$S = 0,8R,$$

de même que l'on avait pour les résistances absolues :

$$S' = 0,8R'.$$

Il en résulte que la valeur de S à adopter pour le fer sera généralement comprise entre $4^k,8$ ou 5 k. tandis que pour l'acier on pourra prendre S = 8 k.

155. Influence du sens du laminage. — Lorsque l'on cherche à déterminer la résistance à la rupture d'un métal laminé on observe que le sens du laminage exerce une influence très marquée sur les résultats obtenus.

Voici d'ailleurs les résultats obtenus sur un échantillon de fer soudé dont la résistance de rupture à la traction était $38^k,9$.

Le sens du laminage étant figuré par la flèche M (fig. 115) et le cisaillement ayant été opéré suivant chacune des six directions, 1, 2... 6, les efforts par millimètre carré de section qui ont déterminé la rupture par cisaillement ont été ceux du tableau ci-dessous.

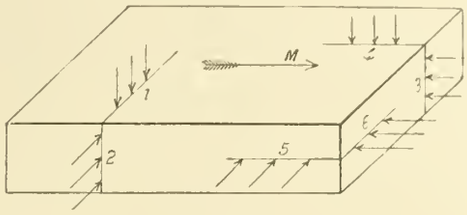


Fig. 115

DIRECTION DU Cisaillement	RÉSISTANCE à la rupture par cisaillement.	OBSERVATIONS
1 2 3	$34^k,40$ 35 ,90 30 ,60	Ces trois directions se présentent souvent dans les constructions. Elles sont assez favorables, le n° 2 surtout.
4	28 ,36	Cette direction peut se présenter, la résistance correspondante est médiocre.
5 6	17 ,67 17 ,67	Ces deux directions ne se présentent jamais ; elles sont d'ailleurs très désavantageuses.

Si l'on tient compte de ce fait que les directions de cisaillement 1, 2 et 3 sont à peu près les seules qui se présentent dans les constructions, on voit que la valeur

$$S = 0,8R$$

donne une sécurité aussi grande au cisaillement que celle que nous avons adoptée pour la traction et la compression.

Nota. — Dans les assemblages par rivets et par boulons, le métal de ces organes travaille au cisaillement.

Nous donnerons la théorie de ces assemblages lorsque nous parlerons des poutres et des arcs en métal.

2e SECTION

Glissement composé ou torsion

§ 2. — Lois de la torsion

156. Etablissement des formules de la torsion. — (*a*) **Forces élémentaires développées.** — Nous avons dit (v. n° 106) que la torsion simple consistait en une rotation axiale de deux plateaux voisins qui tourneraient l'un sur l'autre, comme le feraient deux meules de moulin, autour d'un axe passant par leur centre de gravité, la distance des deux plateaux restant constante.

Dans ce mouvement les fibres qui relient les deux plateaux supportent les mêmes efforts que dans le glissement simple. Elles étaient droites avant la torsion, elles vont prendre une forme courbe.

Soient A et B (fig. 116) deux plateaux très voisins séparés par l'intervalle ΔS. Considérons entre ces plateaux une

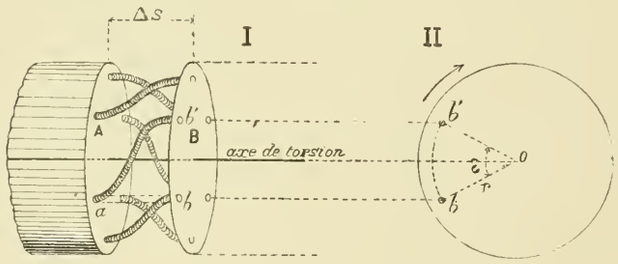


Fig. 116

fibre de section ω qui, avant le mouvement de torsion, occupait la position ab et qui, maintenant que la torsion est réalisée et que la fibre s'est déformée, occupe la position ab'.

Dans le mouvement relatif du plateau B par rapport à A, l'extrémité b de la fibre considérée a décrit l'arc de cercle bb' autour du point O comme centre (fig. 116-II) et cet arc de cercle représente le déplacement transversal que nous avons déjà désigné par la lettre i (v. n° 153).

Soient r le rayon du point b,

ε l'angle élémentaire de torsion [1],

f l'effort tranchant moléculaire développé par la fibre considérée,

on a, l'angle ε étant infiniment petit :

$$\overline{bb'} = i = r \times \varepsilon.$$

(1) Par analogie avec le mot *infléchissement* que nous avons adopté pour représenter l'angle de flexion θ, nous nommerons ε le *torsionnement*, bien que le mot ne soit pas français.

Par conséquent, d'après la formule adoptée pour le cisaillement (v. n° 153), on a

$$r\varepsilon = i = \frac{f\Delta S}{G\omega}, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad f = \frac{r\varepsilon\omega G}{\Delta S}.$$

Cet effort f est dirigé perpendiculairement au rayon r, et tous les points tels que b' en supportent d'analogues. Nous allons les composer entre eux par la règle ordinaire.

(*b*) **Composition des forces élémentaires.** — Par le centre de gravité O, menons deux axes de coordonnées OX et OY, et désignons par x et y les coordonnées du point b' (fig. 117.)

Nous pouvons décomposer la force f en deux autres f' et f'', la première parallèle à OX, la seconde parallèle à OY et ne plus considérer que ces deux forces f' et f'' à la place

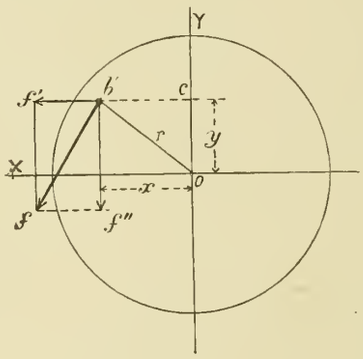


Fig. 117

de la force f qui est leur résultante. Les valeurs de f' et de f'' sont faciles à obtenir car, en considérant les triangles $b'ff'$ et $Ob'c$ qui sont semblables, on a les relations :

$$\frac{f'}{f} = \frac{y}{r} \qquad \text{d'où} \qquad f' = \frac{fy}{r}$$

$$\frac{f''}{f} = \frac{x}{r} \qquad \text{d'où} \qquad f'' = \frac{fx}{r}$$

ou, en remplaçant f par la valeur (1) trouvée ci-dessus,

$$f' = \frac{\varepsilon\omega G y}{\Delta S}$$

$$f'' = \frac{\varepsilon\omega G x}{\Delta S}.$$

Transportons maintenant au centre de gravité O du plateau B toutes les forces telles que f' et f'' développées par les réactions moléculaires de toutes les fibres du plateau B.

Les forces telles que f' étant toutes parallèles à OX auront une résultante F′ égale à leur somme et dirigée parallèlement à OX, et l'on aura :

$$F' = \Sigma f' = \frac{G\varepsilon}{\Delta S}\Sigma\omega y.$$

Pour la même raison, on aura :

$$F'' = \Sigma f'' = \frac{G\varepsilon}{\Delta S}\Sigma\omega x.$$

Mais les axes OX et OY, que nous avons choisis, passent par le centre de gravité, donc $\Sigma\omega x = 0$ et $\Sigma\omega y = 0$.

Par conséquent,

$$F' = 0, \qquad F'' = 0.$$

Ainsi donc, premier point important, la résultante de translation des réactions moléculaires est nulle ; il ne nous reste plus à considérer que le couple résultant.

(*c*) **Composition des couples élémentaires.** — Le transport au point O de chaque force telle que f' a donné lieu à un couple élémentaire dont le moment n' est

$$n' = f'y = \frac{\varepsilon\omega G y^2}{\Delta S}.$$

De même, le transport au point O de chaque force telle que f'' a donné lieu à un couple dont le moment n'' est

$$n'' = f''x = \frac{\varepsilon\omega G x^2}{\Delta S}.$$

D'ailleurs, les axes de tous ces couples sont parallèles entre eux et perpendiculaires au plan de la section puisque toutes les forces f' et f'' sont situées dans le plan de cette section ; le couple résultant total, que nous désignerons par N, aura donc un moment égal à la somme de tous les moments élémentaires tels que n' et n'', et l'on pourra écrire

$$N = \frac{\varepsilon G}{\Delta S}\Sigma(\omega y^2 + \omega x^2)$$

ou bien, comme $x^2 + y^2 = r^2$,

$$N = \frac{\varepsilon G}{\Delta S}\Sigma\omega r^2$$

ou encore, en remarquant que $\Sigma\omega r^2$ est le moment d'inertie polaire (v. n° 74) du plateau B, moment d'inertie que nous avons désigné par J, on aura :

$$N = \frac{\varepsilon G}{\Delta S} J$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{N}{GJ}\Delta S,$$

formule analogue à celle de l'infléchissement (v. n° 142) et qui était, on se le rappelle :

$$\theta = \frac{M}{EI}\Delta S.$$

Par analogie, nous nommerons la formule (2) la *formule du torsionnement*.

157. Efforts tranchants fibraires. — Nous avons trouvé plus haut, formule (1), pour valeur de l'effort moléculaire développé par la fibre *ab* située à une distance r du centre de gravité O,

$$f = \frac{r\varepsilon G\omega}{\Delta S}.$$

La fibre considérée ayant une section ω, il en résulte que l'effort unitaire par millimètre carré est

$$t = \frac{r\varepsilon G}{\Delta S}$$

ou, en remplaçant ε par sa valeur tirée de (2),

$$(3) \qquad t = \frac{N}{J}r,$$

formule de même forme que celle de l'effort fibraire de flexion.

Cette formule (3) montre que l'effort t est proportionnel à la distance r ; par conséquent, la fibre la plus fatiguée sera celle qui est la plus éloignée du centre de gravité. Soit w la distance du centre de gravité à cette fibre extrême ; la formule (3) donnera en l'y appliquant

$$(3') \qquad t' = \frac{Nw}{J};$$

c'est la formule de la *fibre extrême*.

Enfin si dans la formule (3′) nous remplaçons t' par la résistance de sécurité S, nous obtenons *l'équation d'équarrissage* (4)

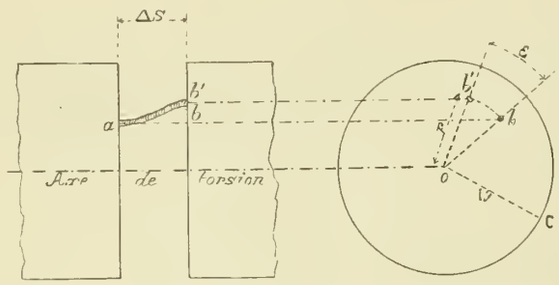
$$(4) \qquad S = \frac{Nw}{J} \quad \text{ou} \quad \frac{J}{w} = \frac{N}{S}.$$

On voit toutes les analogies qui existent entre ces formules et celles qui sont relatives à la flexion.

Il est très rare qu'un organe de construction travaille à la torsion, aussi nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet. En mécanique, au contraire, la torsion intervient fréquemment, particulièrement dans le travail des arbres de machines. D'ailleurs les formules précédentes ne s'appliquent rigoureusement qu'à des sections parfaitement circulaires ; pour toutes les autres formes de sections les formules sont beaucoup plus compliquées.

158. Tableau des formules de torsion. — Nous terminerons cette étude de la torsion en donnant le tableau ci-dessous qui résume tous les résultats auxquels nous sommes arrivés.

TABLEAU DES FORMULES DE TORSION



Équations

(A) Du torsionnement..... $\varepsilon = \frac{N}{GJ}\Delta s,$

(B) De l'effort fibraire..... $t = \frac{N}{J}r,$

(C) De la fibre extrême..... $t' = \frac{Nw}{J},$

(D) D'équarrissage..... $\frac{J}{w} = \frac{N}{S}.$

Notations

ε	Angle de torsion ou *torsionnement*.
$J = \Sigma\omega r^2$	Moment d'inertie *polaire* de la section.
$\frac{J}{w}$	Moment de résistance à la torsion.
t	Effort tranchant unitaire d'une fibre quelconque b'.
r	Sa distance à l'axe de torsion.
t'	Effort tranchant unitaire de la fibre extrême C.
w	Distance à l'axe de torsion de la fibre extrême C.
N	Moment ou couple tordant.
G	Module d'élasticité transversale de la matière.
S	Résistance de sécurité au cisaillement.

CHAPITRE IV

TRAVAIL MOLÉCULAIRE. — DILATATION CALORIFIQUE

§ 1. — Travail moléculaire de tension

159. Travail de compression ou de traction. — On sait que le travail d'une force est le produit de cette force par la composante du chemin que parcourt son point d'application, composante évaluée dans la direction de la force (v. Ct).

Analytiquement, c'est le produit de la force par la projection, sur la direction de cette force, du chemin que parcourt son point d'application.

Si α est l'angle que fait la force avec la tangente à la trajectoire de son point d'application, si F est la force, S le chemin parcouru, t le travail, on aura

$$t = F \times S \times \cos \alpha.$$

Si la force est variable avec la projection du chemin parcouru, et si cette force est représentée en fonction de cette projection du chemin par la courbe MN (fig. 117 — I),

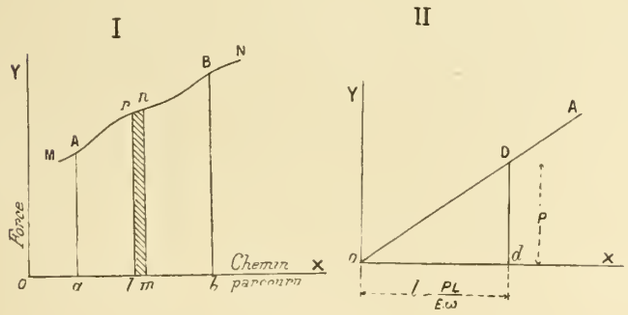


Fig. 117

pour un parcours infiniment petit ΔS, le produit $F \times \Delta S$, qui est le travail élémentaire, sera représenté par l'aire du petit trapèze $lmnr$ et, pour un parcours total ab, le travail total sera représenté par l'aire totale $AabB$.

Cela posé : Supposons, comme cela a lieu pour les efforts de traction et de compression (tant que la limite d'élasticité n'est pas atteinte), que l'effort, c'est-à-dire la force, soit proportionnel à l'allongement, c'est-à-dire au chemin parcouru, et lié à lui par la formule connue (v. n° 117).

$$P = \frac{lE\omega}{L} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{l} = \frac{E\omega}{L} \quad \text{ou}$$

$$l = \frac{PL}{E\omega}.$$

La représentative de la force sera une ligne droite telle que OA (fig. 117 — II) ; le travail moléculaire répondant à une traction qui partant de la valeur zéro arrive à la valeur finale P est donc représenté par l'aire d'un triangle rectangle qui aurait pour hauteur $Dd = P$ et pour base $l = \frac{PL}{E\omega}$. Ce travail aura donc pour expression

$$T_P = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{E\omega}.$$

Si l'on n'étudie que le travail moléculaire réalisé entre deux sections de surface Ω, séparées par une distance infiniment petite ΔS et soumises à un effort longitudinal appliqué à leur centre de gravité, en faisant $L = \Delta S$ on aura pour expression du travail

$$(1) \qquad T_P = \frac{1}{2}\frac{P^2}{E\Omega}\Delta S.$$

160. Travail de flexion. — Chaque fibre accomplit un travail moléculaire donné par la formule (1) ci-dessus.

$$T_f = \frac{1}{2}\frac{f^2}{E\omega}\Delta S,$$

dans laquelle f est l'effort d'une fibre de section ω ; mais nous avons vu dans l'étude de la flexion que l'on avait :

$$f = \frac{My\omega}{I} \quad \text{d'où} \quad f^2 = \frac{M^2y^2\omega^2}{I^2}.$$

Par suite, en remplaçant dans la formule précédente f^2 par cette valeur, on a

$$T_f = \frac{1}{2}\frac{M^2y^2\omega^2}{EI^2\omega} \times \Delta S \qquad \text{d'où :}$$

$$T_f = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2}y^2\omega\Delta S.$$

En faisant la somme des travaux élémentaires analogues pour toutes les fibres de la section considérée, nous aurons

le travail moléculaire dû au moment fléchissant M.

$$T_M = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2}\Delta S \times \Sigma\omega y^2$$

Mais $\Sigma\omega y^2 = I$.

Nous avons donc, en simplifiant,

$$(2) \qquad T_M = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}\Delta S.$$

Tel est le travail moléculaire accompli dans une section transversale sous l'influence d'un moment fléchissant M.

§ 2. — Travail moléculaire de glissement

161. **Travail de tranchage.** — En raisonnant exactement comme nous venons de le faire pour la tension et pour la flexion et en nous basant aussi sur ce que les efforts tranchants sont proportionnels, dans la limite d'élasticité, aux déplacements transversaux des fibres, c'est-à-dire aux chemins parcourus, nous pourrons écrire que le travail T_T dû à un effort tranchant T, a pour expression

$$(3) \qquad T_T = \frac{1}{2}\frac{T^2}{G\Omega}\Delta S.$$

162. **Travail de torsion.** — De même en appelant N le couple de torsion, J le moment d'inertie polaire, nous aurons pour le travail de torsion T_N

$$(4) \qquad T_N = \frac{1}{2}\frac{N^2}{GJ}\Delta S.$$

§ 3. — Travail moléculaire total

163. **Equation du travail.** — Si aux expressions (3) et (4) nous joignons les expressions (1) et (2) auxquelles nous sommes arrivés pour l'effort longitudinal et pour la flexion, et qui sont :

$$T_P = \frac{1}{2}\frac{P^2}{E\omega}\Delta S$$

$$T_M = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}\Delta S,$$

nous connaîtrons le travail moléculaire total produit par un déplacement relatif quelconque de deux sections, lorsque nous aurons décomposé l'effort qui l'a produit en ses quatre efforts ou couples élémentaires, savoir : efforts P et T, couples M et N.

Il suffira de faire la somme des travaux T_P, T_M, T_T et T_N, pour avoir le travail moléculaire total.

Or si nous faisons la somme de ces travaux, pour toutes les sections sans exception, cette somme sera égale au travail total des forces extérieures FF'F''... (v. C^t, Mécanique.)

Soit alors T ce travail total des forces extérieures ; l'équation générale du travail sera donc

$$(5) \qquad T = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{P^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{GJ}\right)\Delta S,$$

la somme étant appliquée à toute la pièce.

Il y a lieu de remarquer que, dans le premier membre de cette équation, le travail T ne s'applique qu'aux forces d'action, attendu que les forces de réaction donnent toujours un travail nul. En effet, les réactions sont dues à l'une des trois causes suivantes :

1° A un point fixe (rotule) ;

2° A un encastrement ;

3° A un roulement sur un plan ou sur une surface [1].

Dans le premier et le deuxième cas le travail est nul parce que les chemins parcourus par le point d'application de la force sont nuls.

Dans le troisième cas, la réaction étant normale au chemin parcouru, la projection de celui-ci sur la direction de la force de réaction est nulle et par suite son travail est nul également. C.Q.F.D.

(1) A ce sujet voir, plus loin, les numéros 167 à 170 de la 3e partie.

§ 4. — Dilatation calorifique

164. **Loi de la dilatation calorifique.** — Tous les corps augmentent de volume lorsqu'on les chauffe, ils se contractent lorsqu'on les refroidit. C'est une loi générale bien connue. Ainsi une barre de fer de 10^m de longueur s'allonge de $12^{mm},2$ en passant de la température de la glace fondante à celle de l'eau bouillante ; une barre de cuivre de même longueur, placée dans les mêmes conditions, s'allonge de $17^{mm},2$, etc.

On peut donc dire que chaque corps possède, au point de vue de sa dilatation par la chaleur, une propriété spécifique qui peut servir à le caractériser.

D'autre part si l'on mesure les accroissements successifs de longueur pris par un même corps solide, lorsque, dans des limites assez étendues, on fait croître sa température de quantités égales, on trouve que ces accroissements de lon-

gueur sont, eux aussi, égaux entre eux. On peut donc en conclure que les accroissements de longueur sont proportionnels aux accroissements de température correspondants.

Il résulte de ceci que si l'on connaît, pour chaque corps, l'allongement de l'unité de longueur prise à 0° lorsque la température de ce corps augmente de 1 degré, on peut en déduire l'allongement que prendrait une barre de même matière d'une longueur quelconque, sous l'influence d'une augmentation de température également quelconque.

La quantité dont s'allonge l'unité de longueur d'un corps, prise à 0°, lorsque sa température augmente de 1 degré a reçu le nom de *coefficient de dilatation linéaire* de ce corps. Nous donnons dans le tableau ci-après les valeurs des coefficients de dilatation des principaux métaux employés par le constructeur.

Lorsque les corps solides approchent de leur point de fusion, leur dilatation croît, en général, plus vite que la température ; mais le constructeur n'a pas à se préoccuper de cette exception à la règle, car les matériaux qu'il emploie ne sont ordinairement soumis qu'à des températures inférieures à 100 degrés centigrades, tandis que leur température de fusion est beaucoup plus élevée. Pour nous il y aura donc toujours proportionnalité sensible entre l'accroissement de température et la dilatation correspondante.

165. **Efforts mécaniques dus à la chaleur.** — (*a*) **Formule des efforts calorifiques.** — Un corps dont la température varie s'allonge ou se raccourcit, suivant les cas ; par conséquent, si l'on assujettit les extrémités de ce corps d'une manière invariable, une *élévation* de température aura pour effet de le faire *pousser* sur ses appuis, tandis qu'un *refroidissement* le fera *tirer;* il est donc important de pouvoir évaluer ces efforts de compression ou de traction qui sont évidemment liés au module d'élasticité et au coefficient de dilatation.

Soient i le coefficient de dilatation d'un corps ;

E son module d'élasticité ;

L sa longueur primitive.

Si l'on élève sa température d'un degré, il s'allongera de

$$Li - l.$$

Mais la formule connue des allongements par traction nous donne l'effort P susceptible de déterminer le même allongement l

$$P = \frac{E\omega l}{L}.$$

Si nous remplaçons dans cette formule l par Li, il viendra

$$P = \frac{E\omega Li}{L} = E\omega i$$

et si l'on suppose $\omega = 1$, on aura la formule dite *des efforts calorifiques :*

(1.) $$P = Ei.$$

Cette formule montre qu'une élévation de température de 1 degré produit, dans une tige fixée à ses deux extrémités, une tension unitaire (par millimètre carré de surface) égale au produit de son coefficient de dilatation par son module d'élasticité. Pour n degrés, cette tension sera n fois plus forte.

Le tableau ci-après indique pour les principaux métaux les renseignements relatifs aux effets de la chaleur.

DÉSIGNATION des Métaux	COEFFICIENT de DILATATION linéaire i	MODULE d'élasticité E	EFFETS CALORIQUES		
			PRODUIT Ei (Tension par degré	Température théorique	
				produisant l'effort de sécurité	produisant l'effort de rupture
1	2	3	4	5	6
Acier	0,0000115	22.000	0^k253	40°	275°
Fer	0,0000122	20.000	0.244	25°	148°
Fonte	0,0000111	10.000	0.111	comp. 99° tract. 27°	703° 117°
Cuivre	0,0000172	11.600	0.200	»	»
Zinc	0,0000294	9.000	0.264	»	»

Nota. — Les chiffres des colonnes 5 et 6 sont obtenus en adoptant comme résistance à la rupture, 70^k pour l'acier, et 36^k pour le fer. (Voir n° 136, Tableau des résistances.)

(*b*) **Températures extrêmes d'une construction.** — Dans nos climats, la température varie entre — 15° et + 35°, ce qui fait un écart total de 50°. En admettant que le montage d'une construction métallique ait été exécuté à + 10°, on voit que toutes nos constructions ont à subir des variations de température d'environ 25°, dans un sens ou dans l'autre, variations qui, d'après le tableau précédent, auraient pour effet d'augmenter les tensions de $6^k,3$ pour l'acier et de $6^k,1$ pour le fer dans les constructions où l'on n'aurait pas eu le soin de faciliter la libre dilatation des organes; pour le fer c'est la résistance de sécurité.

Ce sont là, on le voit, des tensions qu'il n'y a pas lieu de négliger. Ces efforts sont d'autant plus considérables dans les constructions métalliques qu'elles sont plus exposées au soleil et qu'elles sont de couleur plus foncée.

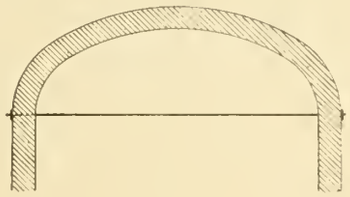


Fig 118

Le tableau précédent permet aussi de se rendre compte que, dans un incendie, les poutres métalliques des planchers

en se dilatant poussent sur les murs, dans lesquels elles sont encastrées, avec un effort suffisant pour disloquer la maçonnerie.

Enfin nous terminerons en disant qu'au Conservatoire des Arts et Métiers on a tiré parti de la dilatation du fer d'une manière fort originale. La voûte d'une des galeries menaçait de s'affaisser en écartant les murs qui la soutenaient ; il s'agissait d'empêcher le mal de s'aggraver et de consolider la partie faible de l'édifice ; voici comment on procéda : les piédroits de la voûte furent réunis par des tirants en fer garnis d'écrous à leurs extrémités (fig. 118), mais avant de placer ces écrous on eut soin de chauffer les tirants ; lorsque le métal se fut allongé les écrous furent serrés à fond et les tirants, en se refroidissant, produisirent sur les murs un effort suffisant pour les redresser.

§ 5. — Conclusions

166. **Résumé de la seconde partie.** — Nous terminons ici l'étude des phénomènes élémentaires de la défiguration des corps solides ; mais avant de passer aux autres parties de ce cours, il ne sera peut-être pas inutile de faire un résumé de ce que nous avons établi jusqu'à présent.

Nous avons vu que les forces extérieures (forces d'action ou de réaction), lorsqu'elles se font équilibre sur un corps, se cherchent, pour ainsi dire, afin de s'équilibrer, c'est-à-dire de se neutraliser au travers de ce corps et que les molécules leur servent d'intermédiaire pour cette neutralisation.

Pour vérifier cet équilibre, nous avons montré qu'il est nécessaire de prendre, section par section, l'organe considéré en appliquant à chaque section la théorie générale du transport des forces.

Nous avons réduit, tout d'abord, les actions appliquées à la section considérée à une résultante unique et à un couple unique.

La résultante unique a été ensuite décomposée : 1° en un effort longitudinal P, dit *effort comprimant* ou *effort tirant*, tendant à produire une tension c'est-à-dire un accourcissement ou un allongement longitudinal, et 2° en un effort transversal T ou *effort tranchant* tendant à produire un glissement transversal ou tranchage de la section.

De même le couple résultant a été décomposé : 1° en un *couple fléchissant* M tendant à produire une rotation transversale ou *flexion*, et 2° en un *couple tordant* N tendant à produire une rotation axiale ou *torsion*.

Nous avons appris à calculer les déplacements soit de translation, soit de rotation que produisent ces efforts ou ces couples et à connaître la fatigue qu'ils imposent aux fibres ; nous saurons donc reconnaître si toutes ces influences réunies seront, sur chaque fibre, inférieures aux charges qu'on peut, avec sécurité, leur imposer.

D'ailleurs, dans la première partie, nous avons montré comment on peut composer et décomposer les forces et les couples ; nous avons appris à déterminer les valeurs de certaines expressions qui entrent dans les formules que nous avons établies, notamment les surfaces, les moments statiques, les moments d'inertie et les moments de résistance.

Nous sommes donc prêts à aborder l'étude de la résistance et de la stabilité des organes isolés ; cette étude va faire l'objet de la troisième partie de l'ouvrage.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE

(Résistance des Matériaux.)

TROISIÈME PARTIE

RÉSISTANCE ET STABILITÉ DES ORGANES ISOLÉS

CHAPITRE PREMIER

POUTRES A UNE TRAVÉE

1re SECTION

ACTIONS ET RÉACTIONS DÉVELOPPÉES SUR UNE POUTRE

§ 1. — NATURE DES RÉACTIONS DÉVELOPPÉES PAR LES APPUIS

167. **Classification des appuis ou liaisons.** — (*a*) **Généralités.** — Les organes de construction que nous allons étudier reposeront sur des appuis, c'est-à-dire sur des obstacles artificiels, qui empêcheront ou qui gêneront les mouvements de certaines de leurs parties. Aussi, au point de vue mécanique, pour tenir compte des appuis, devrons-nous les remplacer par des forces ou par des couples, suivant les cas.

Ces appuis servent à relier un organe de construction aux objets extérieurs, supposés parfaitement fixes. C'est pourquoi on leur donne aussi le nom de *liaisons*.

Nous allons d'ailleurs passer en revue les principaux genres d'appuis ou de liaisons, en indiquant la nature des réactions auxquelles ils donnent lieu.

(*b*) **Rotule glissante**, dite *appui libre*. — Dans cet appui, dont la fig. 119 montre schématiquement la disposition, l'organe supporté peut prendre toutes les inclinaisons autour de la charnière A dite *rotule*. De plus, cette dernière est portée par un chariot CD et peut, par conséquent, se déplacer parallèlement à la face supérieure MN du mur d'appui. Dans ces conditions, toutes les fois que la résultante des forces agissant en A sera oblique par rapport au *plan de roulement* MN le chariot se déplacera horizontalement et il ne restera en équilibre que lorsque cette résultante aura une direction normale au chemin de roulement MN ; alors la réaction qui fait équilibre aux forces d'action passant en A sera également normale à MN.

Ainsi : *un appui libre ne peut développer qu'une réaction normale à la surface d'appui.*

Ce genre d'appui est souvent employé dans les ponts

métalliques où il est important : 1° de laisser à la poutre la liberté de prendre n'importe quelle inclinaison au-dessus de son appui A (fig. 119 et 122) ; 2° de permettre la dilatation des poutres sous l'influence de la chaleur : le chariot porte alors le nom de *chariot de dilatation*.

Dans les constructions ordinaires, l'appui libre est réalisé

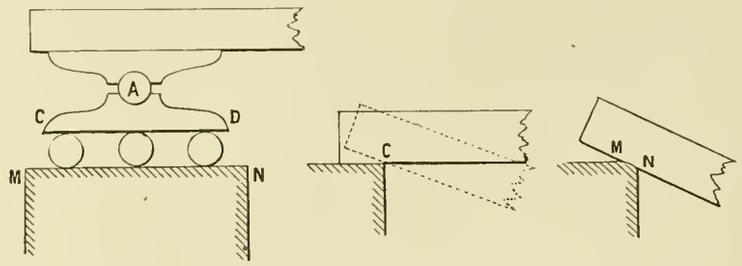


Fig. 119 Fig. 120 Fig. 121

plus simplement, mais d'une manière moins parfaite, comme l'indique la fig. 120. Lorsque la poutre s'infléchit (voir la figure pointillée), elle ne porte plus que sur l'arête C, de sorte que si cette arête, aussi bien que la poutre, n'étaient pas formées de matières extrêmement résistantes elles s'écraseraient.

En réalité la poutre et l'appui se déforment légèrement, de telle sorte que le contact a lieu sur une étendue appréciable MN (fig. 121) mais encore suffisamment petite pour que nous puissions l'assimiler à un point.

De plus, pendant l'infléchissement de la poutre, il se développera un *frottement* sur la surface MN (fig. 121), de sorte que la réaction de l'appui ne sera plus nécessairement verticale.

On sait en effet que le *frottement* est l'effort tangentiel qu'il faut développer pour opérer le déplacement tangentiel relatif de deux surfaces en contact (v. C^1).

Dès lors cet effort tangentiel en se composant avec une réaction verticale donne une résultante oblique à la surface d'appui.

Malgré cette restriction, nous considérerons cependant la dernière disposition comme un appui libre et nous supposerons que la réaction qu'il développe est normale à la surface d'appui. Nous venons de voir que ce n'est pas tout à fait exact ; mais le plus souvent cela sera avantageux au point de vue de la stabilité en ce cens que si cette stabilité est réalisée en faisant l'hypothèse d'une surface d'appui dépourvue de tout frottement, elle le sera, *a fortiori*, si le frottement existe ainsi que les réactions obliques qu'il peut produire.

(*c*) **Rotule fixe** dite : **appui articulé** ou **articulation.** — Avec cette disposition, qui est représentée fig. 122. la poutre peut prendre toutes les inclinaisons autour de son appui A ; mais celui-ci reste fixe, de sorte que la réaction qu'il développe pourra être inclinée sous un angle quelconque par rapport à l'horizontale.

(*d*) **Appui encastré** dit **encastrement.** — Lorsqu'au-dessus d'un appui la section normale de la pièce supportée est obligée de conserver une direction constante, on dit qu'il y a *encastrement*.

Pour réaliser l'encastrement on peut employer différentes dispositions ; nous mentionnerons seulement les principales.

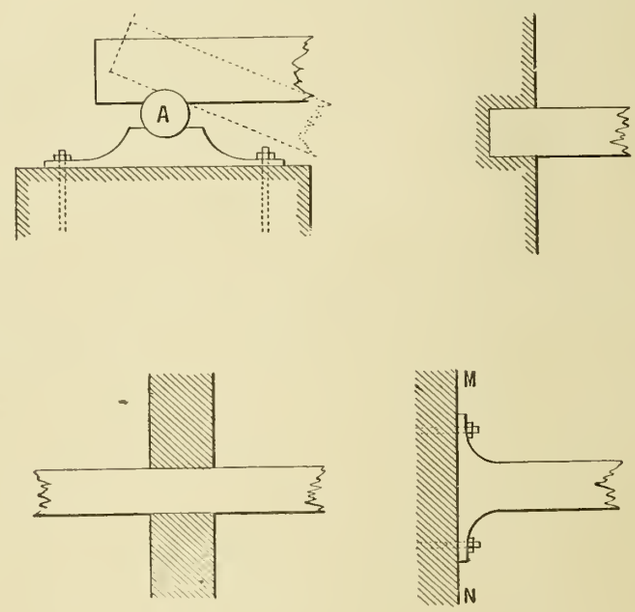


Fig. 122 Fig. 123

Fig. 124 Fig. 125

1° L'extrémité de la pièce est logée dans une boîte, ordinairement en maçonnerie (fig. 123) ; c'est l'encastrement par *emboîtement*.

2° La pièce traverse un mur d'appui dans lequel elle est scellée (fig. 124) ; c'est l'encastrement par *scellement*.

3° La pièce est *ancrée* dans le mur d'appui sans le traverser, mais s'applique contre une de ses faces par une *semelle* MN (fig. 125) ; c'est l'encastrement par *ancrage*.

4° La pièce repose sur plus de deux appuis ; alors l'encastrement est réalisé *par continuité*. Si, par exemple, une

poutre repose sur trois appuis (fig. 126), on conçoit que si les poids P et P′ qui agissent sur les deux travées sont convenablement placés, il sera possible de faire prendre à la

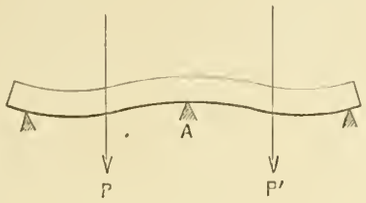


Fig. 126

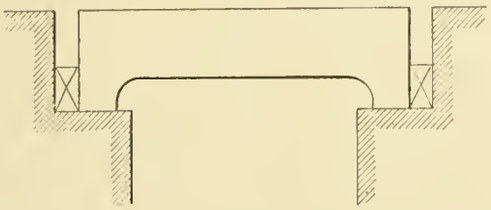


Fig. 127

section normale de la poutre qui est située au-dessus de l'appui intermédiaire A telle direction qu'on voudra ; il y a donc encastrement au-dessus de l'appui A.

5° La pièce est coincée à ses extrémités contre les murs d'appui, ainsi que l'indique la fig. 127 ; on réalise alors l'*encastrement à coins de Clapeyron*.

En somme, l'encastrement est obtenu au-dessus d'un appui lorsque, par un procédé quelconque, on force la fibre neutre ou, ce qui revient au même, la section normale, à conserver ou à prendre une direction invariable.

168. Réaction complète d'un encastrement. — Géométriquement, nous définirons un encastrement par l'angle φ que, grâce à l'encastrement, la fibre neutre sera forcée de faire avec une ligne fixe prise comme axe de coordonnées et cela, quelles que soient les causes de défiguration qui agiront sur la poutre. En général, cette ligne fixe, prise comme axe de coordonnées, sera la fibre neutre elle-même avant que la pièce ne soit soumise à aucune cause de défiguration. Dans ce cas, l'angle d'encastrement sera toujours très petit et pourra être confondu avec sa tangente trigonométrique.

Mécaniquement, un encastrement équivaut à un couple. En effet : imaginons que sur un appui à rotule fixe (fig. 128), après avoir laissé prendre à la section transversale une direction quelconque *ab*, nous voulions ramener cette section dans une direction donnée *ab′* ; pour obtenir ce résultat, il faudra faire subir à la section une rotation, et pour cela lui appliquer un couple. Si donc un appui est disposé de telle sorte qu'il produise l'encastrement, il développe, par cela même, un couple, indépendamment de la force de réaction ou *réaction* à laquelle peut donner lieu l'appui à rotule fixe.

Le couple développé par l'encastrement sera nommé *couple, ou moment, d'encastrement*.

Afin de ne laisser aucun doute sur la coexistence de la force de réaction et du couple d'encastrement, nous allons prendre un exemple simple.

Supposons que dans une boîte d'encastrement (fig. 129) on ait placé l'extrémité d'une poutre ayant du *jeu*, c'est-à-dire dont les dimensions transversales soient un peu plus petites que celles de la boîte d'encastrement. Imaginons que l'autre extrémité soit libre. Cette poutre va prendre sa position d'équilibre ; elle s'inclinera d'autant plus qu'il y aura plus de jeu ; elle fera effort sur les points A et B de la boîte d'encastrement, laquelle développera, en ces points, des réactions verticales f et F.

Soit P le poids de la poutre et soit d la distance horizontale des points A et B.

Les trois forces f, F et P étant en équilibre, nous pouvons considérer l'une d'elles F comme l'équilibrante des deux

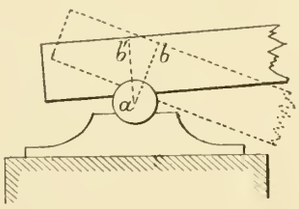


Fig. 128

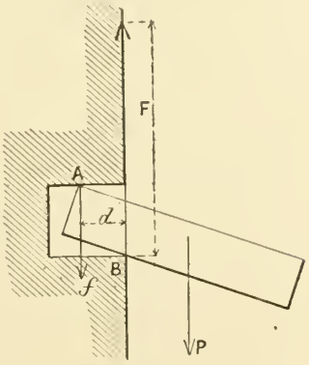


Fig. 129

autres f et P. D'ailleurs, toutes ces forces étant verticales, et, de plus, f et P étant de même sens, il faut que l'équilibrante F soit égale à la somme des autres forces prises en signe contraire. On a donc :

$$F = -(f + P).$$

Cette égalité nous montre que l'ensemble des réactions f et F développées en A et en B se réduit :

1° Au poids de la poutre, pris en signe contraire $(-P)$ et appliqué en B ;

2° A deux forces verticales f et $-f$, égales, de sens contraire et distantes entre elles de la longueur d.

Nota. — La force $-f$ appliquée en B n'a pas été figurée ici, à part; elle est une partie de F.

En résumé, la force $-P$ est la *réaction de l'appui* ; l'ensemble des deux forces f et $-f$ forme le *couple d'encastrement*, dont le moment est $f \times d$.

Nous pourrions répéter le même raisonnement dans le cas où les vides de la boîte d'encastrement auraient été remplis ; de sorte que nous pouvons dire que : *Tout appui encastré donne comme réaction complète la réunion d'une force et d'un couple.*

§ 2. — Détermination des réactions de liaison

169. Réactions déterminables par la statique pure. — (*a*) Représentation schématique des liaisons. — Il résulte de la nature même des liaisons que nous venons d'étudier ci-dessus et des réactions qu'elles sont susceptibles de fournir, que, suivant leur nature et suivant leur nombre, on pourra déterminer ces réactions par la statique pure ou bien on ne pourra le faire qu'en faisant intervenir les déformations élastiques. C'est ce que nous allons faire comprendre.

Afin de faciliter les explications, nous représenterons schématiquement les liaisons comme l'indique la fig. 130.

Tout d'abord la poutre, qu'elle soit droite ou courbe, sera figurée par sa fibre neutre, AA′, BB′ ou CC′, que nous supposerons plane, et toutes les forces d'action seront supposées situées dans son plan.

La fig. 130-I représentera un *appui libre*. On y voit une rotule B, autour de laquelle la fibre neutre peut

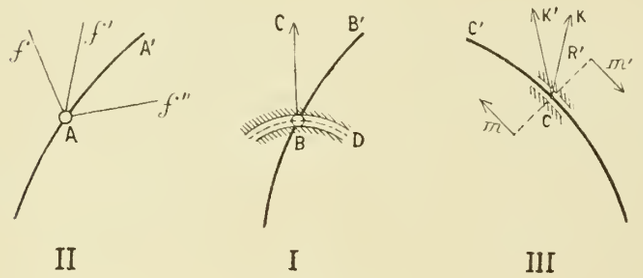


Fig. 130

tourner. Cette rotule peut, elle-même, glisser sans frottement dans une sorte de conduit BD, plan ou courbe. C'est donc bien l'appui libre, à rotule glissante. Cet appui ne peut développer qu'une réaction BC dirigée suivant la normale à la surface d'appui BD. Il ne peut pas développer de couple.

La fig. II représentera l'appui à rotule fixe, dit : *articulation*.

Il peut développer une réaction A*f*, ou A*f*′ ou A*f*″, dirigée sous un angle quelconque. Il ne peut pas développer de couple.

La fig. III représentera un *encastrement*. Il peut développer à la fois un couple *mm*′ et une réaction CK, ou CK′, dirigée d'ailleurs d'une manière quelconque.

La pièce peut posséder une ou plusieurs de ces liaisons. Nous dirons que son système de liaisons est *suffisant* lorsqu'il assurera la position absolue de la pièce, et qu'il est *insuffisant* lorsqu'il n'en sera pas ainsi.

En outre, un système suffisant sera dit *strictement suffisant* (ou plus simplement système *strict*) lorsque la statique pure permettra de trouver les grandeurs des réactions (forces ou couples) ; il sera dit *surabondant*, s'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si la statique pure laisse subsister une indétermination.

(*b*) **Liaison par un seul appui libre.** — Un seul appui libre A est insuffisant (fig. 131-I.)

En effet, soit R la résultante des forces qui agissent sur la pièce. En la transportant sur la rotule A on donnera naissance à une force R′ égale et parallèle à R, et à un couple.

Si la force R′ n'est pas normale à la surface d'appui AC, elle déplacera la rotule A, et avec elle toute la pièce ; de plus, le couple la fera tourner autour de la rotule A.

(*c*) **Liaison par deux appuis libres.** — Deux appuis libres, A et B, forment un système généralement insuffisant.

En effet (fig. 131-II), menons les deux normales AI et BI aux surfaces de glissement. Si la résultante R des forces qui agissent sur la pièce ne passe pas par le point de croisement

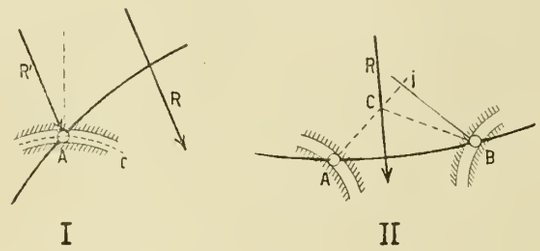


Fig. 131

de ces normales, alors cette force R pourra être décomposée suivant deux directions, l'une CA normale à la première surface d'appui et qui sera détruite par elle, l'autre CB qui n'étant pas normale à la seconde surface d'appui, ne sera pas détruite et entraînera le mouvement général de la pièce.

Si par exception R passait par le point de croisement I des normales, alors on pourrait la décomposer en deux composantes dirigées suivant IA et IB, et susceptibles, par conséquent, d'être neutralisées par les réactions des appuis. Il y aurait équilibre statique, mais ce serait un équilibre instable.

Comme cas particulier il y aurait équilibre, si les deux normales AI et BI étaient parallèles entre elles et à la résultante R. Cet équilibre serait instable.

(*d*) **Liaison par trois appuis libres.** — Trois appuis libres A, B et C forment un système strictement suffisant. En effet (fig. 132), menons les normales AA′, BB′, CC′ aux surfaces de glissement. La résultante R pouvant être décomposée

d'une seule manière (v. n° 32) en trois composantes dirigées suivant les normales, il en résulte que les réactions des appuis pourront équilibrer la résultante R. Par exception, si les trois normales passent par un même point I, alors R

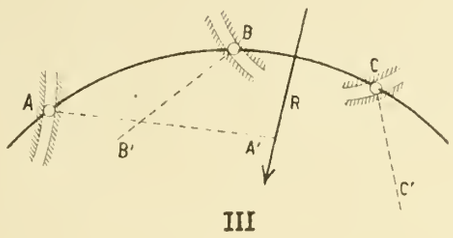


Fig. 132

ne pourra jamais être équilibré par les trois réactions. En effet, ces trois réactions, si elles existaient, auraient une résultante R′ qui passerait par le point I et qui, par conséquent, ne pourrait jamais être égale et opposée à R puisque R ne passe pas par I. Donc, dans ce cas, le système de liaisons serait insuffisant.

(*e*) **Liaison par un appui libre et par une articulation.** — Deux appuis, dont l'un A est libre, et dont l'autre B est articulé, forment un système strictement suffisant (figure 133-I).

En effet, prenons le point I où la normale AI à la surface d'appui libre rencontre la résultante R. Décomposons R suivant les deux directions IA et IB. La composante IA étant normale à la surface d'appui, sera neutralisée par elle. Quant à l'autre IB elle le sera aussi par l'articulation B, puisque une articulation peut développer une réaction dans n'importe quelle direction. Un pareil système est très employé : nous le désignerons sous le nom de *système strict n° 1*.

(*f*) **Liaison par deux articulations.** — Deux appuis articulés A et B (fig. 133-I) forment un système surabondant. En effet, prenons sur la résultante un point quelconque I

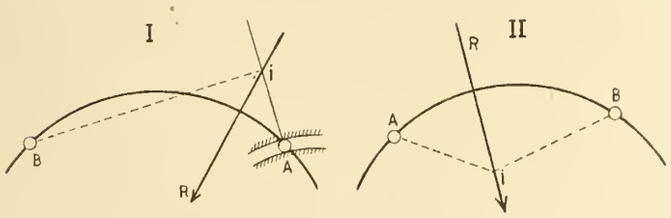


Fig. 133

et décomposons cette résultante suivant les deux directions IA et IB. Chacune de ces composantes sera détruite par les appuis.

Or le point I pouvant être pris quelconque sur la résultante, il en résulte qu'il y a une infinité de solutions et, par suite, indétermination dans les réactions.

En réalité, ainsi que nous le verrons quand nous étudierons les arcs, cette indétermination n'est qu'apparente. La statique pure est impuissante à déterminer les réactions et il faut faire intervenir les déformations élastiques pour lever l'indétermination.

Ce système est fort employé maintenant dans les arcs montés sur une rotule à chacun de leurs sommiers.

Si deux appuis articulés forment un système de liaison surabondant, à plus forte raison il en sera de même si nous ajoutons d'autres liaisons, de quelque nature qu'elles soient.

(*g*) **Liaison par un encastrement.** — Un encastrement C forme, à lui seul, un système strictement suffisant. (V. plus haut, fig. 130-III.)

En effet, transportons la résultante R au point C, nous obtenons ainsi une force R′ et nous donnons naissance à un couple *mm′* qui peut être transporté intégralement au point C. Or, comme le propre d'un encastrement est de pouvoir détruire n'importe quelle force et n'importe quel couple, il en résulte que la réaction complète de l'encastrement se composera d'une force égale et contraire à R′ et d'un couple égal et contraire à *mm′*.

Cette liaison est donc, à elle seule, strictement suffisante ; nous la désignerons sous le nom de *système strict n° 2*.

Il est évident que si à un encastrement nous ajoutons une ou plusieurs autres liaisons, nous aurons un système surabondant.

Dans les arcs métalliques, on établit assez souvent deux encastrements, à savoir : un à chaque sommier.

En résumé, nous n'aurons jamais à considérer comme systèmes stricts que les systèmes de liaison n° 1 et n° 2 et nous venons d'apprendre à déterminer par la statique pure les réactions auxquelles ils donnent lieu. Tous les autres systèmes seront surabondants.

170. Modifications apportées par un couple aux réactions de liaisons. — Lorsqu'une pièce est en équilibre sous l'influence des forces d'action et des forces de réaction, si l'on vient à lui appliquer un couple, on modifie évidemment les réactions des appuis. On se rendra facilement compte que ces modifications ne peuvent être évaluées par la statique pure que dans les deux cas de liaisons strictes (système n° 1 et système n° 2) étudiés ci-dessus.

Etudions d'abord le cas du système n° 1. Soit *mm′* un couple appliqué à une poutre soumise au système de liaison n° 1 (fig. 134). — A est une articulation ; B est un appui libre. — Soit *d* la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A sur la normale BN à la surface d'appui du point B. Nous savons que le couple *mm′* peut être transporté n'importe où dans son plan pourvu que son moment

ne change pas ; soit M ce moment. Donnons comme bras de

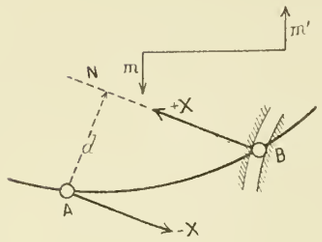


Fig. 134

levier au couple la distance d. Les nouvelles forces X et — X de ce couple devront satisfaire à la relation

$$Xd = M, \qquad \text{d'où} \qquad X = \frac{M}{d}.$$

Cela fait, nous pouvons maintenant déplacer le couple Xd de telle sorte que l'une de ses forces, X, passe par B et soit confondue avec la normale BN, tandis que l'autre, — X, passera évidemment par A et lui sera parallèle. Dans ces conditions, les forces X et — X seront susceptibles d'être neutralisées par les appuis, ce qui prouve que les réactions de ces appuis leur sont égales et opposées.

Dans le cas du système strict n° 2, la seule liaison est un encastrement. Par conséquent, nous y transporterons intégralement le couple mm', et comme un encastrement peut neutraliser n'importe quelle force ou quel couple, il en résulte que sa réaction complète, laquelle se compose généralement d'une force F_1 et d'un couple M_1 (v. n° 168), sera modifiée par l'adjonction d'un couple égal et contraire au couple mm', sans que la force F_1 soit altérée en rien.

§ 3. — Moments fléchissants et efforts tranchants dans une poutre

171. **Définitions.** — Nous nommons *Poutre* une pièce longue dont la fibre neutre est une ligne droite et qui est soumise à des efforts d'action (ou forces indépendantes) perpendiculaires à cette fibre neutre (Ex. fig. 135-I et II). Cette dernière OX sera supposée horizontale et nous la prendrons pour axe des abscisses (ou axe des x). Les actions seront en général des poids. Ce seront donc des forces verticales ; algébriquement elles auront le signe négatif.

La poutre considérée dans ce chapitre sera à une seule travée ; nous l'étudierons dans deux positions.

1re position : elle reposera sur deux appuis (fig. I) ;

2e position : elle reposera sur un seul appui (fig. II). Elle devra donc y être encastrée et nous lui donnerons alors le nom de *poutre en encorbellement* ou de *corbeau*.

La poutre est *droite*, si ses contours extérieurs sont parallèles à la fibre neutre (fig. I). La poutre est *courbe*, s'il n'en est pas ainsi (fig. II). Mais, en tout cas, même pour une poutre courbe, la fibre neutre est une ligne droite OX. Si la fibre neutre était courbe on aurait un *arc* et non plus une poutre.

Si la poutre repose sur deux appuis ces derniers peuvent rentrer dans un des trois cas étudiés ci-dessus (v. n° 167).

1er Cas. — La poutre sera *libre sur ses appuis*, si elle repose sur chacun d'eux par l'intermédiaire d'un appui libre. Alors au-dessus de chacun de ces appuis, la fibre neutre peut prendre telle direction qu'elle veut (fig. III) et même elle peut glisser.

Nous avons vu (n° 169-*c*) que ce système de liaison était insuffisant, excepté si les normales aux surfaces d'appui étaient parallèles entre elles et aussi à la résultante des actions extérieures. C'est précisément ce qui arrive ici puisque les forces d'action étant toutes verticales auront une résultante verticale, c'est-à-dire perpendiculaire aux plans

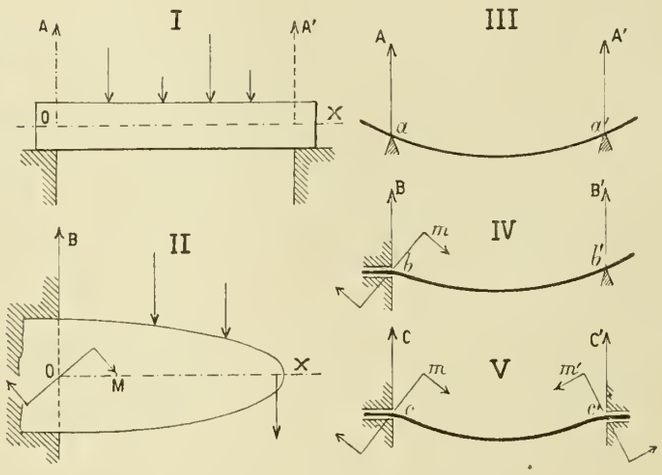


Fig. 135

d'appui sur lesquels la poutre repose. Ainsi les réactions d'appui se composeront (fig. I et III) de deux forces verticales aA et a'A' que la statique pure pourra déterminer.

Le frottement sur les appuis rendra cet équilibre stable.

2e Cas. — La poutre peut être *libre à une extrémité et encastrée à l'autre* (fig. IV).

3e Cas. — La poutre peut être *encastrée à ses deux extrémités* (fig. V). — Dans chacun de ces derniers cas les liaisons sont surabondantes et les réactions des appuis ne pour-

ront être déterminées qu'en tenant compte des déformations élastiques ; néanmoins sur chaque appui simple la réaction ne se composera que d'une force verticale $b'B'$ (fig. IV), tandis que sur chaque encastrement elle se composera d'une force verticale bB (fig. IV) et d'un couple m.

172. **Conventions sur les signes.** — (*a*) **Hypothèse du tronçon enlevé.**— Nous avons vu (v. n° 113) que, pour étudier en un point l'équilibre moléculaire d'un prisme élastique, on fait dans ce prisme une section transversale fictive, au centre de gravité de laquelle on transporte toutes les forces situées d'un même côté de cette section. Ce transport donne naissance à une *résultante* ou *effort tranchant* et à un couple résultant de droite ou *moment fléchissant*, lesquels doivent, séparément, être équilibrés par une résultante et par un couple résultant de gauche.

Ce transport des forces au centre de gravité de la section transversale considérée permet de supposer enlevé le tronçon de prisme situé du même côté que les forces qui ont donné lieu à la résultante de translation obtenue ; c'est ce qu'on nomme l'*hypothèse du tronçon enlevé*. Eh bien, comme première convention, nous supposerons que c'est *le tronçon de gauche qui est enlevé*.

Il n'y a rien là que de très naturel et de conforme aux usages de la géométrie analytique. En effet, la fibre neutre est prise pour axe des x ; on parcourt donc cet axe *fictivement* en allant de la gauche à la droite et par suite c'est le tronçon de gauche qui est rencontré le premier et avec lui toutes les forces qui le chargent. Mais, ainsi que nous l'avons vu, la résultante de translation de droite et celle de gauche doivent s'équilibrer et, par suite, doivent être égales et de signe contraire, et il en est de même des couples résultants de droite et de gauche. Le choix du tronçon enlevé influerait donc sur le signe des résultats. Autrement dit : si pour des raisons de simplification nous préférions enlever le tronçon de droite plutôt que celui de gauche nous trouverions des signes différents, ce qui pourrait laisser croire que les fibres moléculaires travaillent dans un autre sens, et qui est absurde *a priori*. C'est pourquoi, afin de ne pas amener de confusion dans nos calculs, il est nécessaire de faire, au sujet des signes des efforts tranchants et des moments fléchissants, des conventions qui soient indépendantes du choix du tronçon enlevé, car, en définitive, c'est ce qui se passe dans les molécules qui nous intéresse et non pas ce qui se produit à l'extérieur.

Nous allons faire voir que ces conventions sur les signes sont une conséquence des conventions ordinaires de la géométrie analytique et de la mécanique.

(*b*) **Signes des coordonnées.** — OX, dirigée de gauche à droite, sera la direction des abscisses positives. OY, dirigée de bas en haut, sera la direction des ordonnées positives.

Les directions contraires OX′ et OY′ seront négatives.

(*c*) **Signes des forces extérieures.** — Ces forces sont toujours verticales ; elles seront donc positives quand elles seront dirigées dans le sens des y positifs, c'est-à-dire de bas en haut.

Ainsi un poids ↓ aura le signe négatif. Une réaction d'appui ↑ aura, en général, le signe positif.

(*d*) **Signes des efforts tranchants.** — D'après la convention faite, prenons (fig. 137) sur le tronçon *de gauche* une force positive f. Transportons-la en f' au plateau de gauche, A, du bi-plateau AB.

Nous donnons naissance à un effort tranchant. Quel doit être son signe ? Evidemment celui de la force f. Donc :

Tout effort tranchant appliqué à un bi-plateau est positif quand il tend à soulever le plateau de gauche par rapport à

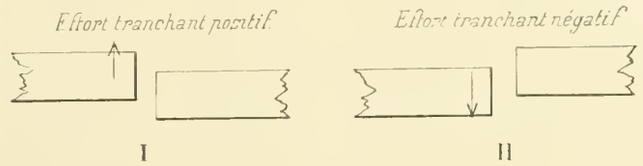


Fig. 136

celui de droite (fig. 136-I). *Il est négatif dans le cas contraire* (fig. 136-II).

(*e*) **Signes des moments fléchissants.** — Cette force f, transportée en A, donne naissance à un couple dont la force est f (positive) et dont le bras de levier est $CA = d$,

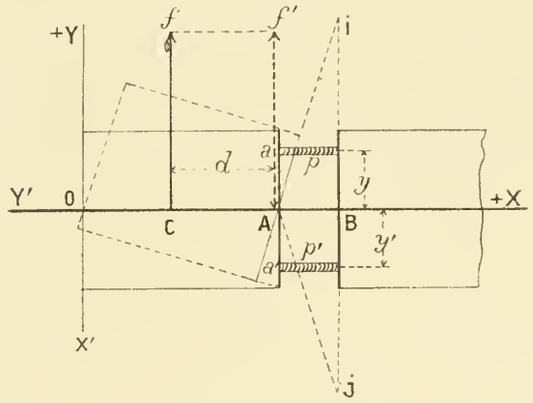


Fig. 137

parcouru de C vers A, c'est-à-dire positivement. Par conséquent, le produit de f par d est positif ; il serait négatif dans le cas contraire. Donc :

Tout moment fléchissant appliqué à un bi-plateau est positif quand il tend à comprimer les fibres du haut et à tirer celles du bas (fig. 137) ; il est négatif dans le cas contraire (v. *fig.* du tableau du n° 146, p. 70).

Nota. — Dans le premier cas (moment positif), l'infléchis-

sement produit dans le bi-plateau tend à faire se rencontrer les deux plateaux en I du côté des y positifs ; dans le cas contraire (moment négatif), la rencontre se ferait en J du côté négatif. C'est pourquoi on énonce quelquefois la convention en disant :

« Un moment fléchissant a le même signe que celui de la « courbure qu'il tend à faire prendre à la poutre. »

(*f*) **Signes des efforts fibraires.** — La convention à faire doit être une double conséquence de celle sur les moments fléchissants et de celle sur les ordonnées. En effet, prenons dans le bi-plateau AB une fibre a située au-dessus de l'axe neutre (fig. 137) ; son y est positif. De plus, d'après la convention (*e*), elle est comprimée puisque le moment fléchissant est positif. Il faut donc que son effort fibraire p soit positif, autrement le moment élémentaire que produit sa réaction moléculaire, et qui a pour expression algébrique le produit py, serait négatif.

Il en est de même pour une fibre b située au-dessous et répondant à un y' négatif. Cette fibre est tirée ; si p' est son effort fibraire, il faut, pour que le produit $p'y'$ soit positif, que p', qui est une traction, soit négatif. Donc :

Toute compression est positive ;

Toute traction est négative.

Telles sont les conventions sur les signes : il est très important de ne pas se tromper à leur sujet. Le lecteur qui voudra plus tard faire des applications n'éprouvera que trop souvent des embarras relativement aux signes ; c'est pourquoi nous l'engageons vivement à bien se familiariser, dès maintenant, avec ces conventions.

173. Théorème de l'effort tranchant. — Il existe une relation (algébrique ou géométrique) très simple entre l'effort tranchant en un point d'une poutre et le moment fléchissant en ce même point. Nous l'avons déjà démontrée par la statique graphique aux n°s 40 et 40 *bis*. Etant donné son importance nous allons l'énoncer à nouveau et en donner une démonstration directe qui fera bien comprendre le pourquoi de cette relation.

Théorème. — En chaque point d'une poutre soumise à des efforts perpendiculaires à sa fibre neutre, l'effort tranchant est donné, en grandeur et en signe, par la pente de la représentative des moments fléchissants (1).

Soit (fig. 138) O'X la fibre neutre de la poutre, A une section quelconque, et f une force positive, appliquée en O, à gauche, à une distance x de A.

Si on transporte f au point A, on déterminera un effort tranchant égal à $+f$, et on donnera naissance à un couple positif dont le moment m est :

$$m = fx.$$

(1) Analytiquement le théorème s'énonce : « L'effort tranchant est la dérivée, prise par rapport à l'abscisse, du moment fléchissant. »

Si nous prenons une ordonnée $\overline{Aa}$ égale à ce moment fx, la représentative de ce moment sera la droite Oa.

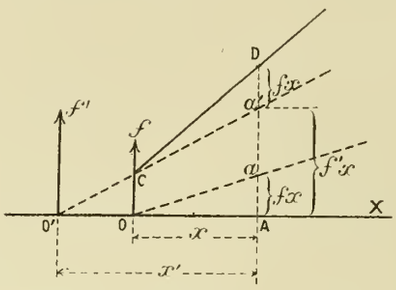


Fig. 138

La pente p de cette droite est égale à $\overline{Aa} : \overline{AO}$, c'est-à-dire

$$p = \frac{fx}{x} = f.$$

Le théorème est donc démontré lorsque la poutre n'est soumise qu'à la seule force f.

Prenons-en une seconde f', appliquée en O' à une distance x'. Elle produit un effort tranchant égal à f' et un moment fléchissant m' qui a pour expression

$$m' = f'x'.$$

Prenons de même $\overline{Aa'} = f'x'$; la représentative des moments dus à la force f' est la droite O'a' et la pente p' de cette droite est

$$p' = \frac{f'x'}{x'} = f'.$$

La représentative totale des moments fléchissants dus aux deux forces f et f' s'obtiendra en additionnant (v. C^t^ Géom. analytique) les deux droites oa et $o'a'$, ce qui donnera la ligne brisée O'CD, obtenue en prenant $\overline{a'D} = \overline{Aa}$.

Nous savons que, au-dessus de la section A, la pente p'' de la droite CD est égale à la somme des pentes des deux droites Oa et O'a'. On aura donc

$$p'' = p + p' = f + f'.$$

Le théorème est donc démontré pour deux forces. Il serait vrai pour un nombre quelconque de forces finies et vrai aussi pour des forces infiniment petites, mais en nombre infiniment grand, c'est-à-dire pour une charge continue.

Dans ce dernier cas, le polygone représentatif des moments fléchissants, dont O'CD n'est qu'un fragment, devient une courbe représentative ; la ligne CD devient la tangente à cette courbe, et la pente de cette tangente est toujours égale à l'effort tranchant. C. Q. F. D.

Nota. — Nous avons supposé ici que les ordonnées $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$ étaient numériquement égales aux produits fx et $f'x'$, c'est-à-dire aux moments. Nous avons vu, dans la Statique graphique, que les moments sont proportionnels aux ordonnées d'un funiculaire construit avec une certaine distance polaire d. Cette distance est alors le *coefficient d'échelle* (v. n°s 40 et 40 *bis*), et, dans ce cas, il faut multiplier par d la pente vraie de ce funiculaire pour avoir l'effort tranchant.

§ 4. — Représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants pour poutres encastrées

174. Poutre non chargée, encastrée sur un seul de ses appuis. — Nous avons déjà étudié (v. Statique graphique, nos 39 à 51) la manière d'obtenir, par des funiculaires, les représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants dans une poutre posée sur deux appuis libres et soumise à des efforts perpendiculaires à sa fibre neutre. Nous allons étudier de quelle manière des encastrements sur les appuis modifient ces représentatives.

Imaginons (fig. 139-I) une poutre qui reposerait en A et B sur deux appuis libres à surfaces horizontales. Nous la supposerons non pesante et non chargée ; par conséquent les appuis ne développeront aucune réaction, ni force ni couple. Remplaçons l'appui B par un encastrement B′ qui forcera (fig. II) la fibre neutre à prendre une certaine pente α_1 sur sa direction première. Dans ces conditions, il se développera au-dessus de l'appui B′ un couple et une réaction. Nous ne savons pas encore calculer ce couple en fonction de la pente d'encastrement α_1, mais il n'en est pas moins vrai qu'il existe.

Supposons-le connu ; soit M_1 sa valeur, que nous supposerons positive. M_1 est précisément le moment d'encastrement de l'appui ; la boîte d'encastrement produit ce couple comme l'indique, plus haut, la fig. 129. Nous nous proposons :

1° De calculer, en fonction de M_1, les valeurs des réactions X_0 et X_1 développées sur les deux appuis A′ et B′, par l'adjonction de ce moment ;

2° De trouver l'expression du moment fléchissant pour un point quelconque C′ situé à la distance x de l'origine ;

3° D'en déduire la représentative des moments fléchissants.

Raisonnons comme au no 170.

Soit l la portée de la poutre.

D'abord il est évident que pour équilibrer le couple d'encastrement M_1 il faut que les appuis développent deux forces susceptibles de former un couple, c'est-à-dire qui soient égales, parallèles et de sens contraire. Ces forces X_0 et X_1 seront précisément les réactions des appuis, et l'on devra avoir, pour déterminer leur valeur absolue, l'équation (1) qui exprime que la somme des moments est nulle.

(1) $$X_1 l + M_1 = 0,$$ d'où

$$X_1 = -\frac{M_1}{l} \qquad \text{et} \qquad X_0 = +\frac{M_1}{l}.$$

Quant au sens de la réaction X_1 de l'appui sur lequel existe l'encastrement on voit que cette réaction doit être de signe contraire à celui du moment M_1, et la réaction X_0 sur l'autre appui doit être de même signe que M_1.

Considérons maintenant le point C′ (fig. II) situé à la distance x de l'origine. Si l'on enlève le tronçon de gauche la seule force existante qu'il faille considérer comme agissant

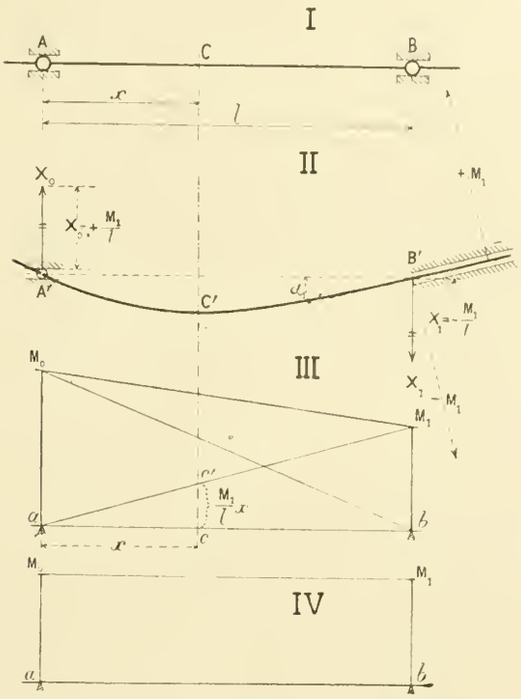


Fig. 139

sur lui, c'est la réaction X_0. En la transportant en C′ elle donne :

1° Un effort tranchant T, qui est constant et qui a pour expression

(2) $$T = X_0 = \frac{M_1}{l};$$

2° Pour moment fléchissant $M = X_0 x$, d'où

(3) $$M = \frac{M_1}{l} x.$$

La représentative des moments sera donc une droite telle que ac' (fig. III) ; on remarquera que sa pente est $\frac{M_1}{l}$, c'est-à-dire précisément l'effort tranchant, ce qui vérifie le théorème de l'effort tranchant.

En faisant dans l'équation (3) $x = l$, on a :

$$M = M_1.$$

En résumé : « si l'on exerce un moment d'encastrement « au-dessus d'un appui, d'une poutre non chargée et si « (fig. III) on le représente (en bM_1) par son ordonnée propor- « tionnelle :

« 1° La représentative des moments fléchissants aux divers « points de la poutre est la droite (aM_1), qui joint l'autre « appui à l'extrémité de cette ordonnée.

« 2° L'effort tranchant est constant et il est donné en « grandeur et en signe par la pente de cette droite réprésen- « tative des moments.

« 3° Sur l'appui de *gauche* la réaction est égale à cet effort « tranchant et de *même signe*.

« 4° Sur l'appui de *droite* la réaction est égale à cet effort « tranchant et de *signe contraire*. »

Nota. — Le signe est le même sur l'appui de gauche et contraire sur celui de droite parce que les abscisses sont comptées positivement de la gauche vers la droite. Si c'était le contraire les signes seraient renversés.

175. Poutre, non chargée, encastrée sur chacun de ses deux appuis. — Exerçons sur l'appui A un moment d'encastrement M_0 et représentons-le (fig. 139-III) par son ordonnée figurative aM_0. On démontrera de même que, s'il existait seul, la représentative des moments serait la droite M_0b. Si les deux moments d'encastrement, M_0 et M_1, existent ensemble, pour avoir la représentative finale des moments en chaque point il faudra additionner les deux droites aM_1 et M_0b ce qui donnera la droite M_0M_1. Les pentes s'ajouteront aussi et finalement nous pourrons dire :

« Si l'on exerce un moment d'encastrement au dessus de « chacun des deux appuis d'une poutre non chargée et si « l'on représente chacun de ces moments (M_0 et M_1) par une « ordonnée proportionnelle :

« 1° La représentative des moments fléchissants aux divers « points de la poutre est la droite (M_0M_1) qui joint les extré- « mités de ces ordonnées.

« 2° L'effort tranchant T est constant et il est donné en « grandeur et en signe par la pente de cette droite repré- « sentative des moments

$$T = \frac{M_1 - M_0}{l}.$$

« 3° Sur l'appui de *gauche* la réaction est égale à cet effort « tranchant et de *même signe*.

« 4° Sur l'appui de *droite* la réaction est égale à cet effort « tranchant et de *signe contraire*. »

Nota. — Si les moments M_0 et M_1 sont égaux et de même signe (fig. 139-IV) la représentative des moments est une droite M_0M_1 parallèle à l'axe des x. Sa pente est nulle ; par conséquent les efforts tranchants sont nuls ainsi que les réactions des appuis.

176. Poutre chargée normalement et encastrée sur chacun de ses deux appuis. — (*a*) **Funiculaire des moments de charge.** — Cherchons d'abord, et à part, le funiculaire représentatif des moments dus aux charges, comme si la poutre reposait librement sur ses appuis ; soit ABC.... GD ce funiculaire. Dans ces conditions les moments sur les appuis seraient nuls (fig. 140).

Afin d'abréger les explications nous n'indiquons pas comment ce funiculaire a été obtenu ; voir à ce sujet la Statique graphique, ch. III et, plus loin, l'application du n° 179.

Faisons maintenant intervenir sur les appuis les deux moments d'encastrement M_0 et M_1.

S'ils agissaient seuls, la représentative des moments aux différents points de la poutre serait la droite M_0M_1. Nous supposerons ici que les moments M_0 et M_1 sont négatifs; par suite toutes les ordonnées de la droite M_0M_1 seront aussi négatives.

(*b*) **Funiculaire définitif.** — Les moments fléchissants définitifs seront alors représentés par les différences entre les ordonnées du funiculaire des charges ABCEFGD et celles de la droite M_0M_1. Ces différences sont des *sommes algébriques*.

Pous obtenir ces sommes algébriques nous pourrons employer l'un des deux moyens suivants :

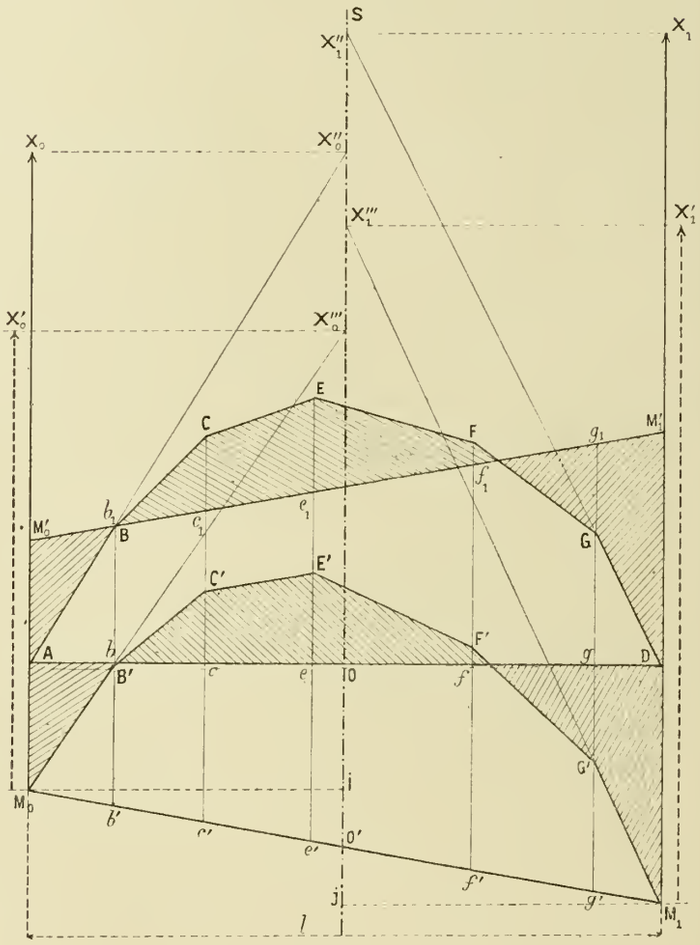


Fig. 140

1er Moyen. — Descendre le funiculaire supérieur de telle sorte que son extrémité A vienne en M_0 et son extrémité D

en M_1, les ordonnées $b'B'$, $c'C'$..... prises par rapport à la droite inclinée M_0M_1 étant égales aux ordonnées primitives bB, cC.....

Ceci fait : le polygone représentatif des moments définitifs est compris entre la droite des appuis et le deuxième funiculaire. Sur la fig. 140 nous avons couvert ce polygone de hachures. Au-dessus de la droite AD les ordonnées sont positives, au-dessous elles sont négatives.

2e Moyen. — Prendre en M_0' et M_1' les symétriques de M_0 et de M_1; joindre $M_0'M_1'$ et, considérant cette ligne comme base oblique des polygones de moments, prendre comme ordonnées positives Ce_1, Ee_1, Ff_1, et, comme ordonnées négatives, $M_0'A$, Gg_1, $M_1'D$.

(*c*) **Remarque relative aux échelles.** — Il importe de ne pas prendre les longueurs AM_0 et DM_1 à l'échelle des forces. Mais si l'on désigne par d la distance polaire du funiculaire des moments de charge on prendra AM_0 et DM_1 égaux aux moments d'encastrement divisés par d, de telle sorte que pour avoir les vrais moments il faille ensuite multiplier les longueurs, *mesurées à l'échelle des forces*, par la distance polaire d.

Ainsi dans le cas où $d = 1/2l$, ce qui est ordinaire pour les funiculaires Collignon, on prendra

$$AM_0 = \frac{M_0}{\frac{l}{2}} = \frac{2M_0}{l}$$

$$DM_1 = \frac{M_1}{\frac{l}{2}} = \frac{2M_1}{l}$$

(*d*) **Réactions nouvelles des appuis.** — Supposons que le premier polygone des moments (fig. 140) ait été établi d'après la méthode de M. Collignon, c'est-à-dire en prenant pour distance polaire $d = 1/2\ l$, nous avons vu (n° 47) que, dans ce cas, en prolongeant le côté initial du funiculaire jusqu'à la verticale milieu OS on obtient un point X_0 qui, projeté sur la verticale d'origine, donne en AX_0 la grandeur de la réaction de l'appui A.

Pour le polygone définitif résultant de l'adjonction des moments d'appui, il en sera de même ; on prolongerait le côté initial M_0B' jusqu'à sa rencontre avec la verticale milieu, le point de rencontre X_0''' de ces deux droites, projeté en X_0' sur la verticale d'origine, donnera en M_0X_0' la réaction définitive de l'appui A.

Nous procéderons de même pour obtenir la réaction de l'appui D ; elle sera M_1X_1'.

On peut démontrer de plusieurs manières la justesse de cette construction ; la plus simple est de s'appuyer sur ce que, d'après le théorème de l'effort tranchant (v. n° 173), l'effort tranchant s'obtient en multipliant la pente du côté du funiculaire par la distance polaire $d = 1/2\ l$.

Or, l'effort tranchant d'origine est précisément la réaction X_0 ; on aura donc

$$X_0 = (\text{pente de } M_0B') \times \frac{l}{2},$$

mais

$$(\text{pente de } M_0B') = \overline{IX_0'''} : \frac{l}{2},$$

donc

$$X_0 = \overline{IX_0'''}.$$

Le point X_0''', sur la verticale milieu, s'obtient en descendant le point X_0'' de toute la hauteur OO'. Il en est de même pour la réaction de droite, X_1''' ; elle s'obtient en descendant le point X_1'' de toute la hauteur OO'.

(*e*) **Nota.** — Avant l'adjonction des moments d'appui, la réaction X_1 était plus grande que X_0 ; il est facile de prouver que, par l'adjonction des moments d'encastrement, leur différence s'est accrue de la longueur IJ qui est précisément égale à la différence des moments d'appuis divisée par la distance polaire $1/2\ l$, c'est-à-dire à deux fois la pente de la représentative, *vraie*, des moments d'encastrement.

2e SECTION

DÉFIGURATION ET RÉSISTANCE D'UNE POUTRE

§ 5. — LOIS DE LA DÉFIGURATION

177. Formules fondamentales. — (*a*) **Formules des défigurations élémentaires.** — On donne (fig. 141) une poutre droite OO_1, de longueur l. Nous admettons que l'on connaît en chaque point, tel que A, B, etc., le moment fléchissant M, le module d'élasticité E de la matière et le moment d'inertie I de la section.

Considérons une section ou, plutôt, un *bi-plateau* AA′ situé à la distance x' de l'origine O. Sous l'influence du moment fléchissant qui existe en A le bi-plateau s'infléchit, c'est-à-dire que le plateau de droite A′ tourne, par rapport au plateau de gauche A, d'un angle θ que nous avons désigné sous le nom d'*infléchissement*, et nous avons la formule dite de l'infléchissement, qui a été établie dans les numéros précédents (v. n° 142).

$$\theta = \frac{M}{EI}\Delta x'.$$

Cette rotation se fait autour d'un axe situé dans le plan du plateau et passant par son centre de gravité ; elle a pour effet de faire tourner, d'un mouvement d'ensemble, tout le

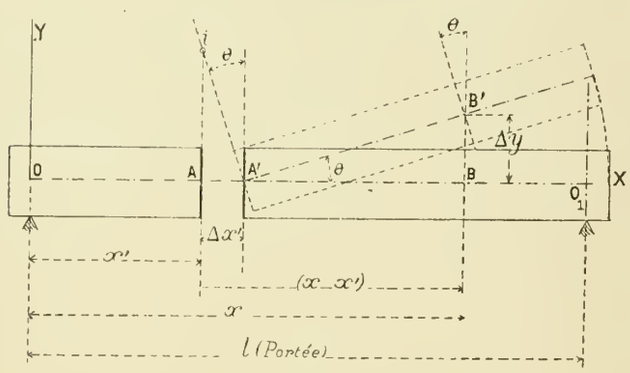


Fig. 141

tronçon de la poutre situé à droite du bi-plateau. Si nous considérons, sur ce tronçon, un point B situé à la distance x de l'origine, il décrira un arc de cercle que nous confondrons avec sa tangente, car l'angle de rotation θ est infiniment petit ; en vertu de ce mouvement, le point B sera amené de la position B à la position B′, entraînant avec lui, de AB en A′B′, la fibre moyenne.

Il y a deux effets produits au point B, savoir :

1° Un changement dans la pente de la fibre moyenne en B ; cette pente passera de la valeur zéro à la valeur θ ;

2° Un changement d'ordonnée, laquelle passe de la valeur zéro à la valeur $BB' = \Delta y$; et nous avons, évidemment, pour mesurer ces deux changements, les deux formules suivantes que nous nommerons les formules des défigurations élémentaires.

(*a*) $$\theta = \frac{M}{EI}\Delta x',$$

(*formule de la pente élémentaire*),

et $$\Delta y = \overline{A'B} \times \theta,$$

de laquelle on tire, en remplaçant $\overline{A'B}$ par $x - x'$ et θ par sa valeur tirée de (*a*),

(*b*) $$\Delta y = \frac{M}{EI}(x - x')\Delta x',$$

(*formule de l'ordonnée élémentaire*).

(*b*) **Leur interprétation.** — Interprétons géométriquement et mécaniquement ces deux formules :

Figurons en A*ab*B (fig. 142-I) la représentative des M,

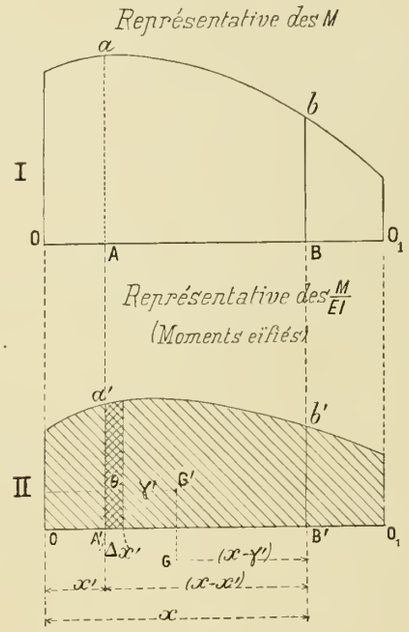


Fig. 142

ou moments fléchissants, laquelle sera généralement obtenue

par un funiculaire ainsi que nous l'avons montré plus haut. Divisons les ordonnées de cette représentative par le facteur EI répondant à chaque section. Appelons MOMENTS EÏFIÉS [1] les quotients $\frac{M}{EI}$ ainsi obtenus, et, enfin, dessinons en dessous (fig. 142-II) en $A'a'b'B'$,..., la représentative de ces moments eïfiés [2]. Interprétons maintenant les deux formules (*a*) et (*b*) :

$$(a) \qquad \theta = \frac{M}{EI}\Delta x';$$

θ sera l'aire d'un trapèze infiniment mince, de largeur $\Delta x'$, située immédiatement à droite du point A'; quant à la formule (*b*)

$$(b) \qquad \Delta y = \frac{M}{EI}(x - x')\Delta x',$$

Δy sera le moment statique de l'aire de ce trapèze θ par rapport au point B'.

Cela posé : les infléchissements pris par tous les bi-plateaux compris entre l'origine O et le point B, lequel est situé à la distance x de l'origine, produiront sur le point B, chacun pour leur compte, un accroissement de pente et un accroissement d'ordonnée qui se totaliseront, ainsi que nous allons l'indiquer, pour donner à l'élastique une pente totale α et une ordonnée totale y.

(*c*) **Effet d'une pente initiale α_0.** — Tout d'abord il arrivera que, soit parce que l'on encastrera la poutre à son origine O sous un angle donné α_0, soit parce qu'elle sera laissée libre de prendre sur ses appuis tel angle qu'elle voudra, la fibre moyenne, à son origine, subira une déviation angulaire initiale α_0. L'angle α_0 étant toujours très petit, nous le confondrons avec sa tangente trigonométrique, de telle sorte que α_0 et, plus généralement, toutes les expressions analogues, α, α_1.... représenteront des *pentes*.

En donnant cette pente initiale α_0 à la poutre, on entraînera avec elle tout le solide et l'on imprimera, tout d'abord, cette même pente α_0 à tous les éléments de la fibre moyenne ; par conséquent, la pente totale α, prise au point B par l'élastique, sera égale à la pente initiale α_0 augmentée de toutes les pentes élémentaires dues aux infléchissements successifs de tous les bi-plateaux ; ces pentes sont données, chacune, par la formule (*a*) et sont mesurées chacune par les aires élémentaires de la courbe des moments eïfiés (fig. 142-II).

D'autre part, la pente initiale α_0, imprimée à toute la poutre, fera monter le point B (si α_0 est positif) ou le fera descendre (si α_0 est négatif) d'une quantité algébriquement égale à $\alpha_0 x$; à cette quantité s'ajouteront tous les accroissements élémentaires d'ordonnée dus aux infléchissements des bi-plateaux, de telle sorte que, en définitive, l'ordonnée y de l'élastique au point B sera égale à $\alpha_0 x$ augmenté du moment statique, par rapport au point B, de toute l'aire des moments eïfiés comprise entre l'ordonnée de l'origine et l'ordonnée de ce point B.

(*d*) **Formules fondamentales sous forme symbolique.** — Nous pouvons maintenant écrire les formules fondamentales sous une forme symbolique sur laquelle nous allons d'abord nous entendre.

Convenons, d'une manière générale, de représenter l'aire de la courbe des moments *eïfiés* (fig. 142-II) par la lettre V, lorsque nous la prendrons dans sa totalité, c'est-à-dire entre l'origine O et l'extrémité O_1 de la travée. Lorsque nous la segmenterons, c'est-à-dire lorsque nous la prendrons entre deux points A et B ou O et B, nous ajouterons à la lettre V les indices A et B, ou O et B, de telle sorte que V_A^B ou V_O^B voudra dire : *aire du segment de la courbe des moments eïfiés compris entre les ordonnées des points* A *et* B, *ou celles des points* O *et* B.

Cela posé : G' étant le centre de gravité de ce segment (même fig. 142-II) et γ' l'abscisse de ce centre de gravité, je dis que nous aurons les formules fondamentales suivantes qui, sous une forme symbolique, ne sont que l'interprétation algébrique de ce qui vient d'être dit relativement à la pente α et à l'ordonnée y de l'élastique.

$$(A) \qquad \alpha = \alpha_0 + V_O^B$$

(*formule des pentes*),

$$(B) \qquad y = \alpha_0 x + V_O^B (x - \gamma')$$

(*formule des ordonnées*).

En effet, sur une nouvelle figure (fig. 143) représentons en I la courbe des moments eïfiés, et en II l'élastique ONO'_1 :

1° La formule (A) signifie que la pente α, de l'élastique au point B est égale à la pente initiale α_0, augmentée de toutes les pentes ou infléchissements élémentaires produits entre l'origine O et le point B, puisque chacune de ces pentes élémentaires θ étant mesurée par l'aire élémentaire correspondante de la courbe V, la pente totale sera mesurée par l'aire de cette courbe comprise entre l'ordonnée du point O et celle du point B, c'est-à-dire par V_O^B. La formule A est donc justifiée.

2° La formule (B) signifie (fig. 143-II) que l'ordonnée $Bb = y$ se compose :

1° De l'abaissement $\alpha_0 x$ produit par la pente initiale (c'est le premier terme du second membre de la formule B) ; 2° de la somme des ordonnées élémentaires Δy ou, ce qui revient

(1) Nous proposons ici de créer un mot barbare, il est vrai, mais qui aura pour nous un sens bien net ; nous l'avons préféré au mot *amplifié* adopté par un savant éminent, ce mot « amplifié » ayant, suivant nous, un caractère trop général.

(2) Les ordonnées du funiculaire eïfié ne sont pas une réduction proportionnelle de celles du funiculaire primitif, car le facteur EI change en chaque point. Mais si la poutre était homogène (E constant) et de section uniforme (I constant), alors il n'en serait plus ainsi, et la courbe *eïfiée* II serait une réduction ou une amplification proportionnelle de la courbe primitive I.

au même, des quantités qui leur sont égales, à savoir les moments des aires élémentaires par rapport au point B. Or, la somme des moments élémentaires d'une aire plane,

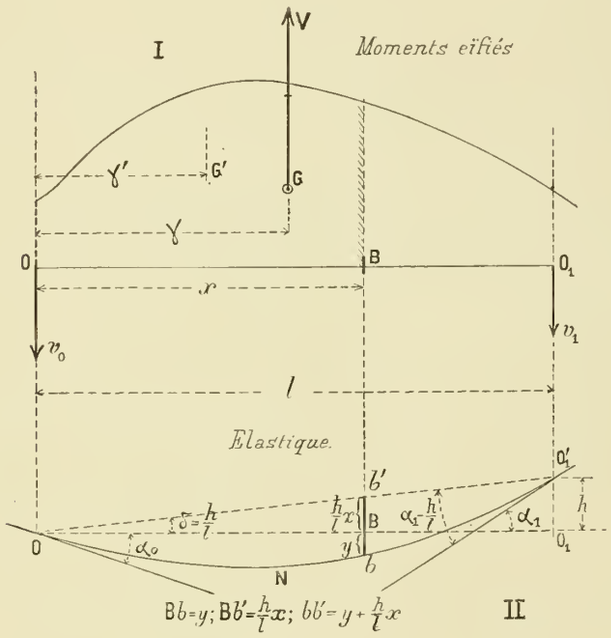


Fig. 143

par rapport à un point B, est égale au moment de l'aire entière V_0^B supposée concentrée en son centre de gravité, c'est-à-dire placée à la distance $x - \gamma'$ du point B; ce moment total est donc $V_0^B\ (x - \gamma')$. C'est le second terme du second membre de la formule B; cette formule est donc, elle aussi, justifiée.

(*e*) **Ordonnée finale** h **et pente finale** α_1. — Appliquons ces formules à l'extrémité O_1 de la poutre. Pour plus de généralité, nous admettrons une *dénivellation* ou ordonnée finale h; c'est-à-dire que nous supposerons que l'appui d'extrémité O_1 a été déplacé d'une hauteur h, positive (en montant) ou négative (en descendant). La première formule (A) nous donnera la pente finale α_1 et la seconde nous donnera l'ordonnée finale h.

Si les deux appuis sont de niveau, nous aurons $h = 0$.

Dans ce cas on fera dans les deux formules (A) et (B),

$$\alpha = \alpha_1, \quad x = l, \quad y = 0.$$

Dans le cas où il y aurait une dévinellation h, on fera

$$\alpha = \alpha_1, \quad x = l, \quad y = h.$$

Dès lors en désignant par V l'*aire totale* de la courbe des moments *eïfiés*, par γ l'abscisse de son centre de gravité G; les formules donnent les équations :

1er Cas. — Si les appuis sont de niveau,

(A') $\alpha_1 = \alpha_0 + V$ } Appuis

(B') $0 = \alpha_0 l + V(l - \gamma)$ } de niveau.

2e Cas. — S'il y a une dénivellation h,

(A'') $\alpha_1 = \alpha_0 + V$ } Appuis

(B'') $h = \alpha_0 l + V(l - \gamma)$ } dénivelés.

Toutes ces formules (A), (B), — (A'), (B') — (A'') (B'') ont une signification mécanique importante, sur laquelle nous allons insister.

178. Interprétation mécanique des formules fondamentales. — (*a*) Théorème des pentes sur les appuis. — Assimilons l'aire des moments eïfiés (fig. 143-I) à une *charge fictive* qui agirait sur la poutre, comme pourrait faire une couche de sable dont la hauteur, en chaque point, serait mesurée par l'ordonnée de cette aire. On se souvient que nous avons désigné symboliquement cette aire totale par la lettre V. Cette charge fictive donnerait lieu de la part des appuis O et O_1 à des réactions que nous conviendrons de représenter par

v_0 (*réaction de l'appui* O)

et

v_1 (*réaction de l'appui* O_1.) (1)

Calculons ces réactions; il suffira pour cela d'écrire qu'il y a équilibre entre les forces v_0, v_1 et la force V supposée appliquée au centre de gravité G de l'aire totale des moments eïfiés; en égalant à zéro la somme des moments de ces forces par rapport à l'appui d'extrémité O_1, nous aurons l'équation

(1) $$v_0 l + V(l - \gamma) = 0.$$

En la comparant à l'équation (B') du n° 177 (*e*), nous en tirons, pour le cas où la dénivellation est nulle,

(1') $$v_0 = \alpha_0.$$

En la comparant à l'équation B'', nous avons pour le cas où il y a une dénivellation h,

(1'') $$v_0 = \alpha_0 - \frac{h}{l}.$$

Ecrivons l'équation des moments par rapport à l'appui d'origine O; nous aurons l'équation

(2) $$v_1 l + V\gamma = 0.$$

Dans les équations B' et B'' remplaçons α_0 par sa valeur tirée de A' ou de A''; elles deviennent

(B') $$0 = \alpha_1 l - V\gamma$$ et

(B'') $$h = \alpha_1 l - V\gamma.$$

En leur comparant l'équation (2), nous en concluons, si les appuis sont de niveau,

(2') $$v_1 = -\alpha_1$$

ou bien, s'ils ne sont pas de niveau,

(2'') $$v_1 = -\left(\alpha_1 - \frac{h}{l}\right).$$

Or α_0 et α_1, si les appuis sont de niveau, aussi bien que

(1) Sur la fig. 143-I, les moments sont supposés positifs et par conséquent la charge fictive que représente la courbe V, appliquée en G, est positive, c'est-à-dire dirigée de *bas en haut* : les réactions v_0 et v_1 des appuis, dont il est question plus loin, seront donc négatives.

$\left(\alpha_0 - \frac{h}{l}\right)$ ou $\left(\alpha_1 - \frac{h}{l}\right)$, s'il y a dénivellation, ce sont les pentes initiale et finale de l'élastique, par rapport à la ligne d'appui OO_1 dans le cas des appuis de niveau, et OO'_1 s'il y a dénivellation.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, très important :

Théorème I, ou théorème des pentes sur les appuis. — *La pente de l'élastique au-dessus d'un appui est égale à la réaction, sur cet appui, de l'aire totale des moments eïfiés. A l'origine, la pente et la réaction sont de même signe ; à l'extrémité, elles sont de signe contraire.*

(*b*) **L'élastique obtenue par un funiculaire.** — Reprenons maintenant l'équation fondamentale (B) mais en y remplaçant la pente α_0 par son égale la réaction v_0, s'il n'y a pas de dénivellation, ou par $v_0 - \frac{h}{l}$ s'il y a une dénivellation, elle s'écrit :

1° Dans le cas des appuis de niveau

$$y = v_0 x + V_0^B (x - \gamma'), \qquad \text{et}$$

2° Dans le cas d'une dénivellation

$$y + \frac{h}{l} x = v_0 x + V_0^B (x - \gamma').$$

Dans le premier cas (fig. 143-II), le premier membre donne y ; dans le second cas, il donne $y + \frac{h}{l} x$, c'est-à-dire, dans les deux cas, l'ordonnée bb' de l'élastique par rapport à la ligne d'appui OO'_1.

Quant au second membre, c'est le moment fléchissant (fig. 143-I), par rapport à la section quelconque B, de toutes les forces fictives situées à gauche de cette section, forces comprenant aussi bien le poids fictif de l'aire des moments *eïfiés* comprise entre l'origine et le point B, que la réaction v_0 de l'appui d'origine. Nous nous retrouvons donc absolument dans les conditions déjà étudiées dans la statique graphique (v. n° 35), d'une poutre soumise à une charge continue mais variable en chaque point ; et, de même qu'un funiculaire construit pour des charges réelles nous permettait de connaître la représentative des moments fléchissants, de même un funiculaire construit sur ces charges fictives, représentées par l'aire des moments eïfiés, nous donnera l'élastique.

On voit donc, en résumé, que la statique graphique permet de résoudre complètement le problème de la poutre droite. Les épures à effectuer sont très simples ; la seule difficulté consiste, suivant nous, à savoir se retrouver dans les échelles ; sur ce point nous donnerons, à l'occasion, les conseils nécessaires. Résumons la marche à suivre pour tracer l'*élastique*.

(*c*) **Résumé.** — 1° On construira le funiculaire des moments fléchissants en prenant une distance polaire quelconque, d ; mais comme on aura souvent intérêt à tracer ce funiculaire par la méthode de M. Collignon (v. n° 12), celle-ci introduira tout naturellement la distance polaire : $d = 1/2\, l$.

2° Chacune des ordonnées de ce funiculaire sera divisée par le produit EI qui correspond à la section de la poutre, ce qui permettra de construire le funiculaire des M : EI, nommé *funiculaire eïfié*.

3° (*a*) On décomposera (de préférence à l'aide de lignes verticales) le funiculaire eïfié en aires élémentaires partielles.

(*b*) On choisira pour toutes ces aires une base commune d', de rectangles d'équivalence, et on calculera pour chacune d'elles la hauteur h du rectangle équivalent.

(*c*) Considérant chaque fois h comme une force fictive, on appliquera cette force au centre de gravité de l'aire partielle.

4° On construira enfin, sur les forces telles que h, considérées comme des poids fictifs qui chargeraient la poutre, un funiculaire qui donnera ce que nous nommerons : l'*Elastique-épure*. Ce funiculaire aura été construit à l'aide d'une distance polaire d'' qui pourrait être quelconque ; mais, si l'on emploie le tracé de M. Collignon, on aura encore $d'' = 1/2\, l$.

5° En multipliant les ordonnées de l'*Elastique-épure* par le produit $k = d \times d' \times d''$ des coefficients d'échelle des trois épures successives que l'on vient de faire, on aura les ordonnées de la véritable élastique que nous nommerons l'*Elastique-espace*. Si, comme nous le recommandons, l'on a pris $d = d' = d'' = 1/2\, l$, alors on aura pour le *coefficient final d'échelle* :

$$k = \frac{l^3}{8}.$$

(*d*) **Cas d'une poutre homogène et de section constante.** — Si la poutre est homogène (E constant), et à section uniforme (I constant), on pourra se dispenser de construire le funiculaire des M : EI. On opèrera directement, pour la division en aires partielles, sur le funiculaire des moments *naturels*, c'est-à-dire non eïfiés ; seulement, le facteur EI devra être introduit en dénominateur du coefficient final d'échelle et l'on aura pour ce coefficient final k :

$$k = \frac{dd'd''}{\mathrm{EI}},$$

et si :

$$d = d' = d'' = 1/2\, l,$$

$$k = \frac{l^3}{8\mathrm{EI}}.$$

178 *bis*. **Résistance de la poutre.** — Pour que la pièce soit dans de bonnes conditions de résistance, il faut que, dans chaque section, la fibre fatiguée soit soumise à un effort unitaire inférieur à la résistance de sécurité R (v. n° 136). Si dans une section on atteint précisément cette résistance de

sécurité on est, pour cette section, dans une bonne condition économique.

Si pour toutes les sections la fibre fatiguée supporte la résistance de sécurité, on est alors, pour l'ensemble de la pièce, dans la meilleure de toutes les conditions économiques et la poutre est dite *d'égale résistance*. Nous consacrerons un chapitre aux poutres d'égale résistance.

Pour vérifier la résistance d'une section on emploie la formule d'équarrissage (v. n° 144).

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}.$$

$\frac{I}{v}$ est le moment de résistance du profil de la poutre.

R est la résistance de sécurité : 6^k, 7^k et 8^k pour le fer, 10^k, 11^k et 12^k pour l'acier, $0^k,6$ pour le bois (par mm^2).

M est le moment fléchissant. Il est connu en chaque point si la représentative des moments a pu être tracée. Nous avons vu qu'elle le sera, avec le seul secours de la statique pure, si les liaisons sont *strictes* (v. n° 169). Si elles sont *surabondantes* alors il faudra faire intervenir les déformations de la pièce pour déterminer les réactions des appuis et pour en déduire le tracé définitif du funiculaire des moments fléchissants.

Nous montreront plus tard (§ 7), en commençant d'abord par des exemples simples, comment se fera cette détermination des réactions, pour les liaisons surabondantes. Quant aux calculs de résistance nous les ferons, dans chaque cas, en prenant surtout des exemples numériques.

§ 6. — Applications aux poutres non encastrées

179. **Poutre uniformément chargée, et supportant, en outre, des charges isolées.** — (*a*) **Données numériques du problème.** — Une poutre de 9^m de portée repose librement sur deux appuis ; elle est chargée d'un poids total de 1260^k uniformément réparti et, en plus, de quatre charges isolées de 250^k, 200^k, 235^k et 170^k dont les positions sont indiquées sur la fig. 144 (I).

On demande : 1° de déterminer son équarrissage dans l'hypothèse où elle serait (1er cas) en fer, ou (2e cas) en bois ;

2° De tracer sa courbe élastique et de déterminer les flèches dans les deux hypothèses indiquées ci-dessus.

Nota. — L'exemple que nous choisissons ici a un caractère tout à fait général ; nous ne le quitterons plus pendant tout ce chapitre ; c'est sur lui que nous montrerons, plus loin, l'effet des encastrements. Nous engageons le lecteur à suivre nos explications en refaisant nos épures, mais avec d'autres échelles. Une fois ce problème bien compris, ceux qui viendront ensuite paraîtront très faciles.

(*b*) **Echelles des longueurs et des forces.** — Nous adopterons pour échelles des longueurs $0^m,02$ par mètre ; pour celle des forces, nous prendrons $0^m,015$ pour 100^k ; ces échelles sont indépendantes l'une de l'autre, nous sommes libres de les choisir comme bon nous semble. Nous avons commencé par les dessiner dans le bas de la feuille.

(*c*) **Echelle des moments.** — Nous pouvons aussi convenir, dès maintenant, de construire les funiculaires des moments par la méthode de M. Collignon, dans laquelle on prend toujours pour distance polaire la demi-portée

$$d = 1/2\, l,$$

ce qui, dans le cas actuel, revient à faire

$$d = 4^m,50.$$

D'une manière générale, connaissant, d'une part, l'échelle des forces et, d'autre part, la distance polaire d, on en déduit l'échelle des moments en opérant de la manière suivante :

Remarquons d'abord que ce sera presque toujours 1000 kilogramomètres, (1000^{km}) qu'il importera de savoir représenter. Dès lors, on cherchera la longueur δ qui représente 1000 kilos (ici on aura $\delta = 0^m,15$), et l'on dira :

Si la distance polaire était 1^m cette longueur δ représenterait aussi 1000^{km} ; mais puisque la distance polaire est d (ici $d = 4,50$) cette longueur δ représente d fois plus de km ; autrement dit δ représente $d \times 1000^{km}$ et par conséquent, 1000^{km} seront représentés par le quotient de δ : par d ; d'où la règle suivante pour l'échelle des moments.

Règle. — « La longueur qui représente 1000^{km}, s'obtient « en divisant par la distance polaire la longueur qui repré- « sente 1000^k à l'échelle des forces. »

Dans le cas actuel $\delta = 0,15$, $d = 4,50$ et par suite le quotient $\delta : d$ est

$$\frac{\delta}{d} = \frac{0,15}{4,50} = 0^m,0333.$$

Telle est l'échelle de 1000^{km}.

Les trois échelles des longueurs, des forces et des moments sont représentées au bas de la fig. 144. On y voit également les échelles des flèches relatives à la poutre en fer ainsi qu'à la poutre en bois ; mais, comme celles-ci dépendent du facteur I, moment d'inertie de la section transversale, et que nous ne le connaissons pas encore, nous laissons pour plus tard le tracé de ces échelles.

Traçons maintenant les funiculaires des moments fléchissants.

(*d*) **Funiculaire des moments fléchissants dus aux charges isolées.** — Nous avons représenté en I (fig. 144) la portée par $AB = 9^m$ mesurés à l'échelle des longueurs et

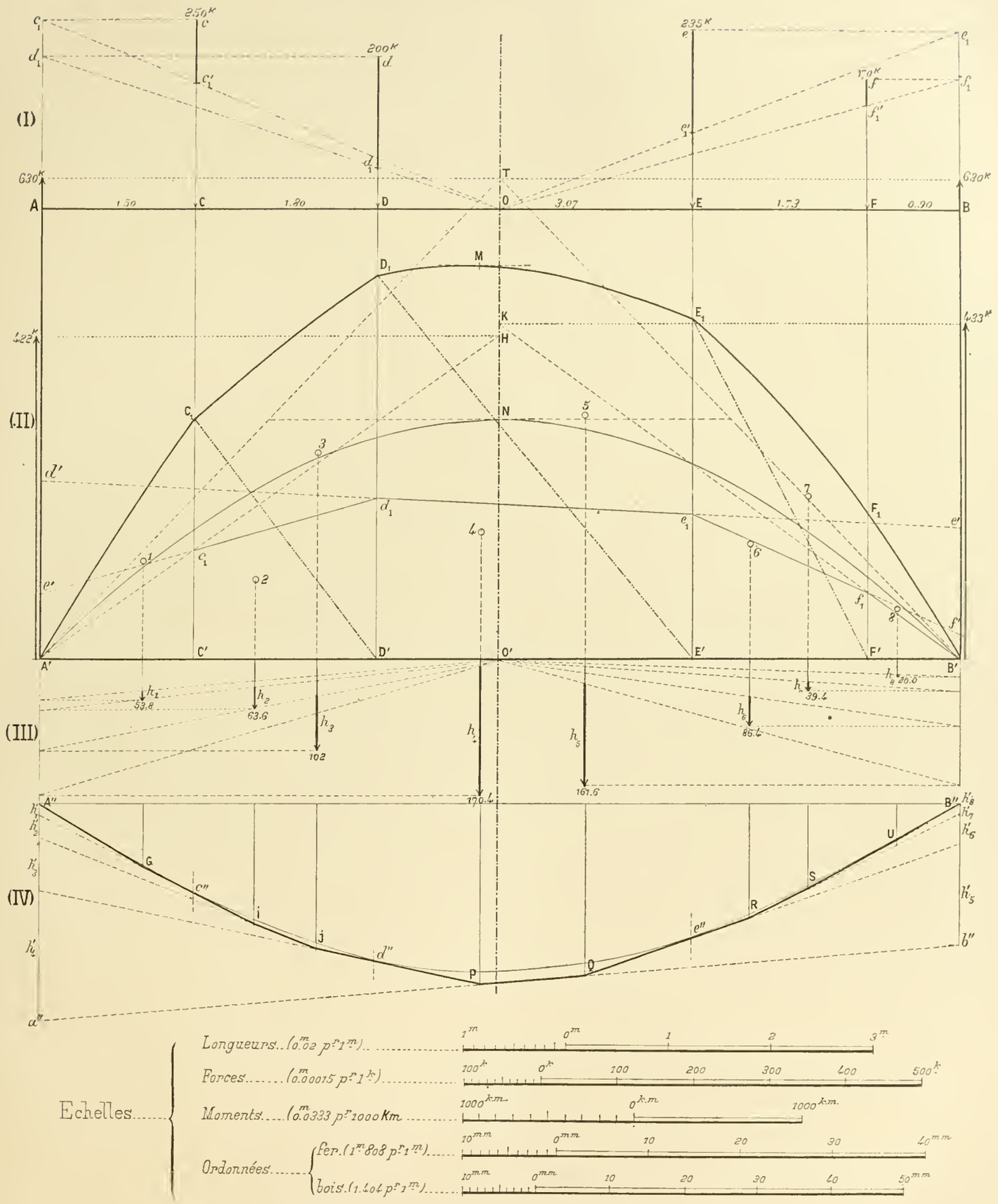

(I)
(II)
(III)
(IV)
250K
200K
235K
170K
630K
422K
433K
A
C
D
O
E
F
B
1.50
1.80
3.07
1.73
0.90
T
M
K
H
N
53.8
63.6
102
170.4
161.6
86.6
39.4
26.6
Echelles
Longueurs..(0m.02 pr 1m)
Forces.....(0m.00015 pr 1k)
Moments....(0m.0333 pr 1000 Km
Ordonnées.
fer.(1m.808 pr 1m)
bois.(1.404 pr 1m)

Fig. 141

les points d'application des charges isolées par CDEF, la distance d'un de ces points au précédent ou à l'origine étant successivement à partir du point A, $1^m,50$, $1^m,80$, $3^m,67$ et $1^m,73$. Quant aux charges isolées, nous les avons figurées par $cC = 250^k$, $dD = 200^k$, $eE = 235^k$, $fF = 170^k$, les longueurs de ces droites étant mesurées à l'échelle des forces. Nous tracerons le funiculaire par la méthode Collignon (v. n° 42) ; à cet effet :

Projetons sur la verticale d'origine la force cC en Ac_1, puis joignons c_1O ; l'intersection de cette droite avec cC donnera en c'_1 l'extrémité du segment cc'_1 intercepté sur la verticale d'origine par les prolongements des deux premiers côtés du funiculaire des charges isolées ; nous avons marqué ce segment par un gros trait.

Opérons de même avec les autres forces, en projetant vers l'origine celles qui sont à gauche du milieu O et vers l'extrémité celles qui sont à droite ; nous obtiendrons ainsi : 1° en cc'_1 et dd'_1 les segments d'origine ; 2° en ee'_1 et ff'_1 les segments d'extrémité.

Dès lors le tracé de ce funiculaire est facile : sur la verticale d'origine de la poutre portons bout à bout en $A'c'$, $c'd'$ (fig. II) les segments cc'_1, dd'_1, que nous venons d'obtenir ; portons de même sur la verticale d'extrémité en $B'f'$, $f'e'$ les segments ee'_1 ff'_1 ; puis joignons $d'e'$; nous obtenons en d, c, le côté *moyen* (ici le 3e) du funiculaire des charges isolées ; en joignant d_1 e'_1 nous obtenons en d_1 c_1 le côté n° 2 du funiculaire ; enfin le côté n° 1 est Ac_1. Le côté n° 4, e_1 f_1, et le n° 5, f_1 B', s'obtiennent de la même manière.

Le funiculaire des charges isolées est donc obtenu. Pour avoir la valeur des réactions des appuis, dues à ces charges, il suffit de prolonger jusqu'à la verticale milieu les côtés extrêmes $A'c_1$ et $B'f_1$ du funiculaire (v. n° 45) ; la réaction d'origine sera mesurée par OH, celle d'extrémité, par OK ; en mesurant ces droites à l'échelle des forces nous trouvons

$$OH = 422^k, \qquad OK = 433^k.$$

(*e*) **Funiculaire des moments fléchissants dus à la charge uniformément répartie.** — Nous avons vu (n°. 51) que dans le cas d'une charge uniformément répartie, la représentative des moments fléchissants est une parabole passant par les appuis et dont le sommet est à une hauteur égale à 1/4 P, P désignant la charge totale ; ceci suppose, bien entendu, que la distance polaire est 1/2 *l*.

Ici nous avons : $P = 1260^k$ et $1/4\ P = 315^k$.

Le sommet N de notre représentative des moments dus à la charge répartie sera donc à une hauteur ON égale à la longueur qui, à l'échelle des forces, représenterait 315^k. On voit en A'NB' (fig. II) cette parabole.

La réaction de chaque appui, dans ce cas, sera la moitié de la charge totale, soit 630^k, et elle est indiquée par la hauteur O'T au-dessus de la droite des appuis, de l'intersection T de la tangente à la parabole au point A avec la verticale milieu.

(*f*) **Moments totaux.** — En chaque point de la poutre le moment fléchissant total sera égal à la somme des moments dus : 1° aux charges isolées ; 2° à la charge uniformément répartie. La représentative de ce moment fléchissant sera donc, en chaque point, figurée par une ordonnée égale à la somme des ordonnées correspondantes des deux funiculaires que nous venons de tracer.

C'est ce que l'on appelle (v. Ct) faire une addition *analytique*.

Bref, le funiculaire total s'obtiendra en additionnant *analytiquement* le polygone $A'c_1d_1e_1f_1B'$, avec la parabole A'NB' ; et nous obtiendrons, pour représentative définitive des moments fléchissants, la ligne $A'C_1D_1E_1F_1B'$, laquelle est formée d'une série d'arcs de paraboles.

180. **Calcul de la section à donner à la poutre.** — (*a*) **Moment maximum ; section dangereuse.** — Si l'on mène au funiculaire définitif une tangente parallèle à la droite des appuis, on obtient par la hauteur du point de tangence la valeur du moment fléchissant maximum. Dans la fig. II le point de tangence est M ; sa hauteur au-dessus de la droite AB est, à l'échelle des forces, mesurée par 517^k. La valeur du moment fléchissant en ce point sera donc

$$517^k \times (\text{distance polaire}) = 517^k \times 4,50 = 2326^{km}.$$

Voilà comment on opérerait si l'on n'avait pas tracé d'échelle spéciale pour les moments. Sur notre épure, il est plus simple de mesurer directement la hauteur du point M à l'échelle des moments : on retrouve ainsi 2326^{km} pour le *moment maximum*.

Comme nous supposons que la poutre est à section constante il en résulte que la section répondant à ce moment maximum est la *section dangereuse* ; nous allons en calculer les dimensions et nous les appliquerons à toute la poutre.

(*b*) **Calcul de la section pour une poutre en fer.** — L'équation d'équarrissage (v. n° 141) nous donne

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}.$$

En remplaçant M par la valeur trouvée ci-dessus, 2326^{km}, et R par $6.000.000^k$ qui est la résistance de sécurité répondant au mètre carré (1), il vient :

$$\frac{I}{v} = \frac{2326}{6.000.000} = 0,000388.$$

Il nous faut donc employer un fer dont la section présente pour moment de résistance I : *v* la valeur ci-dessus.

Or, il est impossible de faire fabriquer des fers sur des dimensions spéciales ; il faut, de toute nécessité, utiliser

(1) Dans les calculs, il est indispensable, si l'on veut éviter des fautes énormes dans la position de la virgule, de *toujours* prendre pour unités le mètre et le mètre carré : *jamais* le millimètre.

ceux que l'industrie met à notre disposition. A cet effet, les albums de forges donnent les valeurs de I : v pour les différents profils de fers qu'elles livrent au commerce. Il suffira donc de consulter un de ces albums pour voir le profil dont le moment de résistance se rapproche le plus de celui que nous désirons avoir (1).

Nous extrayons de l'album des forges de la Providence le

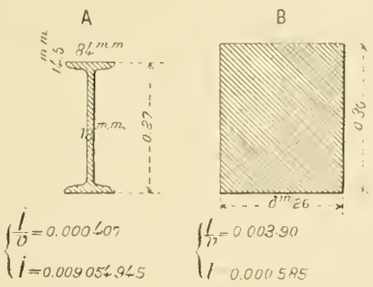


Fig. 145

profil représenté fig. 145-A et dont le moment de résistance est 0,000407, c'est-à-dire un peu supérieur à celui que nous cherchons ; nous aurons donc excès de sécurité en l'adoptant. Le poids par mètre courant de cet échantillon de fer est 44k.

On trouvera ce fer, et beaucoup d'autres, dans le tableau des fers qui se trouve à la fin de l'ouvrage.

(c) **Calcul de la section pour une poutre en bois.** — Supposons que, pour des raisons étrangères à la stabilité de la construction telles que aspect, épaisseur imposée au plancher, etc., la poutre en bois doive avoir 0m,30 de hauteur ; il s'agit alors de déterminer sa largeur.

Reprenons comme ci-dessus l'équation d'équarrissage

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

dans laquelle nous ferons :

$$M = 2326 \qquad \text{et} \qquad R = 600.000 \text{ (v. n° 136)},$$

il viendra $\frac{I}{v} = 0{,}00388$.

Mais nous savons que le moment d'inertie d'un rectangle est $\frac{ab^3}{12}$ (v. n° 84).

a représentant la base, b la hauteur, le moment de résistance sera donc :

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^3}{12} : \frac{b}{2} = \frac{ab^2}{6},$$

et nous pourrons écrire

$$(1) \qquad \frac{ab^2}{6} = \frac{a \times \overline{0{,}30}^2}{6} = 0{,}00388$$

(1) Dans les albums ou trouve sous la rubrique $\frac{I}{n}$ les valeurs $\frac{I}{v}$ des profils. Généralement la lettre n désigne ce que nous avons appelé v.

d'où $a = 0^m{,}259$ soit, en nombre rond, 0m,26.

La poutre en bois devra donc avoir comme équarrissage 0m,30 × 0m,26 (fig. 145).

Remarque. — Nous nous étions donné la hauteur de la poutre, $b = 0^m{,}30$ et l'équation (1) nous a fait connaître la largeur a.

Si l'on s'était donné, *à priori*, la largeur a, la même équation aurait fait connaître la hauteur b ou son carré b^2.

$$b^2 = \frac{6 \times 0{,}00388}{a}.$$

Si l'on ne donne ni la hauteur ni la largeur, alors l'équation est indéterminée. Nous verrons plus loin, en parlant des planchers en bois (chap. IV), comment on profitera de cette indétermination pour économiser le plus possible la matière en débitant le bois en grume suivant ce que nous nommerons l'*Equarrissage normal.*

Étudions maintenant l'*Elastique.*

181. Echelles de l'élastique. — (a) **Généralités relatives aux échelles d'ordonnées.** — La poutre est homogène et à section constante ; par conséquent, nous avons vu (v. n° 178-d) qu'il était inutile d'*eïfier* les moments. L'*élastique-épure* s'obtiendra en construisant un funiculaire sur l'aire représentative des moments considérée comme une charge fictive continue, analogue à une couche de sable de hauteur variable, qui pèserait sur la poutre ; seulement pour avoir les grandeurs absolues des ordonnées de l'*élastique-espace*, il faudra :

1° Mesurer à l'échelle des forces les ordonnées de l'*élastique-épure* ;

2° Multiplier le nombre ainsi obtenu par les trois coefficients d'échelle d, d' et d''.

N'oublions pas que :

d est la distance polaire qui a servi à établir le funiculaire des moments fléchissants ;

d', c'est la base commune de tous les rectangles d'équivalence des aires partielles suivant lesquelles le funiculaire des moments *eïfiés* a été décomposé. Alors, avec cette base d', chaque rectangle d'équivalence est représenté par une hauteur h, que l'on a assimilée à une force fictive ; de telle sorte que les aires partielles du funiculaire des moments *eïfiés* ont pour expression hd' ; enfin, d'', c'est la distance polaire qui a servi à établir un funiculaire sur les forces fictives précédentes telles que h ;

3° Si le funiculaire des moments n'a pas été *eïfié*, diviser en outre le résultat par le produit EI. De plus, si, comme sur notre épure, on a pris $d = d' = d'' = 1/2\, l$, le coefficient final d'échelle k sera

$$k = \frac{l^3}{8EI}.$$

Nous calculerons donc ce coefficient k une première fois

pour la poutre en fer et une seconde fois pour celle en bois ; après quoi, en raisonnant comme nous l'avons fait pour les échelles de moments (v. n° 179-*c*), nous reconnaîtrons que la longueur de la ligne qui représentera un mètre d'ordonnée s'obtiendra en divisant par k, ou en multipliant par l'inverse de k la longueur qui représente une force de un kilogramme. En résumé voici la règle :

(*b*) **Règle.**— 1° Si la poutre est à section variable, on *eïfie* le funiculaire des moments ; on en déduit l'*élastique-épure*, et la longueur qui représentera 1^m d'ordonnée de l'*élastique-espace*, s'obtiendra en multipliant par le quotient $\frac{1}{d \times d' \times d''}$ la longueur qui représente une force de 1 kilogramme.

2° Si la poutre est homogène et à section constante, on opère sur le funiculaire des moments non eïfiés ; on en déduit l'*élastique-épure* et la longueur qui représentera 1^m d'ordonnée de l'*élastique-espace* s'obtiendra en multipliant par le quotient $\frac{EI}{d \times d' \times d''}$ la longueur qui représente une force de 1 kilogramme.

(*c*) **Echelle d'ordonnées pour la poutre en fer.** — Appliquons cette règle pour le fer. Le module d'élasticité E, rapporté au mètre carré, est

$$E = 20.000.000.000 = 20 \times 10^9.$$

Quel est le moment d'inertie I ?

D'une manière générale, les albums de forges donnent I : v, et aussi la hauteur de la section, c'est-à-dire, $2v$; par conséquent, en multipliant le I : v donné par les albums par la demi-hauteur, on aura I.

Dans l'exemple actuel, on a (v. fig. 145) :

$$\frac{I}{v} = 0{,}000407 \qquad \text{et} \qquad v = \frac{0{,}27}{2} = 0{,}135. \text{ Donc}$$

$$I = 0{,}000407 \times 0{,}135 = 0{,}000054945$$

et comme $l = 9^m$, donc :

$$\frac{1}{k} = \frac{8EI}{l^3} = \frac{8 \times \overbrace{20 \times 10^9} \times 0{,}000407 \times 0{,}135}{9^3}$$

ou, en faisant les calculs :

$$\frac{1}{k} = \frac{8791200}{729} = 12059.$$

Sur notre épure 100^k sont représentés par 0^m,015 et par suite 1^k est représenté par 0,00015. Donc 1^m d'ordonnée sera représenté par

$$0{,}00015 \times 12059 = 1^m{,}808$$

et 0^m,01 d'ordonnée le sera par 0^m,0181.

Telle sera l'échelle d'ordonnées pour la poutre en fer.

(*d*) **Echelle d'ordonnées pour la poutre en bois.** — Pour le bois de sapin, on a (v. n° 136)

$$E = 1\,500\,000\,000,$$

$$\frac{I}{v} = 0{,}00390, \qquad v = 0{,}15\ldots \qquad I = 0{,}000585, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{8EI}{l^3} = \frac{8 \times 1\,500\,000\,000 \times 0{,}000585}{729}$$

$$\frac{1}{k} = 9629.$$

Et comme 1^k est représenté par 0,00015, il s'en suit que 1^m d'ordonnée le sera par 0^m,00015 × 9629 = 1^m,444, et 0^m,01 d'ordonnée sera représenté par 0^m,0144.

Telle est l'échelle d'ordonnées pour la poutre en bois.

182. **Tracé de l'élastique.** — (*a*) **Décomposition de la courbe des moments en aires partielles.** — Nous avons dit (n° 178-*b*) que la courbe élastique n'est autre chose que le funiculaire des charges fictives proportionnelles aux aires élémentaires de la courbe des moments et appliquées au centre de gravité de ces aires ; nous sommes donc conduits à décomposer le polygone A′ $C_1D_1E_1F_1$ B′ en éléments de surface faciles à mesurer et dont le centre de gravité soit facile à obtenir.

Sur la grande épure précédente (fig. 144) nous avons divisé l'aire en triangles : Il semble que l'on ait ainsi plus de précision, et surtout plus de facilité pour déterminer les centres de gravité des aires partielles. Mais le bénéfice de cette précision n'est pas suffisant pour compenser la complication de calculs qui en sera la conséquence. Il est préférable de diviser en trapèzes d'égale largeur, comme l'indique la fig. 146. Divisons la base en un nombre n de divisions qui soit un multiple de 4 ; par exemple en 12, 16, 20... parties égales. Sur les fig. 146 et 147 nous avons divisé en 12.

Par les divisions paires 2, 4, 6... menons, ou plutôt imaginons que l'on ait mené des verticales ; elles subdivisent l'aire totale en 6 trapèzes, dont 2 triangles, ayant chacun pour base $2/n$ de l.

Quelle sera la grandeur de la force fictive qui remplacera l'aire de chacun d'eux ? D'abord cette aire a pour expres-

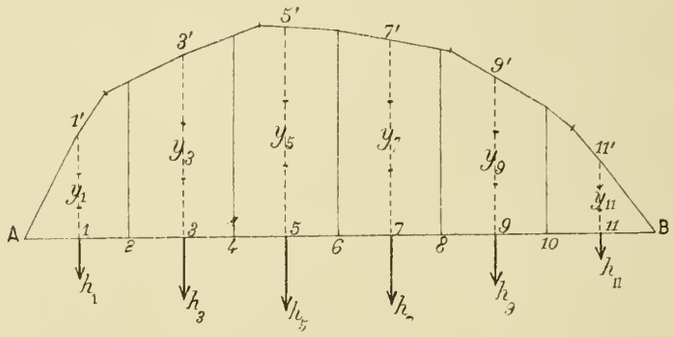


Fig. 146

sion le produit de la base $2/n$ de l par la hauteur moyenne telle que $\overline{1,1'} - \overline{2,2'}, \ldots, \overline{11,11'}$. On voit que ces hauteurs moyennes ne sont autre chose que les ordonnées $y_1, y_3, y_5, \ldots$ de rang impair ; c'est pourquoi il suffirait de les tracer, sans s'occuper des ordonnées de rang pair. Si l'on emploie

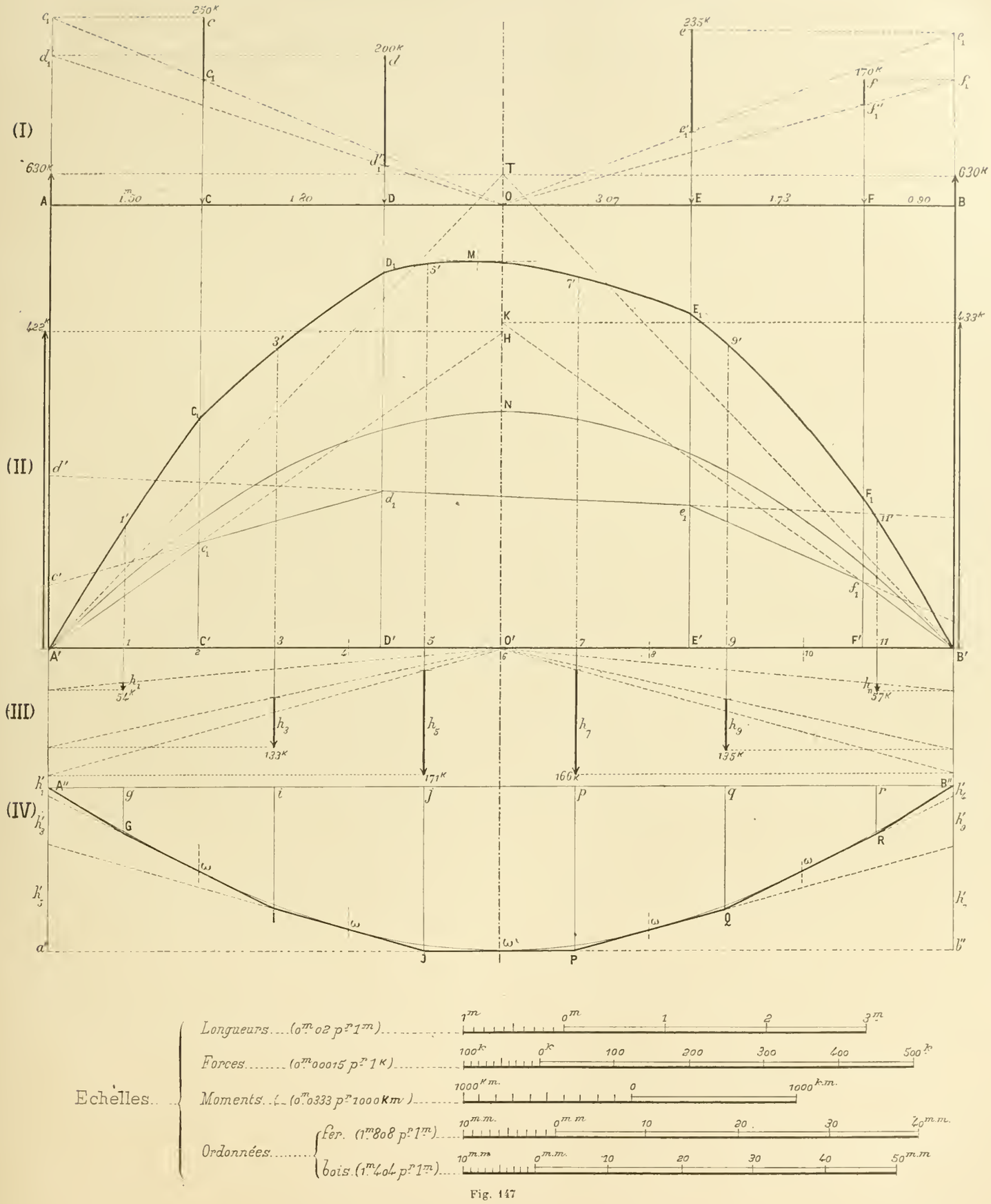

(I)
(II)
(III)
(IV)
250K
200K
235K
170K
630K
422K
433K
52K
133K
171K
166K
135K
57K
A
B
C
D
E
F
O
T
M
N
K
H
A'
B'
C'
D'
O'
E'
F'
A''
B''
G
I
J
P
Q
R
Echelles
Longueurs (0m02 pr 1m)
Forces (0m00015 pr 1K)
Moments (0m0333 pr 1000Km)
Ordonnées
fer. (1m808 pr 1m)
bois. (1m404 pr 1m)

Fig. 147

la méthode Collignon, la base de réduction d' est égale à $1/2\,l$. Par conséquent, les forces fictives, ou hauteurs d'équivalence, h_1, h_3, h_5....., destinées à remplacer chaque aire, auront pour expression :

$$h_1 = 2\,\frac{ly_1}{n} : \frac{l}{2} = y_1 : \frac{n}{4}$$

$$h_3 = 2\,\frac{ly_3}{n} : \frac{l}{2} = y_3 : \frac{n}{4}, \text{ etc.....}$$

En résumé, ces forces fictives h_1, h_3..... s'obtiendront, graphiquement, en divisant les ordonnées de rang impair par $1/4\,n$.

C'est afin d'avoir pour $1/4\,n$ un nombre entier que nous avons recommandé de prendre pour n un multiple de 4.

Pour $n = 12$, on aura $h_3 = \frac{1}{3}\,y_3$.

Pour $n = 16$, on aura $h_3 = \frac{1}{4}\,y_3$, etc.....

Sur notre épure, $n = 12$, par conséquent les forces fictives h_1, h_3..... (fig. 147-III) ont été prises égales aux tiers des ordonnées y_1, y_3.....

Quel sera leur point d'application ? Théoriquement il faudrait chercher les centres de gravité des trapèzes et des triangles d'extrémités et y appliquer ces forces. Dans le cas où l'on voudra une très grande précision, nous engageons à opérer ainsi ; mais, pratiquement, on peut, sans erreur bien sensible, admettre que les forces fictives peuvent être dirigées suivant les ordonnées de rang impair ; c'est ce que nous avons fait sur l'épure (fig. 147).

Nota. — Sur l'épure précédente (fig. 144), nous avions décomposé en triangles ayant des bases inégales ; nous avions ainsi 8 triangles et 8 forces fictives h_1, h_2..... h_8, appliquées en leurs centres de gravité, c'est-à-dire aux tiers des largeurs de base. Pour trouver chaque force fictive, il a fallu faire l'opération arithmétique suivante (suivre sur le triangle $C'C_1D'$) [fig. 144] :

1° Mesurer la base $C'D'$;

2° Mesurer la hauteur $C'C_1$;

3° Faire le produit de la base par la moitié de la hauteur ;

4° Diviser ce produit par $1/2\,l$.

Le quotient final, *mesuré à l'échelle des forces*, a été porté en h_1, h_2..... (fig. 144-III). On voit que tout cela est plus compliqué que lorsque l'on opère en décomposant en trapèzes de largeurs égales, comme sur la figure 147.

Jusqu'à nouvel ordre, ne nous occupons plus que de cette figure 147.

(*b*) **Funiculaire de l'élastique.** — Construisant alors sur ces forces, ainsi que nous l'avons fait plus haut, un funiculaire par la méthode de M. Collignon, nous obtenons en A″GIJPQRB″ (fig. IV) le polygone élastique dont les côtés sont tangents à la courbe élastique qui serait résultée de la division du polygone des charges en une infinité de surfaces élémentaires infiniment minces.

En (IV) nous avons représenté, en trait fort, le polygone élastique et, en trait fin, la courbe élastique *qui lui est tangente*.

En mesurant à l'échelle des flèches les ordonnées de la courbe par rapport à la droite A″B″ on trouve, au point considéré de la poutre, la valeur de la flèche résultant des charges qu'elle devra supporter.

Nous trouvons ainsi que, pour la poutre en fer, la flèche prise aura sa plus grande valeur aux environs du milieu de la portée où elle atteindra $0^m,018$. La poutre en bois prendra, au même point de la portée, une flèche de $0^m,023$.

(*c*) **Points de tangence de l'élastique.** — Les tangences se font aux points ω, ω, ω (fig. IV) qui sont à plomb des divisions paires. Cela tient à ce que, en arrivant à ces points, on a, en quelque sorte, *épuisé* toute une zone verticale de l'aire des moments.

Au contraire, dans la figure 144 où l'on avait divisé en triangles, les tangences de l'élastique ne se faisaient qu'aux points e'' d''..., c'est-à-dire toutes les fois que l'on avait épuisé aussi une zône verticale tout entière. On voit, sur cette figure 144, combien aux environs de PQ (fig. IV) l'élastique s'écarte du polygone funiculaire. C'est une raison de plus pour adopter la division en trapèzes.

183. Pente initiale et pente finale de l'élastique. — Outre les flèches de la fibre neutre, la courbe élastique fait encore connaître les pentes de cette fibre neutre aux différents points où on la considère, et en particulier à l'origine A″ et à l'extrémité B″. La pente de la poutre en ces points est donnée par celle de la tangente à la courbe élastique, c'est-à-dire par la pente des côtés extrêmes du polygone élastique.

Ainsi, dans le cas de la poutre en fer l'ordonnée Gg (fig. 147-IV) évaluée à *l'échelle des flèches* est $0^m,005$, la longeur $A''g$ est $\frac{l}{12} = \frac{9^m}{12} = 0^m,75$, on en déduit pour valeur α_0 de la pente initiale de l'*élastique-espace*

$$\alpha_0 = \frac{0,005}{0,75} = 0,00666.$$

Pour l'inclinaison finale en B″ on trouve très sensiblement la même valeur dans l'exemple que nous avons choisi ; mais c'est un effet du hasard et une autre répartition des charges sur la poutre aurait pu donner pour la pente finale une valeur α_1 très différente de α_0.

Dans le cas de la poutre en bois on trouve pour valeur de α_0

$$\alpha_0 = \frac{0,0062}{0,75} = 0,0083.$$

Nous étudierons plus loin comment en modifiant d'une manière forcée, par un encastrement, les pentes initiale et finale de l'élastique on modifie aussi les moments fléchissants sur toute la poutre. Nous allons d'abord étudier les élastiques de poutres qui, sans être chargées, ne seraient soumises qu'à des encastrements.

§ 7. — Poutres, a section constante, encastrées et non chargées

184. Poutre uniquement soumise à un couple d'encastrement sur un seul de ses appuis. — (*a*) Moments fléchissants et efforts tranchants. — Supposons que la poutre ne supporte aucune charge mais qu'elle soit soumise, sur son appui d'origine A, à un couple d'encastrement M_0. Nous avons vu (v. n° 174) que la représentative des moments fléchissants était une droite telle que aB (fig. 148-I).

Si les moments étaient figurés en vraie grandeur on devrait prendre $\overline{Aa} = M_0$. Mais nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les funiculaires sont tracés par la méthode Collignon et nous avons vu que, dans ce cas, leur distance polaire d, c'est-à-dire le coefficient d'échelle était égal à la demi-portée ($1/2\ l$). Pour avoir sur notre épure un pareil coefficient d'échelle nous devrons prendre l'ordonnée représentative, Aa, du moment d'encastrement M_0 de telle sorte qu'il faille la multiplier par la distance polaire, $1/2\ l$, pour avoir M_0.

On prendra donc, *à l'échelle des forces*

$$\overline{Aa} = M_0 : \frac{l}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{Aa} = \frac{2M_0}{l}.$$

Nous pourrions tracer le funiculaire par toute autre méthode que celle de M. Collignon, mais son emploi nous fournira, ainsi qu'on va le voir, des résultats très faciles à traduire en formules.

Nous avons vu (v. n° 173) que l'effort tranchant était égal à la pente de la *représentative vraie* des moments fléchissants; et comme cette représentative est une droite, sa pente est constante; par conséquent, si T est cet effort tranchant, on aura :

$$(1) \qquad T = \frac{M_0}{l} \qquad \text{(Effort tranchant)}$$

Nous nommons *représentative vraie*, par opposition avec *représentative-épure*, celle que l'on aurait si les moments étaient représentés en vraie grandeur. Nous considérerons, de même, l'*élastique-espace* et l'*élastique-épure*.

(*b*) **Pentes de l'élastique sur les appuis.** — Le théorème fondamental (v. n° 178-*a*) des pentes sur les appuis nous dit que chacune de ces pentes est égale, avec le signe voulu, à la réaction sur l'appui correspondant de l'aire des moments *eïfiés*.

L'aire des moments vrais serait un triangle tel que aAB, ayant pour hauteur M_0 et pour base l; sa surface serait égale à $1/2\ M_0 l$, son centre de gravité G (fig. 148-I) serait situé sur la ligne KG qui partage, au tiers, la ligne AB et que, pour cette raison, nous nommerons la *trisectrice* de gauche.

La pente à l'origine α_0 sera égale à la réaction de cette aire triangulaire sur l'appui A et de même signe qu'elle. La pente α_1, à l'extrémité, sera égale à la réaction sur l'appui B, mais changée de signe. On aura donc en ayant soin d'*eïfier* le moment M_0.

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = -\dfrac{2M_0 l}{6EI} \\ \alpha_1 = +\dfrac{M_0 l}{6EI} \end{array} \right\} \text{Pentes sur les appuis.}$$

et l'on a, d'après cela :

$$\alpha_0 = -2\alpha_1.$$

(*c*) **Construction de l'élastique.** — Nous avons vu (voir n° 182) que, pour obtenir l'élastique, on décomposait la représentative des moments *eïfiés* en surfaces élémentaires, aux centres de gravité desquelles on appliquait des forces fictives, proportionnelles à leurs aires ; après quoi, un polygone funiculaire, construit sur ces forces, donnait, à une échelle déterminée, l'enveloppe, ou une partie de l'enveloppe, de l'élastique.

Cette décomposition peut se faire d'une infinité de manières.

Dans le cas actuel décomposons le triangle total AaB (fig. I) en trois triangles partiels, savoir : triangle n° 1, aAD; triangle n° 2, AOD, et triangle n° 3, DOB, dont les centres de gravité sont g_1, g_2 et g_3 situés : g_1 au sixième, g_2 au tiers et g_3 aux deux tiers de la portée.

Pour évaluer les forces fictives représentant leurs aires nous prenons, selon nos conventions, comme base commune de réduction la demi-portée $1/2\ l$.

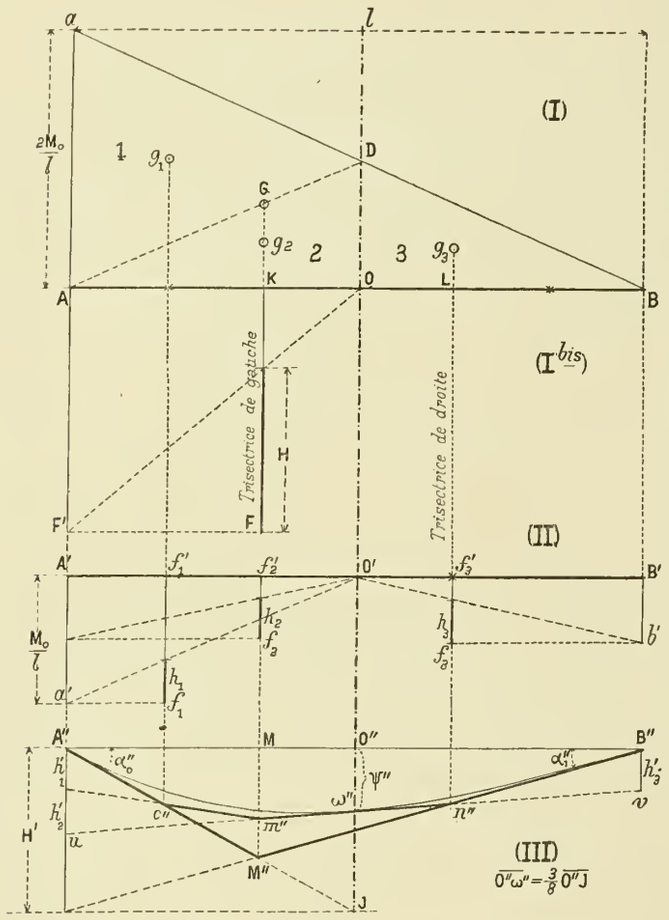
Le triangle n° 1 peut être considéré comme ayant pour base aA et pour hauteur AO, c'est-à-dire $1/2\ l$; sa force d'équivalence f_1 sera donc égale à la moitié de Aa ; nous la portons (fig. II) de f'_1 en f_1.

De même le triangle n° 2 aura pour forces d'équivalence, f_2, la moitié de OD, c'est-à-dire le quart de Aa. Il en sera de même du triangle n° 3 ; sa force d'équivalence f_3 sera égale au quart de Aa. Nous portons ces forces d'équivalence, sur la fig. II, en f_2 et en f_3.

Maintenant, nous construisons (fig. III) le funiculaire Collignon sur les trois forces f_1, f_2 et f_3 de la fig. II.

Rappelons la construction : On voit (fig. II), marqués en

trait fort, les segments h_1 h_2 et h_3 qui ont été ensuite reportés, comme d'habitude, savoir : h_1 et h_2 en h'_1 et h'_2 sur l'ordonnée d'origine et h_3 en h_3' sur celle d'extrémité. Le côté moyen du funiculaire est $m''n''$. Le funiculaire lui-



Pente initiale	Flèche	Pente finale
$\alpha_0 = -\frac{2M_0 l}{6EI}$	$\Psi = -\frac{M_0 l^2}{16EI}$	$\alpha_1 = +\frac{M^0 l}{6EI}$

Fig. 148

même est $A''c''m''n''B''$. L'élastique lui est tangente aux trois points A'' (origine), ω'' (milieu) et B'' (extrémité), mais elle n'est pas tangente au côté $c''m''$.

(*d*) **Point d'inflexion de l'élastique.** — On sait qu'une courbe présente un point d'inflexion lorsque, en ce point, elle passe d'un côté à l'autre de sa tangente. En un pareil point la courbure est nulle. Or si, en un point d'une poutre droite, le moment fléchissant est nul alors l'infléchissement, et par suite la courbure y sont nuls également, ce qui veut dire que l'élastique présentera une inflexion en ce point. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème des points d'inflexion. — « L'élastique d'une « poutre droite présente des inflexions aux points pour « lesquels le moment fléchissant est nul. »

Dans l'exemple actuel, on voit que, à son extrémité B'', l'élastique présentera une inflexion.

(*e*) **Flèche milieu.** — La fig. III nous donne, en $O''\omega''$, la *flèche-épure*. Et l'on a évidemment, en désignant par Ψ'', cette *flèche-épure*.

$$\Psi'' = \frac{h'_1 + h'_2 + h'_3}{2} = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2}.$$

Or la fig. II nous permet de voir que les trois quantités h_1, h_2 et h_3 sont égales entre elles et, chacune, au tiers de $\overline{A'a'}$, c'est à dire à $\frac{M_0}{3l}$.

On aura donc pour la flèche, qui est de signe contraire à M_0,

$$\Psi'' = -\frac{M_0}{2l};$$

c'est le quart de $\overline{Aa}$ (fig. I).

La *flèche-espace* s'obtiendra en multipliant la *flèche-épure* par le coefficient d'échelle définitif qui, dans le cas actuel, est $l^3 : 8EI$. Par conséquent, en désignant par Ψ la *flèche-espace*, on aura

$$(3) \qquad \Psi = -\frac{M_0 l^2}{16EI} \Big\} \text{ (Flèche).}$$

(*f*) **Vérifications graphiques.** — Ne décomposons pas le triangle des moments AaB mais considérons-le dans son entier (fig. I). En son centre de gravité, G, situé sur la trisectrice de gauche, appliquons une force F équivalente à son aire. En prenant toujours comme base de réduction $1/2\ l$, on voit que l'on devra avoir

$$F = \overline{Aa} = \frac{2M_0}{l}.$$

Construisons sur cette force unique un funiculaire-Collignon. On voit en II (trait fort — fig. I *bis*) le segment d'origine reporté en II' (fig. III) et le funiculaire est $A''M''B''$.

Comme vérification le côté $A''M''$ ainsi obtenu doit coïncider avec le côté $A''c''$, déjà trouvé, et $M''B''$ doit coïncider avec $n''B''$.

On voit, de suite, que la pente d'origine α''_0 est le double de la pente d'extrémité α''_1, puisque la hauteur MM'' est commune aux deux triangles $A''MM''$ et $B''MM''$ tandis que la base $A''M$ du premier est la moitié de la base MB'' du second.

Evaluons les pentes; on aura :

$$\alpha''_0 = \frac{\overline{MM''}}{\overline{A''M}} = \frac{2}{3}H' : \frac{1}{3}l = \frac{2H'}{l};$$

mais $\qquad H' = H = \frac{2}{3} \times \frac{2M_0}{l}; \qquad$ donc, en simplifiant,

$$\alpha''_0 = -\frac{8M_0}{3l^2}.$$

Telle est la *pente-épure*, à l'origine.

Pour avoir la pente-espace α_0 il faut multiplier par le coefficient d'échelle $l^3 : 8EI$, ce qui donne

$$\alpha_0 = -\frac{8M_0}{3l^2} \times \frac{l^3}{8EI} = -\frac{2M_0 l}{6EI}.$$

Résultat identique à celui trouvé plus haut en appliquant directement le théorème des pentes sur les appuis.

185. **Problème inverse.** — (*a*) **Énoncé.** — Connaissant la pente d'encastrement, α_0, au-dessus de l'appui A, calculer le moment d'encastrement M_0, construire l'élastique et calculer la flèche-milieu.

(*b*) **Solution.** — L'équation (2) nous donnera, en la résolvant par rapport à M_0,

$$(2^{bis}) \qquad M_0 = -\frac{3\alpha_0}{l}EI \quad \text{(moment d'encastrement)},$$

et en substituant dans (3)

$$(3^{bis}) \qquad \Psi = \frac{3}{16}\alpha_0 l \quad \text{(flèche-milieu)}.$$

Cette formule (3 *bis*) nous prouve que (fig. III) la flèche $O''\omega'$ est égale aux 3/8 de $O''J$; J étant le point où la tangente d'encastrement $A''M''$ rencontre la verticale milieu et l'on a $O''J = H'$; de plus, chacune des quantités h'_1, h'_2, h'_3 est égale au quart de H' (Tout cela est facile à démontrer) ; par conséquent le tracé de l'élastique de la fig. III est très facile à faire lorsque l'on connaît la pente initiale α_0, ou une amplification α''_0, à une échelle quelconque, de cette pente initiale. En voici le résumé :

1° On prolonge la tangente initiale jusqu'en J, sur la verticale milieu, et le point ω'' situé aux 3/8 de l'ordonnée $O''J$ ainsi déterminée donne le point milieu de l'élastique.

2° On prend en M'' le point d'intersection de la tangente initiale avec la trisectrice et, joignant au point d'extrémité B'' on a, en $B''M''$, la tangente finale.

3° On porte sur la verticale d'origine deux longueurs successives h'_1 et h'_2 égales chacune au quart de $O''J$, ce qui donne le point u. Sur la verticale d'extrémité on porte une seule fois la même longueur, en h'_3, ce qui donne le point v ; on joint u et v, ce qui donne la tangente au point milieu ω'' de l'élastique.

(*c*) **Réalisation matérielle de l'élastique.** — Nous engageons le lecteur, ne serait-ce que pour se convaincre de la justesse de la théorie précédente, à réaliser, comme suit, l'élastique que nous venons d'étudier :

1° Planter deux clous A et B sur une planche à dessin (fig. 149).

2° Appliquer sur ces clous une règle plate assez mince, mais d'épaisseur parfaitement uniforme, sinon l'expérience ne réussirait pas.

3° Serrer dans la main la partie extérieure AC et, avec cette main, développer un couple dans le sens des flèches. La règle prendra naturellement en $A'\omega'B'$ la forme de l'élastique précédente ; on la tracera avec un crayon et on

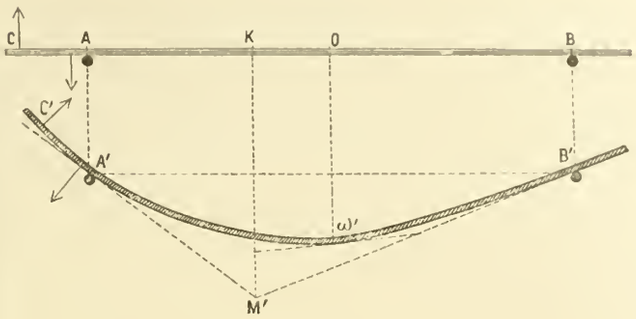


Fig. 149

vérifiera, après coup, si son tracé correspond à celui que nous venons d'indiquer.

186. **Poutre uniquement soumise à deux couples d'encastrement inégaux.** — (*a*) **Solution algébrique.** — Soit M_0 le couple d'origine, appliqué sur l'appui A et soit M_1 le couple d'extrémité appliqué en B. Chacun d'eux produira, pour son compte, les effets indiqués ci-dessus ; par conséquent, réunis, ils donneront les résultats suivants obtenus en additionnant les résultats partiels :

$$(1) \qquad T = \frac{M_0 - M_1}{l} \quad \text{(Effort tranchant.)}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = -\dfrac{(2M_0 + M_1)l}{6EI} \\ \alpha_1 = +\dfrac{(2M_1 + M_0)l}{6EI} \end{cases} \quad \text{Pentes sur les appuis.}$$

$$(3) \qquad \Psi = -\frac{(M_0 + M_1)l^2}{16EI} \quad \text{Flèche-milieu.}$$

On peut se poser le problème inverse consistant à se donner d'abord les pentes d'encastrement α_0 et α_1, et à en déduire les moments et la flèche.

En résolvant les équations (2) par rapport à M_0 et M_1 il vient :

$$(2^{bis}) \qquad \begin{cases} M_0 = -\dfrac{2EI}{l}(2\alpha_0 + \alpha_1). \\ M_1 = +\dfrac{2EI}{l}(2\alpha_1 + \alpha_0). \end{cases}$$

$$(3^{bis}) \qquad \Psi = \frac{1}{8}(\alpha_0 - \alpha_1)l.$$

(*b*) **Solution graphique.** — Il est souvent plus simple, au lieu de se servir des formules, de construire directement l'élastique. Nous allons rapidement expliquer cette construction sur la fig. 150, dans laquelle, à titre d'exercice et pour changer, nous avons supposé que les moments M_0 et M_1 étaient négatifs.

1° Sur la fig. I, on a pris :

$$\overline{Aa} = \frac{2M_0}{l} \quad \text{et} \quad \overline{Bb} = \frac{2M_1}{l},$$

De telle sorte que la distance polaire de la fig. I est 1/2 l. La représentative des moments fléchissants est la droite ab.

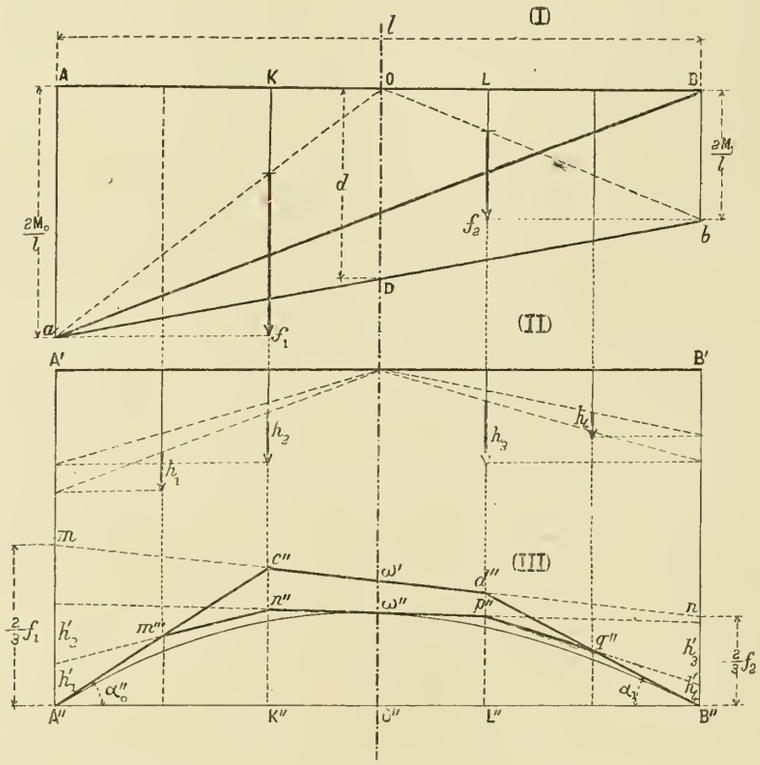
2° Pour obtenir les pentes sur les appuis α_0 et α_1 nous avons décomposé l'aire trapézoïdale $AabB$ en deux triangles par la diagonale aB. La force équivalente au premier triangle est $\overline{Kf_1}$, appliquée suivant la trisectrice de gauche et égale à $\overline{Aa}$, si l'on prend 1/2 l pour base de réduction.

De même $\overline{Lf_2} = \overline{Bb}$ est la force équivalente au second triangle.

Sur les deux forces f_1 et f_2 nous avons construit, comme à l'ordinaire, un funiculaire-Collignon. On le voit (fig. III) en $A''c''d''B''$ et les *pentes-épure* sur les appuis sont α''_0 et α''_1.

L'élastique n'est tangente à ce funiculaire qu'aux points d'appui A'' et B''.

3° Pour avoir le point milieu ω'' et sa tangente, nous avons décomposé le trapèze $AabB$ en quatre triangles au lieu de deux. On voit (fig. II) les forces équivalentes aux aires de ces triangles et les segments (trait fort) h_1 et h_2 pour l'origine, h_3 et h_4 pour l'extrémité, segments à l'aide desquels on a construit le funiculaire $A''m''n''p''q''B''$, tangent en ω'' à l'élastique.



Pente initiale	Flèche	Pente finale
$\alpha_0 = -\frac{(M_1+2M_0)l}{6EI}$	$\psi = -\frac{(M_0+M_1)l^2}{16EI}$	$\alpha_1 = +\frac{(M_0+2M_1)l}{6EI}$

Fig. 150

(*c*) **Epure inverse.** — Il est important, connaissant les *pentes-espace* d'encastrement α_0 et α_1, d'en déduire les moments M_0 et M_1. On procédera comme suit :

1° On multipliera α_0 et α_1 par l'*inverse* de l^3 : 8EI, c'est-à-dire par 8EI : l^3, ce qui donnera les *pentes-épure* α''_0 et α''_1 ; dès lors on pourra dessiner, en leur donnant ces pentes, les lignes $A''c''$ et $B''d''$ de la fig. III.

2° On prendra les points c'' et d'' où elles rencontrent les trisectrices ; on les joindra et cette ligne, prolongée, recoupera en m la verticale d'origine et en n la verticale d'extrémité.

3° On prendra les 3/2 des longueurs $A''m$ et $B''n$ et cela donnera les longueurs Aa et Bb représentatives des moments M_0 et M_1, au coefficient d'échelle 1/2 l ; par conséquent, en multipliant ces longueurs, mesurées à l'échelle des forces, par 1/2 l on aura les moments M_0 et M_1.

Nota. — Nous donnerons plus loin une solution générale, s'appliquant à une poutre à section variable, dont celle que nous venons d'indiquer n'est qu'un cas particulier.

187. Poutre uniquement soumise à deux couples d'encastrement égaux. — Soit M, chacun de ces moments

égaux (fig. 151) ; c'est un cas particulier du précédent dans lequel $M_0 = M_1 = M$.

Les formules deviennent :

(1) $T = 0$ effort tranchant.

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = -\dfrac{Ml}{2EI} \\ \alpha_1 = +\dfrac{Ml}{2EI} \end{array} \right\}$ Pentes sur les appuis.

(3) $\eta = -\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{Ml^2}{EI}$ Flèche-milieu.

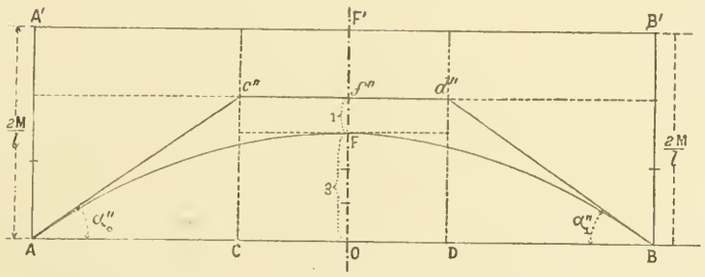
Le problème inverse, dans lequel les données seraient la pente initiale α_0 et son égale en valeur absolue, la pente finale α_1 conduirait aux formules suivantes en faisant :

$$\alpha_1 = -\alpha_0 = \alpha.$$

$$M_0 = M_1 = -\frac{2EI\alpha}{l},$$

$$\eta = \frac{\alpha l}{4}.$$

La figure 151 indique, sans qu'il soit besoin de l'expliquer, la solution graphique du problème et de son inverse.



Pente initiale | Flèche | Pente finale

$\alpha_0 = -\dfrac{Ml}{2EI}$ | $\eta = -\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{Ml^2}{EI}$ | $\alpha_1 = +\dfrac{Ml}{2EI}$

Fig. 151

§ 8. — Poutres, a section constante, encastrées et chargées

188. Position de la question. — Lorsqu'une poutre chargée d'une manière quelconque, comme était celle du n° 179, est libre sur ses deux appuis, son élastique prend, au-dessus de chacun d'eux, des pentes α_0 et α_1, que nous avons appris à construire et les moments fléchissants y sont nuls.

Si, par des encastrements, on force les pentes sur les appuis à être différentes des valeurs α_0 et α_1 ci-dessus, il en résulte une modification de l'élastique, en même temps qu'il se développe, comme conséquence, des moments d'encastrement M_0 et M_1. Ces moments donnent, pour leur compte, une représentative rectiligne de moments qui s'ajoute analytiquement à la représentative primitive et qui la modifie, en bien ou en mal. Il faut trouver ces moments. La question peut se poser de deux manières différentes.

1er Problème. — On impose des encastrements déterminés ; comment modifieront-ils l'élastique et les moments fléchissants ?

Désignons par γ_0 et γ_1 les pentes d'encastrement que la poutre sera forcée de subir ; si α_0 et α_1 sont les pentes d'appui que, libre, elle aurait prises, il est évident que si nous posons :

$$\delta_0 = \gamma_0 - \alpha_0 \qquad \text{et} \qquad \delta_1 = \gamma_1 - \alpha_1$$

les différences δ_0 et δ_1 seront ce que nous nommerons les *pentes de correction*, parce que ce sont elles qu'il faut faire subir à la poutre pour la faire entrer, à ses deux extrémités, dans les boîtes d'encastrement.

Or nous avons appris (v. n° 186-*c*) à déterminer les moments M_0 et M_1, susceptibles de déterminer de pareilles pentes sur les appuis, ainsi que l'élastique qui en serait la conséquence.

Le problème est donc résolu et l'élastique sera la somme analytique de l'élastique de la poutre quand elle était libre, et de l'élastique spéciale aux deux moments M_0 et M_1 et il en sera de même des représentatives des moments.

2e Problème. — On veut que les moments sur les appuis, qui tout d'abord étaient nuls, aient des valeurs données M_0 et M_1 ; quels devront être les angles d'encastrement γ_0 et γ_1 ?

Nous avons appris à déterminer (v. n° 186) les pentes que produiraient, sur les appuis, les moments M_0 et M_1. Soient δ_0 et δ_1 ces pentes.

Si α_0 et α_1 sont les pentes de la poutre libre, l'on aura pour les pentes d'encastrement γ_0 et γ_1

$$\gamma_0 = \delta_0 + \alpha_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \delta_1 + \alpha_1.$$

Pour fixer les idées, nous allons résoudre ces deux problèmes sur la poutre déjà étudiée au n° 179.

189. **1re Application. — Poutre du n° 179 assujettie à des pentes d'encastrement déterminées** (fig. 152). — (*a*) **Données.** — On suppose que les *pentes-espace* imposées à la poutre sur ses appuis devront être :

$$\gamma_0 = +0{,}00001 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = +0{,}00003.$$

Divisons ces pentes par le coefficient $l^3 : 8EI$ qui, pour la poutre considérée, est (v. n° 180-*b*).

$$\frac{l^3}{8EI} = \frac{91{,}125}{877500} = 0{,}0001038,$$

et nous aurons les *pentes-épure*

$$\gamma_0'' = \frac{0{,}00001}{0{,}0001038} = 0{,}090,$$

$$\gamma_1'' = \frac{0{,}00003}{0{,}0001038} = 0{,}288.$$

Dessinons à nouveau (fig. I) en AGIJPQRB l'élastique déjà trouvée (v. plus haut fig. 147 ou v. la figure suivante 153 qui en redonne la construction), et traçons, en AK et en BL, les lignes inclinées à ces pentes γ_0'' et γ_1''.

(*b*) **Moments d'encastrement.** — On voit que les moments d'encastrement M_0 et M_1 devront être tels qu'ils fassent remonter les tangentes à l'élastique, de A*g* en AK à l'origine et de B*r* en BL à l'extrémité. Nous connaissons donc les pentes de correction δ_0 et δ_1.

Dès lors appliquons la construction du n° 186-*c* ; portons en K'*g*' en L'*r*', sur les trisectrices, les longueurs *g*K et *r*L interceptées sur ces mêmes trisectrices par les côtés des angles KA*g* et LB*r* ; en joignant *g*'A et *r*'B nous obtiendrons sur l'épure la représentation des pentes d'origine et d'extrémité que devraient développer, dans la poutre, les moments d'encastrement cherchés M_0 et M_0 s'ils agissaient seuls. Enfin, en joignant *g*'*r*' et prolongeant cette droite jusqu'en *a*' sur la verticale d'origine, on obtiendra en A*a*' une longueur égale aux 2/3 de l'ordonnée représentative du moment d'encastrement M_0 ; ce moment lui-même est donc égal, à l'échelle de l'épure, aux 3/2 de A*a*'.

En raisonnant de même, on verrait que le côté *g*'*r*' prolongé jusqu'en *b*' sur la verticale d'extrémité donne en B*b*' les 2/3 de la représentative du moment d'encastrement d'extrémité M_1, d'où l'on conclut que ce moment est représenté par les 3/2 de B*b*'. Nous voyons d'ailleurs que le moment développé en A sera négatif puisqu'il a pour effet de tendre à ouvrir la pièce à la partie supérieure en tirant les fibres supérieures. Au contraire, le moment développé en B est positif, car B*b*' et A*a*' sont de signes contraires. Les moments fléchissants développés dans la poutre par les encastrements en A et en B seront donc représentés (fig. II) par la droite *a*''*b*'' dont l'ordonnée, *négative*, A'*a*'' est égale aux 3/2 de A*a*' et l'ordonnée *positive* B'*b*'' est égale aux 3/2 de B*b*'.

(*c*) **Polygone des moments fléchissants.** — En portant en ordonnées à partir de la droite *a*''*b*'', sur la verticale de chaque point de la poutre, des longueurs égales à celles du funiculaire des moments de charges que nous avons obtenu plus haut en II, fig. 144, nous obtiendrons le polygone des moments fléchissants définitifs qui résultent tant des charges que des encastrements.

Sur la fig. 152 ce polygone est A'*a*''CDEF*b*''B' et l'on ne doit y considérer que les ordonnées par rapport à la droite A'B' des portions couvertes de hachures. On remarquera que le moment maximum qui, dans la fig. 144, correspondait à un point de la poutre voisin du milieu, n'est plus à la même place ici. Le moment maximum a lieu précisément au-dessus de l'appui A et sa valeur est 2,900 K^m tandis que dans la fig. 144, la valeur du moment fléchissant maximum était 2,326 K^m.

Les encastrements que nous avons supposés ont donc eu pour effet d'augmenter l'effort maximum développé dans la poutre ; à ce point de vue leur effet est mauvais.

Nous verrons bientôt qu'il n'en est pas toujours ainsi et qu'on peut, dans une certaine mesure, réduire la valeur du moment fléchissant maximum en choisissant convenablement les angles d'encastrement.

(*d*) **Elastique définitive.** — Nous avons reproduit (fig. 152-I) d'après la fig. 144 ou la fig. 153, le polygone élastique AGIJPQRB et la courbe qui lui est tangente. Cette courbe représente, à des échelles que nous avons tracées, l'élastique primitive due aux charges seules.

Pour obtenir l'élastique définitive, en tenant compte des encastrements, nous procéderons de la manière suivante :

Traçons par la méthode que nous avons indiquée (voir n° 186) l'élastique qui résulterait des moments d'encastrement M_0 et M_1 agissant seuls : dans la fig. 152 cette courbe est AIIB. Si, maintenant, nous traçons une autre ligne dont les ordonnées soient égales à la somme algébrique de celles des deux élastiques AMB et AIIB, nous obtiendrons l'élastique définitive AH'B.

Sur la fig. 152 on voit que les encastrements ont diminué beaucoup les flèches prises par la poutre. La plus grande valeur de ces flèches est 0^m,007 tandis que dans la fig. 144 elle était de 0^m,023.

(*e*) **Point d'inflexion.** — Au point ω' (fig. II) le moment fléchissant est nul ; par conséquent, d'après le théorème du n° 184-*d*, au point correspondant ω (fig. I) l'élastique présente une inflexion.

190. **2e Application. — Poutre du n° 179 soumise à des moments d'encastrement donnés.** — (*a*) **Choix des moments.** — Nous venons de voir que, au point de vue de la résistance, les pentes d'encastrement que nous avions adoptées étaient mal choisies puisqu'elles avaient pour effet de rendre le moment dangereux plus grand que dans le cas des appuis libres. Nous allons nous proposer maintenant, étant donné la même poutre, de déterminer les encastre-

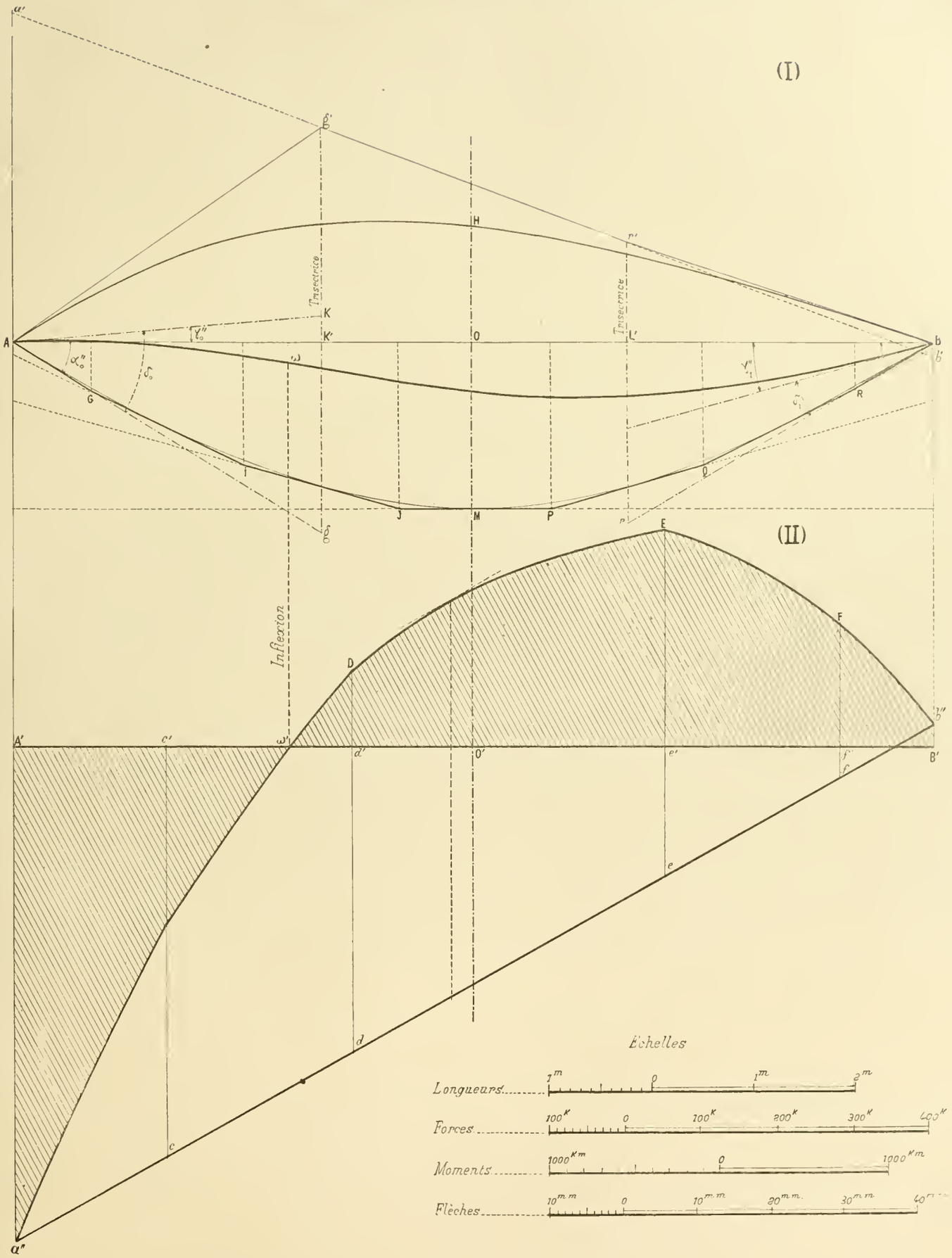


Fig. 152

STAB. 15

ments de telle sorte que le moment fléchissant maximum soit le plus petit possible; nous y arriverons en coupant, pour ainsi dire, en deux l'ancien moment maximum et en faisant en sorte que, au-dessus de chacun des appuis, il y ait un moment d'encastrement égal à la moitié de cet ancien maximum.

A cet effet, prenons comme représentative des moments M_0 et M_1 dus aux encastrements, la droite $A'_1B'_1$ (fig. 153-II) parallèle à la droite des appuis et distante de celle-ci de la longueur $A'A'_1$, égale à la moitié de l'ancienne ordonnée maximum du funiculaire des charges. Descendant alors ce funiculaire de manière que ses extrémités coïncident avec les points A'_1 et B'_1, nous obtenons en $A'_1C_1D_1E_1F_1B'_1$ la représentative des moments fléchissants défininitifs; ces moments sont mesurés, à l'échelle des moments, par les ordonnées du polygone $A'_1C_1...B'_1$ prises par rapport à la droite $A'B'$; de sorte que les moments maxima qui sont développés aux trois points A', M et B' ont pour valeur commune 1163 K^m, précisément la moitié de celle que nous avions trouvée sur l'ancienne fig. 144.

(*b*) **Elastique.** — Nous avons tracé en $A''GIJPQRB''$ le polygone élastique dû aux charges seules; nous l'avons obtenu par la méthode Collignon. La ligne courbe tangente à ce polygone représente la courbe élastique primitive; nous l'avons tracée en trait fin.

La courbe élastique due aux moments d'encastrement seuls, M_0 et M_1, est la parabole $A''S''B''$ puisque ces moments sont égaux (v. n° 187); son ordonnée milieu $O''S''$ est égale à la moitié de la représentative des moments d'encastrement $A'A'_1$.

A l'aide de ces deux courbes on déterminera facilement, point par point, l'élastique définitive $A''S''_1B''$, puisque l'ordonnée de chaque point est la somme algébrique des ordonnées correspondantes de l'élastique due aux charges et de celle due aux encastrements.

La courbe élastique nous fait connaître les flèches prises par la poutre; on voit en (III) que la flèche prise a sa plus grande valeur vers le milieu de la portée où elle atteint 9^{mm}. Dans la poutre libre la flèche avait atteint 23^{mm}.

Les points d'inflexion sont en ω et ω; ils répondent aux moments fléchissants nuls ω' et ω'.

(*c*) **Pentes d'encastrement.** — Les *pentes-épure* d'encastrement sont les pentes γ''_0 et γ''_1 des lignes $A''K''$ et $B''H''$ (c'est par coïncidence fortuite que les points K'' et H'' semblent être à la fois sur l'élastique et sur les trisectrices). Le point K'' est obtenu en ajoutant, *algébriquement*, l'ordonnée $\overline{tK'}$ de la tangente à l'élastique des charges, avec l'ordonnée $\overline{tK}$ de l'élastiqued'encastrement. *Arithmétiquement*, c'est-à-dire en valeur absolue, on a : $\overline{tK''} = \overline{tK'} - \overline{tK}$. Il en est de même pour la pente d'extrémité et l'on a, arithmétiquement : $\overline{t'H''} = \overline{t'H'} - \overline{t'H}$.

Pour évaluer numériquement les *pentes-espace* γ_0 et γ_1 la méthode la plus simple, pour ne pas se tromper dans les échelles, est, pour γ_0 par exemple, de prendre le rapport $\overline{tK''} : \overline{tA''}$, en ayant soin d'évaluer $\overline{tK''}$ à l'échelle des flèches et $\overline{tA''}$ à l'échelle des longueurs.

Dans ces conditions, on a, en mesurant sur l'épure :

$$\overline{tK''} = 0^m,0077, \quad \overline{t'H''} = 0^m,0075, \quad \overline{tA''} = t'B'' = 3^m,00 ;$$

d'où l'on conclut :

$$\gamma_0 = \frac{0,0077}{3,00} = 0,00256.$$

$$\gamma_1 = \frac{0,0075}{3,00} = 0,00250.$$

On constate que ce sont des pentes très faibles.

191. **Dangers des encastrements.** — On voit que des encastrements bien compris amélioreraient considérablement la poutre, tant au point de vue des flèches qu'à celui de la résistance. Mais, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait pouvoir réaliser et conserver, avec la plus grande précision, les pentes γ_0 et γ_1. Or, cela est presque impossible; quel que soit le soin avec lequel la boîte d'encastrement ait été faite, qu'elle soit en maçonnerie ou qu'elle soit en métal, elle ne conservera pas sa pente et la poutre tendra toujours à se remettre dans la position de repos sur appuis libres; dès lors, si elle a été calculée exactement pour l'encastrement, elle sera placée dans une situation très dangereuse. En pratique, on ne peut compter que sur un encastrement obtenu par continuité (v. n° 167), c'est-à-dire lorsque la poutre, posée sur ses deux appuis, présente en outre des encorbellements, convenablement chargés, en dehors de chacun de ces appuis.

§ 9. — POUTRES, A SECTION VARIABLE, ENCASTRÉES ET CHARGÉES

192. **Préliminaires.** — Dans les questions précédentes, la poutre étant homogène et à section constante, le facteur EI était le même pour toutes les sections. Dès lors on opérait directement sur la représentative des *moments naturels*, c'est-à-dire non eïfiés; on obtenait une élastique-épure et pour en déduire l'élastique-espace, avec ses pentes, ses ordonnées et sa flèche, on multipliait les résultats par le coefficient final d'échelle et, en outre, on eïfiait, *en bloc*, c'est-à-dire que l'on divisait par le facteur EI qui était constant.

Mais dans une poutre à section variable, le facteur EI sera différent pour chaque point. Dès lors il faudra eïfier séparément chaque moment et construire l'élastique-épure à l'aide

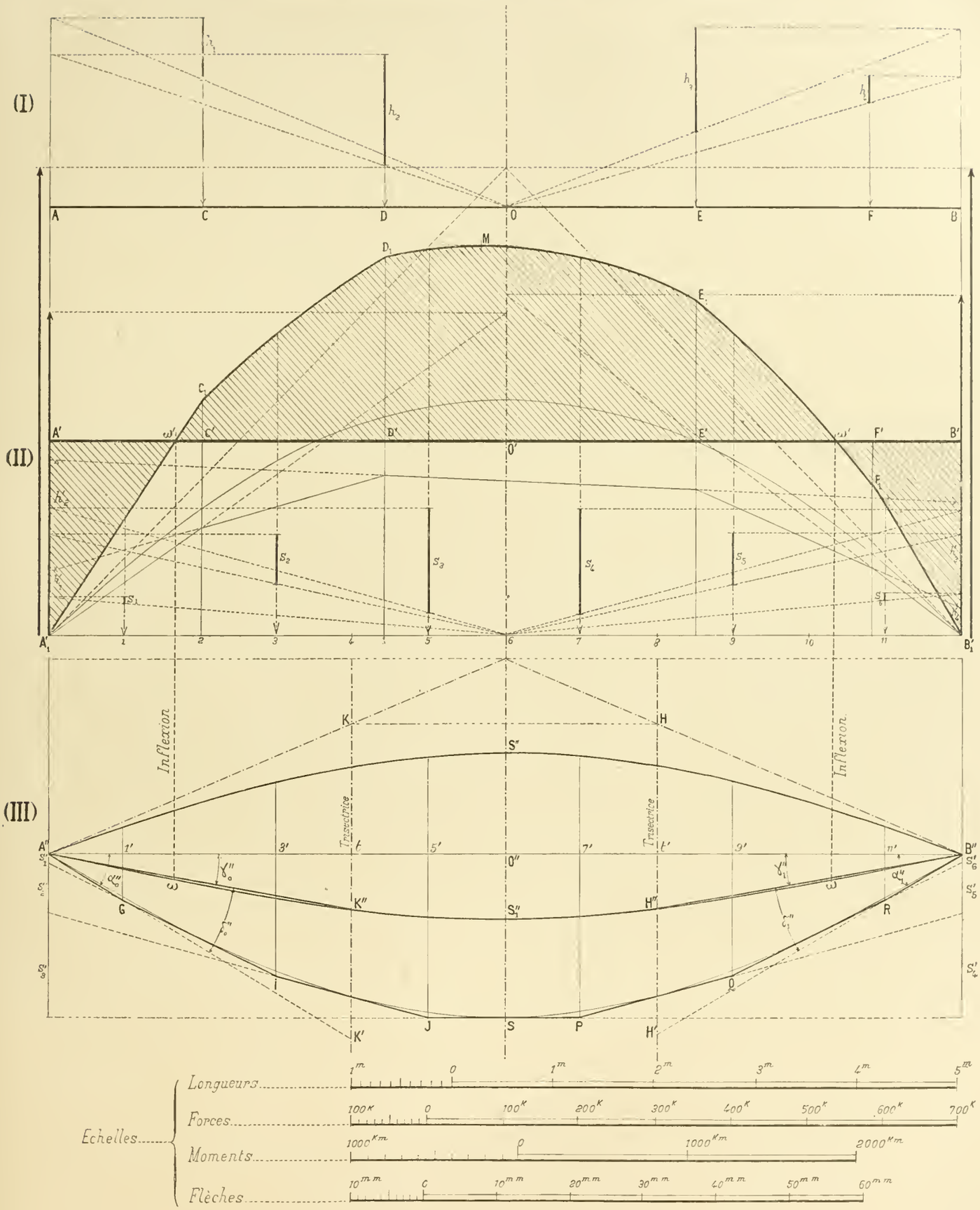

(I)
(II)
(III)
Inflexion
Inflexion
Trisectrice
Trisectrice
Echelles
Longueurs
Forces
Moments
Flèches

Fig. 153

de la représentative de ces moments eïfiés ; il ne restera plus, ensuite, qu'à multiplier les résultats obtenus (ordonnées, flèches, pentes) par le coefficient final d'échelle ; nous avons vu (v. n° 178-*c*) qu'il était le produit de trois facteurs qui sont : 1° la distance polaire du funiculaire des moments naturels ; 2° la base de réduction commune aux aires partielles suivant lesquelles ce premier funiculaire a été décomposé ; 3° la distance polaire du funiculaire construit sur les forces représentatives des ces aires partielles ; ce dernier funiculaire donne, précisément, l'élastique-épure.

La poutre sera presque toujours homogène, autrement dit, E sera constant et I sera seul variable. Nous pourrions donc ne diviser chaque moment naturel que par le moment d'inertie I de la section correspondante et réserver le diviseur E pour la fin et l'appliquer, lui aussi, en bloc.

Il y a, au point de vue graphique, un certain intérêt à ce que les représentatives eïfiées aient des dimensions comparables à celles des représentatives naturelles ; ce sera une question d'échelle.

Or, I rapporté au mètre carré est, en général, assez petit ; par contre, le module d'élasticité E, rapporté aussi au mètre carré, est très grand ; il est, pour le fer, de 20.000 *millions* de kilos ; et pour l'acier de 22.000 *millions* de kilos ; il en résultera que, en général, le produit EI sera un grand, et souvent un très grand nombre.

Ainsi pour deux fers en double T des forges de la Providence, l'un de $0^m.08$ et l'autre de $0^m,50$ de hauteur, on trouve en prenant $E = 20\,000\,000\,000$ (soit 20×10^9) :

Fer de 0.08	$I = 0,000\,000\,820$	$EI = 16\,400$
Fer de 0,50	$I = 0,001\,120\,505$	$EI = 22\,410\,100$

Pour les poutres-maîtresses des grands ponts EI aura une beaucoup plus grande valeur encore.

Or, comme le facteur EI entre en dénominateur des moments naturels, il en résultera que les moments eïfiés auront des valeurs numériques très faibles et que, si l'on veut les dessiner avec des dimensions comparables à celles des autres, il faudra adopter pour eux une grande échelle. Ainsi pour le fer ci-dessus de $0^m,08$, il faudrait représenter l'unité des moments eïfiés à une échelle qui serait, environ, 16.000 fois plus grande que celle adoptée pour les moments naturels ; pour le fer de $0^m,50$, elle devrait être, environ, 20 à 22 millions de fois plus grande. Remarquons d'ailleurs qu'un moment eïfié est une quantité *sui generis* ; algébriquement elle serait du degré -1, puisque en vertu de la formule d'infléchissement,

$$\theta = \frac{M}{EI}\,\Delta x$$

c'est une quantité qui multipliée par une longueur Δx, qui est du degré $+1$, doit donner un angle θ, qui est du degré zéro

193. Triangles et trapèzes eïfiés. — (*a*) Rectangle et triangle unitaires d'une travée. — Définitions. — Nous avons vu que lorsqu'une poutre est encastrée sur ses deux appuis, chacun de ces encastrements donnait lieu à un moment, M_0 et M_1, et qu'il en résultait une aire trapézoïdale de moments naturels qu'il faut apprendre à eïfier.

Or, un quelconque de ces trapèzes peut se décomposer en deux triangles ayant pour base commune la longueur l de la travée et pour hauteurs respectives les moments naturels sur les appuis M_0 ou M_1 ; il faut donc apprendre à eïfier un triangle.

Adoptons une unité de moments, μ (suivant les cas, on aura μ égal à 1, 10, 100, 1000,... kilogramomètres) et nommons *triangle unitaire* d'une travée celui qui aurait pour base la portée l et pour hauteur l'unité de moment μ comptée sur la verticale d'appui : chaque travée aura ainsi son *triangle unitaire de gauche* et son *triangle unitaire de droite* ; en les réunissant, ils constitueront le *rectangle unitaire* de la travée.

Eïfions chacun de ces triangles unitaires, et d'une façon générale (voir plus loin fig. 154), désignons par Ω *l'aire eïfiée du triangle unitaire de gauche* (appliquée en son centre de gravité G) et par Φ *l'aire eïfiée du triangle unitaire de droite* (appliquée en son centre de gravité L) (1) : Le langage se trouvera abrégé par ces conventions, et lorsque nous dirons l'aire Ω ou l'aire Φ de la travée, nous nous comprendrons.

La statique graphique nous fera connaître facilement non seulement les aires Ω et Φ de la travée, mais encore les verticales G et L de leurs centres de gravité et aussi leurs réactions sur chacune des piles : ce sont elles, surtout, qui nous intéressent.

Nous conviendrons de désigner ces réactions des aires Ω et Φ par les petites lettres ω et φ ; sur la pile de gauche de chaque travée, ω et φ n'auront pas d'accent, tandis que sur la pile de droite elles en auront un et s'écriront ω' et φ'.

Quant à la verticale de chacun de ces centres de gravité, nous avons vu que si le triangle n'était pas eïfié (fig. I) elle se confondrait avec la trisectrice, passant par g ; une fois le triangle eïfié, il n'en sera plus ainsi ; cependant, par analogie, nous nommerons la verticale du centre de gravité G (de la fig. II) une *trisectrice eïfiée*.

(*b*) **Triangles et trapèzes quelconques.** — Cela posé, considérons (fig. 154-I) un triangle unitaire (de gauche ou de droite, peu importe) d'une travée ; il répond à l'unité de moment μ ; traçons en dessous (fig. III) un triangle analogue, mais répondant à un moment quelconque M.

Les ordonnées des triangles M et μ, ainsi que leurs aires, sont entre elles dans le rapport constant $M : \mu$. Eïfions cha-

(1) La fig. 154 ne représente que le triangle unitaire de gauche. On imaginera une figure analogue pour le triangle unitaire de droite. Le point L n'existe donc pas sur la fig. 154.

cun de ces deux triangles; soit en II le triangle μ eïfié, et en IV le triangle M eïfié. Il est évident que, puisque en chaque point, les ordonnées de chacun des triangles I et III ont été

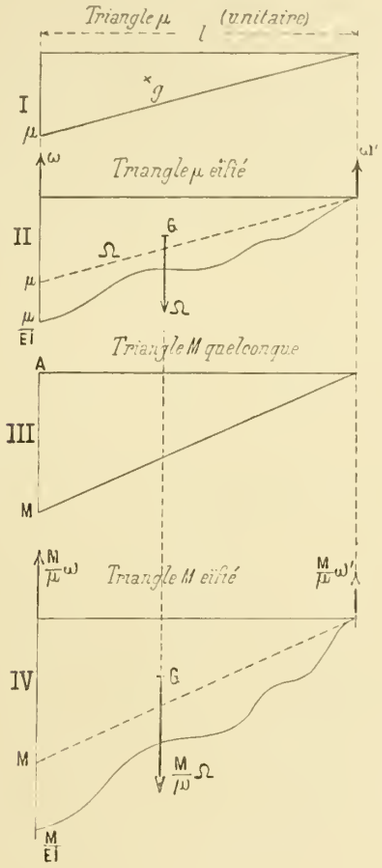


Fig. 154

divisées par le même facteur EI, le second triangle eïfié IV aura ses ordonnées, son aire et les réactions de cette aire proportionnelles aux ordonnées, à l'aire et aux réactions de l'aire du triangle unitaire eïfié μ; et que leurs centres de gravité G et G seront situés sur la même verticale, c'est-à-dire sur la *trisectrice eïfiée*; le coefficient de proportionnalité sera $M : \mu$. Nous pouvons donc dire que, si Ω, ω et ω' sont l'aire et les réactions d'aires du triangle unitaire eïfié μ, les quantités

$$\frac{\Omega}{\mu} M, \qquad \frac{\omega}{\mu} M \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega'}{\mu} M$$

seront les quantités analogues pour le triangle eïfié M. Par conséquent, pour ce qui provient des moments sur piles M_0 et M_1 on aura le tableau ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\Omega}{\mu} M_0 \\ \frac{\Phi}{\mu} M_1 \end{array}\right\} \text{Aires totales des triangles eïfiés} \left\{\begin{array}{l} M_0 \\ M_1. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\omega}{\mu} M_0 \\ \frac{\omega'}{\mu} M_0 \end{array}\right\} \text{Réaction} \left\{\begin{array}{l} \text{de gauche} \\ \text{de droite} \end{array}\right\} \text{du triangle } M_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\varphi}{\mu} M_1 \\ \frac{\varphi'}{\mu} M_1 \end{array}\right\} \text{Réaction} \left\{\begin{array}{l} \text{de gauche} \\ \text{de droite} \end{array}\right\} \text{du triangle } M_1.$$

N'oublions pas que ces réactions sont précisément, au signe voulu près, les pentes que posséderaient sur les appuis les élastiques que les moments M_0 et M_1, *agissant seuls*, imposeraient à la fibre neutre de la poutre (v. n° 178-*a*).

194. **Conditions ordinaires de l'eïfication d'une poutre.** — (*a*) **Poutre à variation continue de section.** — Dans la pratique les poutres peuvent se classer en deux catégories : 1° celles dont le moment d'inertie varie d'une manière continue (fig. 155), et 2° celles dont le moment d'inertie change brusquement de valeur en certains points, mais reste constant entre deux points consécutifs (fig. 156).

Comme premier cas imaginons (fig. 155) une poutre dont la fibre neutre *ab* serait droite, mais qui serait limitée, en dessus et en dessous, par des bandes courbes symétriques. Comme construction, cette poutre serait formée (v. la coupe fig. III) d'une *âme* pleine en tôle *f*, de quatre *cornières*, *c*, *c*,... et de *semelles* *s*, *s*, *s*, *s*; le tout serait assemblé par des boulons; les cornières, les semelles sont les mêmes partout; la hauteur seule de l'âme est variable. Nous apprendrons à calculer le moment d'inertie d'un pareil profil; il est évident que ce moment d'inertie varie d'une manière continue d'un point à l'autre de la poutre.

On dessinera la poutre (fig. I) puis, à des intervalles, autant que possible égaux entre eux, on fera des sections (fig. II) et on calculera leurs moments d'inertie I_0, I_1, I_2... Nous supposons, bien entendu, que E est constant. On adoptera une unité de moment μ et (fig. IV), supposant ce moment appliqué au-dessus de chaque appui, on en déduira en A*ab*B la représentative des moments fléchissants. On sait que c'est le rectangle que nous avons appelé le *rectangle unitaire naturel;* la diagonale A*b* le partagerait suivant les deux *triangles unitaires naturels*, c'est-à-dire non eïfiés. Cela fait, pour chacune des sections, on calculera l'expression $\mu : EI$. On obtiendra ainsi les valeurs $\mu : EI_0$, $\mu : EI_1$, etc...; on les portera en ordonnées au droit de chaque section, ce qui permettra de tracer (fig. IV) en *a'c'o'b'* le *rectangle unitaire eïfié*. Cette courbe s'éloigne d'autant plus de la poutre que le moment d'inertie I est plus petit; à tout prendre, elle est une représentative de l'*inverse* des moments d'inertie de la poutre; nous allons d'abord nous en servir pour construire les triangles uni-

taires eïfiés Ω et Φ. Il suffit de mener ce que nous nommerons la *diagonale curviligne* $Ac''d''b'$ du rectangle eïfié. Elle est définie par la condition qu'elle doit partager ses ordonnées comme la *diagonale rectiligne* Ab, du rectangle naturel, partage celles de ce dernier. Dans le cas actuel la

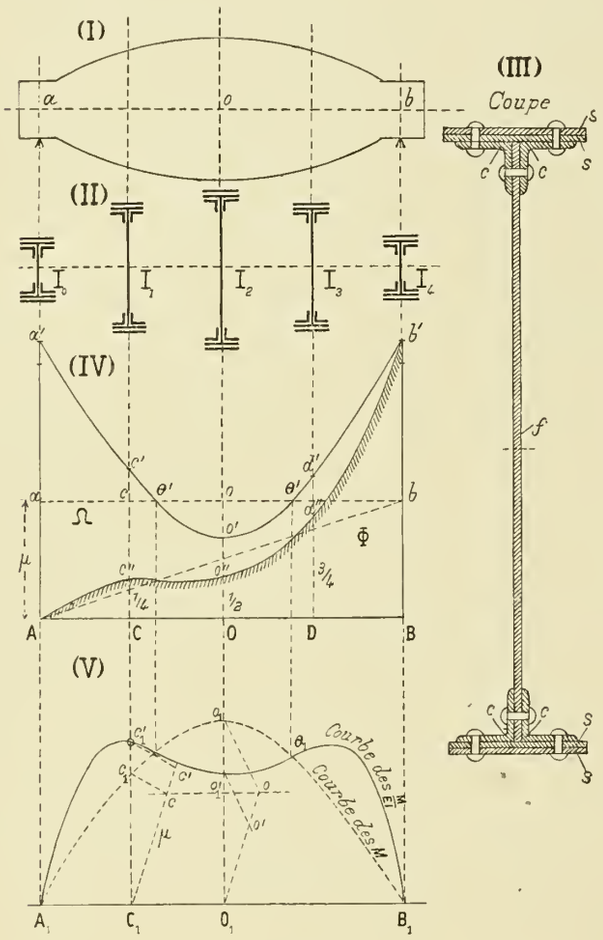


Fig. 155

poutre est divisée en quatre parties égales, par conséquent les points correspondants de la *diagonale curviligne* sont à 1/4, 2/4 et 3/4 des ordonnées du rectangle eïfié.

On obtient donc ainsi en Ω et Φ les triangles unitaires eïfiés ; nous verrons tout à l'heure quelles sont les lois qui les régissent et comment la statique graphique nous permettra de trouver les trisectrices eïfiées, c'est-à-dire les verticales de leurs centres de gravité, leurs aires Ω et Φ et, surtout, les réactions ω et ω', φ et φ' de ces aires sur les appuis.

Ce même rectangle nous permet d'eïfier, graphiquement, une représentative quelconque de moments naturels, par exemple, celle qui est dessinée en $A_1o_1B_1$ sur la fig. V.

L'opération revient à dilater (amplification ou réduction) les ordonnées de la courbe des moments naturels dans les mêmes rapports que sont dilatées celles du rectangle unitaire naturel. Le plus simple consiste à mener par le pied (tel que C_1) de chaque ordonnée une droite inclinée sur laquelle on reportera en C_1c et c' les longueurs mesurées sur les ordonnées du rectangle naturel et du rectangle eïfié de la fig. IV ; des parallèles donneront ensuite en c'_1, o'_1 les points cherchés.

On voit que cette eïfication modifie considérablement la forme de la courbe primitive des moments naturels.

(*b*) **Poutre à variation discontinue de section.** (Fig. 156.) — Très souvent la poutre est à hauteur constante et c'est par des additions de semelles que l'on modifie le moment d'inertie. La fig. 156-I fait connaître les zônes sur lesquelles existent :

1° Les cornières seulement (zône 2) ;

2° Les cornières et une semelle (zônes 1 et 3) ;

3° Les cornières et deux semelles (zônes 0 et 4).

L'autre moitié de la poutre est supposée symétrique de la première. Nous donnerons plus tard des exemples où cette symétrie n'existera pas.

Sur la fig. II on a représenté les sections faites sur les

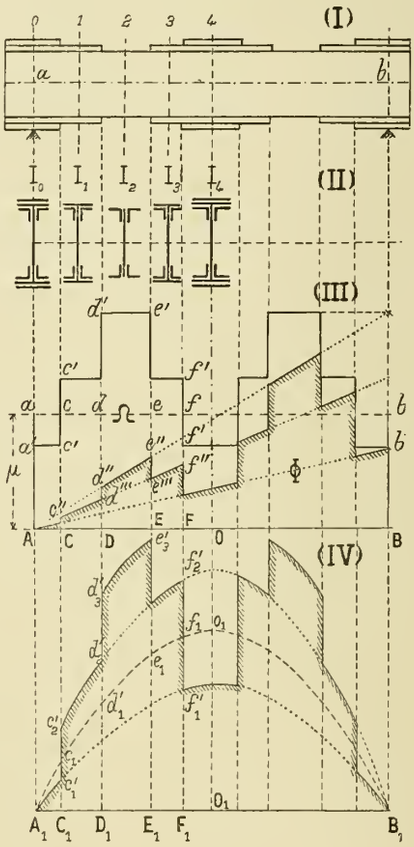


Fig. 156

différentes zônes, lesquelles auront permis de calculer les moments d'inertie I_0, I_1, I_2...

Sur la fig. III on voit en $AabB$ le rectangle unitaire naturel et en $a'c'd'f'...b'$ le rectangle naturel eïfié. Il procède par changements brusques de hauteur. Quant au triangle unitaire eïfié Φ on le voit en $Ac''d''e''...b'$. Les éléments inclinés, tels que e''' f'' seraient des portions de diagonales de véritables rectangles.

Sur la fig. IV, a été indiquée l'eïfication d'une courbe quelconque de moments naturels $A_1o_1B_1$. Cette représentative eïfiée, $A_1c'_1c'_2$... etc., se compose d'une série d'arcs de courbes qui sont, dans l'étendue de chaque zône à section constante, des amplifications faites avec un rapport constant (fourni par la fig. III), de la courbe naturelle.

195. **Lois de l'eïfication d'un rectangle et de ses deux triangles partiels.** — (*a*) **Préliminaires.** — Soit $AabB$ (fig. 157-I) un rectangle de moments naturels (unitaires ou autres); nous le décomposons par sa diagonale rectiligne, en deux triangles.

Soit $Aa'd'o'b'B$ le rectangle eïfié et soit $Af'o''b'$ sa diagonale curviligne obtenue comme il est dit ci-dessus. Soient Ω et Φ les aires des triangles eïfiés, supposées appliquées en leurs centres de gravité.

Considérons une ordonnée quelconque Cd et le point f situé sur la diagonale rectiligne; le point f' de la diagonale curviligne partage l'ordonnée eïfiée cd' dans le même rapport que le point f partage l'ordonnée naturelle cd et les rapports de ces ordonnées sera le même que celui des aires élémentaires, (hachurées) qui les entourent : or, on a l'égalité de rapports

$$\frac{\overline{Cf}}{fd} = \frac{\overline{Cf'}}{f'd'} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

ce qui prouve : 1° que l'aire partielle Cf' du triangle eïfié Φ, est la composante, sur l'appui B, de l'aire Cd' du rectangle eïfié, et 2° que l'aire $f'd'$ du triangle eïfié Ω est la composante, sur l'appui A, de la même aire Cd'. Or, comme cela se reproduira pour chaque aire élémentaire nous pouvons énoncer le principe suivant :

« Les aires Ω et Φ des triangles eïfiés de gauche et de « droite sont égales aux composantes, sur les appuis de « gauche et de droite, de l'aire totale du rectangle eïfié. »

Cet énoncé est équivalent au suivant qui est plus simple et qui nous sera plus utile par la suite.

(*b*) **Théorème du funiculaire $\widetilde{\Omega\Phi}$.** (Fig. II.) — « Tout « funiculaire (tel que $mnpv$) construit sur les aires (Ω et Φ) « des triangles unitaires eïfiés est un trapèze. »

Autrement dit la *corde*, mv, du funiculaire est parallèle à son *côté moyen*, np.

En effet, dire que Ω et Φ sont les composantes de l'aire du rectangle, c'est dire que l'on a :

$$\frac{mt}{tv} = \frac{\Phi}{\Omega};$$

mais d'autre part cette aire est aussi la résultante des aires Ω et Φ appliquées en n et en p, ce qui veut dire que

$$\frac{ns}{sp} = \frac{\Phi}{\Omega}, \qquad \text{et par suite} \qquad = \frac{mt}{tv};$$

ce qui entraîne que mv soit parallèle à np. C.Q.F.D.

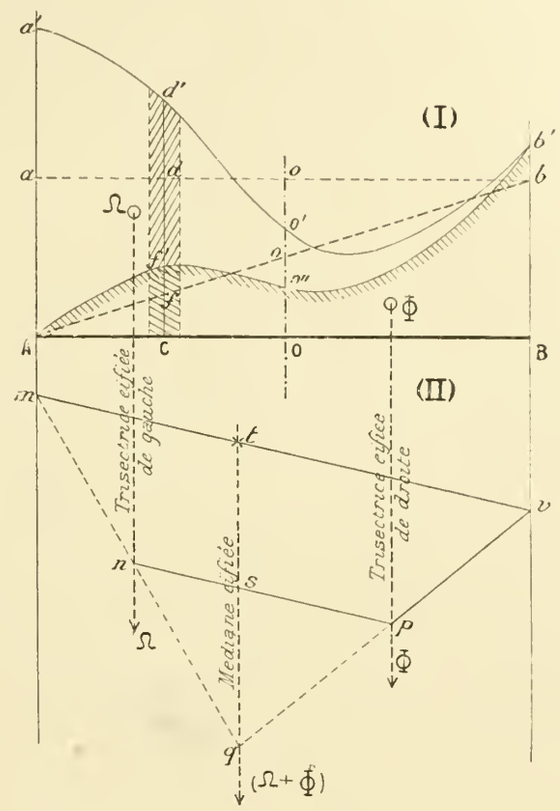


Fig. 157

(*c*) **Conséquences.** — L'aire Ω est évidemment égale à la somme de ses composantes. On a donc :

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

D'autre part, la composante de gauche du rectangle eïfié est égale à la somme des deux composantes de gauche des triangles, ce qui entraîne, d'après le théorème,

$$\Omega = \omega + \varphi.$$

En comparant ces équations, on en déduit

$$\omega + \omega' = \omega + \varphi, \qquad \text{d'où}$$

$$\omega' = \varphi.$$

Ce qui veut dire que, d'après le théorème des pentes sur les appuis (n° 178) :

(*d*) **Corollaire.** — « Si une poutre, à section variable, est « *successivement* soumise sur chacun de ses appuis à un « même couple d'encastrement, les élastiques qu'elle pren- « dra dans chaque cas seront généralement différentes, « mais leurs pentes sur l'appui resté libre seront toujours « égales entre elles. »

Nota. — Les deux aires Ω et Φ sont dirigées suivant les *trisectrices eïfiées.* L'aire $(\Omega+\Phi)$ du rectangle eïfié sera dirigée suivant la verticale tq que nous nommerons, par analogie, la *médiane eïfiée.*

196. **Tracé graphique de la médiane et des trisectrices eïfiées.** — (*a*) **Médiane.** — La méthode de M. Collignon se prête particulièrement bien à la construction des funiculaires qu'il faudrait établir sur le rectangle et sur les deux triangles unitaires eïfiés pour obtenir la médiane et les trisectrices eïfiées.

Reprenons (fig. 158-I) le rectangle eïfié $Aa'b'B$, et considérons une aire élémentaire répondant à l'ordonnée Cc'.

On a vu (n° 43) que le funiculaire Collignon n'exigeait pas forcément une distance polaire égale à $1/2\ l$; au lieu de prendre comme pôle le point milieu de la portée, on peut choisir tout autre point et, particulièrement, une des extrémités, B par exemple.

Dans ces conditions, soit F (fig. II) la force représentative de l'aire élémentaire Cc'. On projette F en f' sur la

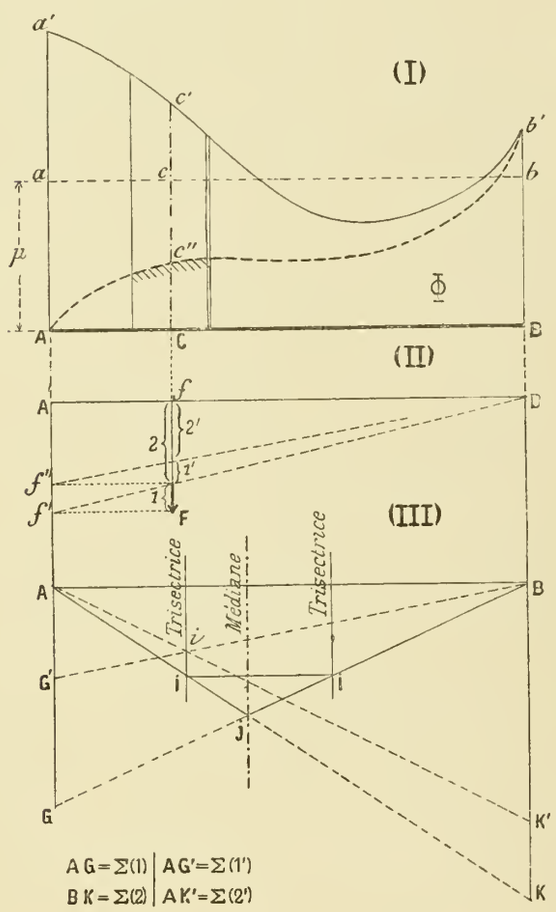


Fig. 158

verticale d'origine, on joint Bf' et le segment intercepté indiqué par le n° 1 (trait fort) donnera précisément le segment d'origine du funiculaire des forces telles que F. Seulement la distance polaire sera l au lieu d'être $1/2\ l$, et le funiculaire ainsi obtenu aura ses ordonnées moitié de celles de celui qui aurait le point milieu de la poutre pour pôle.

En portant (fig. III) tous les segments tels que 1 sur l'ordonnée d'origine, et en les totalisant, on obtiendra la longueur AG, et en joignant G à B, on aura en GB le côté final du funiculaire du rectangle eïfié.

De même, en portant en BK la somme des segments tels que 2 et joignant AK, on aura le côté initial. Par conséquent, la médiane eïfiée passera en J par le point de rencontre de AK et de BG.

(*b*) **Trisectrices.** — Passons aux triangles unitaires afin d'obtenir les trisectrices eïfiées. A cet effet, remarquons que le segment n° 2 est précisément la force représentative de l'aire partielle $c'c''$ du triangle Ω, tandis que le n° 1 est celle de l'aire partielle Cc'' du triangle Φ. Cela résulte de la proportion établie au n° 195. $\overline{Cc''} : \overline{c''c'} = \overline{fA} : \overline{fB}$.

Dès lors, on opérera sur 2 comme on a fait sur F. On projettera 2 en Af'', on joindra f'' avec B et on obtiendra en 1' le segment d'origine et en 2' celui d'extrémité.

Dès lors (fig. III), on portera en AG' la somme des segments tels que 1' et en BK' celle des segments tels que 2' ; on joindra AK' et BG' et la rencontre donnera en i un point de la trisectrice du triangle Ω, c'est-à-dire de la trisectrice eïfiée de gauche.

On la mènera jusqu'en I à la rencontre avec AK.

Pour avoir celle de droite, il suffira de mener l'horizontale II' et de prendre la rencontre I' avec le côté BG.

Cela résulte, d'après le théorème du n° 195-*b*, de ce que le funiculaire $\widetilde{\Omega\Phi}$ est toujours un trapèze.

(*c*) **Nota.** — 1° Si l'on voulait ramener l'épure à l'échelle ordinaire des funiculaires Collignon, c'est-à-dire faire en sorte que le coefficient d'échelle fût $1/2\ l$, il faudrait, soit doubler toutes les ordonnées de l'épure précédente, soit dans l'évaluation des aires partielles prendre comme base de réduction $1/4\ l$ au lieu de $1/2\ l$.

2° On voit que ces constructions dispensent de tracer la diagonale curviligne du rectangle eïfié.

Ces préliminaires posés, abordons le problème général de la poutre à section variable, chargée et encastrée sur ses appuis.

197. **Problème de la poutre encastrée, non chargée.** — (*a*) **Enoncé.** — Une poutre, non chargée, à section variable, est encastrée sur ses appuis sous des pentes δ_0 et δ_1 (fig. 159-I), qui la forcent à s'écarter de la ligne d'appui. Quels sont les moments M_0 et M_1 développés dans les boîtes d'encastrement ? Quelle est l'élastique prise ?

(*b*) **Définitions.** — Soient, représentés à une échelle déterminée, M_0 et M_1, les moments inconnus sur les appuis, et

soit, comme conséquence, M_0M_1 la représentative, trapézoïdale, des moments aux différents points de la poutre (fig. 159-II.)

Nous nommerons *moment trisecteur de gauche* et *moment trisecteur de droite*, ceux dont les ordonnées Ii et $I'i'$ se confondent avec les trisectrices eïfiées. Nous désignerons le premier par **M** et le second par **M'**. Cela posé, nous allons démontrer le théorème préliminaire ou *Lemme* suivant :

(*c*) **Lemme des moments trisecteurs.** — « Pour une « poutre donnée, à section variable, non chargée et encas- « trée sur ses appuis, chaque moment trisecteur ne dépend « que de la pente d'encastrement au-dessus de l'appui qui « lui correspond.

« Algébriquement, ce moment trisecteur est au moment « unitaire μ comme la pente d'encastrement (δ_0 ou δ_1) est « à l'aire eïfiée du triangle unitaire correspondant (Ω ou Φ). »

Appliquons le théorème des pentes sur les appuis (v. n° 178). A cet effet décomposons le trapèze $AM_0\,M_1B$ en ses deux triangles et écrivons ensuite que la pente à l'origine δ_0 est égale à la somme des réactions d'aires des moments eïfiés, réactions dont nous prenons les expressions au tableau du n° 193 ; nous aurons l'équation

$$M_0\frac{\omega}{\mu} + M_1\frac{\varphi}{\mu} = \delta_0,$$

qui s'écrit en chassant le dénominateur μ :

$$M_0\omega + M_1\varphi = \mu\delta_0. \tag{1}$$

D'autre part, menons par le point I une parallèle à AB ; écrivons que les deux triangles M_0m_0I et M_1m_1I, opposés

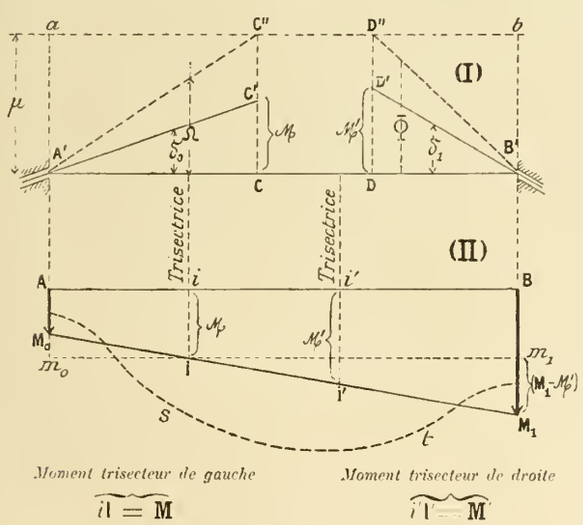


Fig. 159

par le sommet, sont semblables et remarquons que, Ii étant la trisectrice, on a l'égalité de rapports

$$\overline{Ai} : \overline{iB} = \omega' : \omega,$$

on obtient la relation

$$\frac{M - M_0}{M_1 - M} = \frac{\overline{Ai}}{\overline{iB}} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Mais nous savons (v. n° 195-*c*) que $\omega' = \varphi$; cette relation devient donc, en chassant les dénominateurs :

$$(M - M_0)\omega = (M_1 - M)\varphi ;$$

résolue par rapport à **M** elle donne

$$M = \frac{M_0\omega + M_1\varphi}{\omega + \varphi}.$$

En remplaçant le numérateur par sa valeur tirée de (1), il vient

$$M = \frac{\mu\delta_0}{\omega + \varphi},$$

qui peut s'écrire, en se rappelant en outre que $\omega + \varphi = \Omega$,

$$\frac{M}{\mu} = \frac{\delta_0}{\omega + \varphi} = \frac{\delta_0}{\Omega}, \tag{2}$$

ce qui démontre le lemme.

Pour le moment trisecteur de gauche **M'** on aura

$$\frac{M'}{\mu} = \frac{\delta_1}{\omega' + \varphi'} = \frac{\delta_1}{\Phi}. \tag{3}$$

(*d*) **Construction des moments trisecteurs.** — La construction des moments trisecteurs se fera comme suit :

Traçons en A'C' et en B'D' (fig. 159-I) les pentes imposées d'encastrement δ_0 et δ_1. D'autre part, nous savons construire (v. n° précédent, fig. 158) les trisectrices I et I' et les pentes $\Omega = \omega + \varphi$ et $\Phi = \omega' + \varphi'$, répondant à un moment unitaire μ.

Dès lors, traçons en A'C'' et en B'D'' les pentes Ω et Φ. Coupons le tout par une horizontale située à la hauteur μ ; nous obtenons en CC' et en DD' les hauteurs **M** et **M'** ; nous les reportons en I et I' (fig. II) sur les trisectrices eïfiées ; nous menons la droite II' ; nous la prolongeons jusqu'aux verticales d'appui, ce qui nous donne en M_0 et en M_1 les moments inconnus sur les appuis.

(*e*) **Problème inverse.** — On se donne les moments d'encastrement M_0 et M_1. Trouver les pentes δ_0 et δ_1.

On joint M_0 et M_1 (fig. II) ; on prend en I et I' les recoupements avec les trisectrices eïfiées ; on reporte les longueurs Ii et $I'i'$ en CC' et DD' (fig. I) ; on joint C'A', D'B', ce qui donne, à l'échelle de l'épure, les pentes d'encastrement cherchées.

(*f*) **Elastique des moments M_0 et M_1.** — Ayant la représentative M_0M_1 des moments naturels, on l'eïfiera, ce qui donnera, par exemple, la représentative eïfiée *st* ; en construisant le funiculaire de ses aires on aura l'élastique cherchée.

Nota. — La recherche des trisectrices eïfiées se fait, en somme (v. n° 196), en construisant l'élastique des triangles unitaires Ω et Φ ; l'élastique des moments M_0M_1 s'obtiendra en ajoutant analytiquement les deux élastiques Ω et Φ, mais après avoir amplifié la première dans le rapport $M_0 : \mu$ et la seconde dans le rapport $M_1 : \mu$.

198. **Problème général de la poutre encastrée et chargée.** — (*a*) *Enoncé.* — On se donne : 1° les charges appliquées sur la poutre ; 2° les pentes d'encastrement γ_0 et γ_1, c'est-à-dire les directions que les boîtes d'encastrement imposeront à la fibre neutre au-dessus de ses appuis.

On demande : 1° de calculer les moments d'encastrement M_0 et M_1 ; 2° de tracer l'élastique définitive.

(*b*) **Solution.** — Soit (fig. 160-I) en AFB la courbe des moments naturels de charge et en AF'B celle de ces mêmes moments eïfiés. Cette figure est toute théorique ; nous donnerons plus tard, à l'occasion des poutres en tôle, une application numérique de cette question. Nous en déduisons en A'T'B' (fig. II) l'élastique des moments de charge et, en particulier, les pentes α_0 et α_1 (négatives ici) de cette élastique au-dessus des appuis, supposés libres.

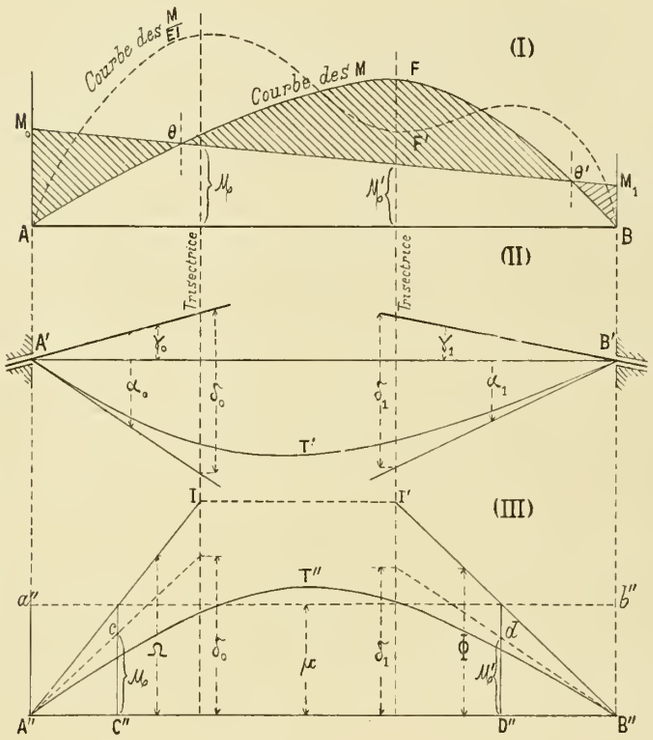


Fig. 160

D'un autre côté, on se donne (fig. II) en γ_0 et γ_1 (positives ici) les pentes imposées pour les encastrements ; par conséquent, les pentes

$$\delta_0 = \alpha_0 - \gamma_0 \qquad \text{et} \qquad \delta_1 = \alpha_1 - \gamma_1$$

sont ce que nous avons déjà appelé les *pentes de correction* ; et les moments inconnus d'encastrement M_0 et M_1 ont précisément pour objet de produire ces pentes de correction. Nous sommes donc ramenés au problème précédent.

Alors (fig. III) : 1° nous dessinons les pentes de correction δ_0 et δ_1, et aussi les pentes Ω et Φ ; 2° nous coupons par une horizontale $a''b''$ menée à la hauteur μ et nous obtenons en $C''c$ et $D''d$ les moments trisecteurs ; 3° nous reportons (fig. I) ces moments trisecteurs **M** et **M'** sur les trisectrices ; nous en déduisons la représentative M_0M_1 et par suite les moments M_0 et M_1.

(*c*) **Moments définitifs.** — Les surfaces couvertes de hachures indiquent (fig. I) les moments définitifs modifiés par les encastrements ; on les prendra positifs au-dessus de la ligne M_0M_1 et négatifs au-dessous. Aux points θ et θ' ils sont nuls et l'élastique définitive présentera une inflexion.

(*d*) **Elastique définitive.** — L'élastique définitive s'obtiendrait en ajoutant analytiquement l'élastique de charge A'T'B' (fig. II) à l'élastique A''T''B'' des moments M_0M_1 (fig. III), construite comme il a été dit ci-dessus.

On voit que toutes ces constructions sont très simples ; nous terminerons cette étude en énonçant le théorème suivant qui est une conséquence évidente de tout ce que nous venons de dire.

199. **Théorème des moments trisecteurs.** — (*a*) **Préliminaires.** — Etant donné une poutre à section variable, chargée d'une manière constante et encastrée sous des pentes quelconques au-dessus de ses appuis, si l'on nomme *pentes de correction* les pentes d'appui qu'il faudrait imposer à l'élastique de charge pour la faire entrer dans les boîtes d'encastrement, nous aurons le théorème suivant :

(*b*) **Théorème.** — « Chacun des moments trisecteurs est « au moment unitaire comme la pente de correction de l'ap- « pui correspondant est à l'aire eïfiée du triangle unitaire « répondant à ce même appui. »

$$\frac{\mathbf{M}}{\mu} = \frac{\delta_0}{\Omega} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathbf{M}'}{\mu} = \frac{\delta_1}{\Phi}.$$

(*c*) **Remarques.** — 1° Cette sorte d'indépendance de chacun des moments trisecteurs est très remarquable ; en voici une conséquence intéressante.

Lorsque nous étudierons les poutres continues, c'est-à-dire reposant sur plusieurs appuis A, B, C, D, E (fig. 161), si sur la *culée*, (ou premier appui A), la poutre est encastrée, le moment trisecteur de gauche de la première travée ne dépendra absolument que des charges de cette travée et de la pente initiale d'encastrement δ_0 ; on pourra surcharger à volonté les autres travées, modifier les hauteurs des appuis, autres que le premier A et le second B, ce moment trisecteur de gauche restera invariable et calculable *a priori*

2° Tout ce qui vient d'être dit s'applique aux poutres à section constante du § 7, avec des simplifications. En appliquant ces dernières constructions aux problèmes déjà traités dans ce paragraphe 7, on obtiendrait des tracés plus simples. Nous engageons le lecteur à en faire l'essai.

Fig 161

§ 10. — Corbeaux ou poutres en encorbellement

200. **Représentative des moments fléchissants.** — (*a*) **Définition.** — On nomme *corbeau* une poutre encastrée d'un côté et libre de l'autre.

(*b*) **Moments dus à une charge unique.** — Nous pourrons encore, dans l'étude des corbeaux, appliquer la méthode de M. Collignon au tracé des polygones funiculaires de moments fléchissants. En effet, considérons d'abord un corbeau AB (fig. 162) encastré en A, et proposons-nous de représenter les moments fléchissants qui seront développés dans la poutre sous l'action d'un poids unique P agissant en C à à une distance x_1 de l'origine.

Soit d la distance polaire que nous avons adoptée ; le corbeau sera souvent le prolongement d'une poutre posée sur deux appuis et alors d aura, en général, pour valeur la demi-distance de ces appuis. Portons d de A en D, projetons P en P′ sur la verticale d'origine, puis joignons P′D ; cette dernière droite rencontre la force P en un point p et nous allons prouver : 1° que $\overline{p}$P est le segment d'origine de la representative des moments fléchissants dus à la charge P, et 2° que, si l'on prend, à l'origine, $AP_1 = p$P. cette représentative est la droite P_1C.

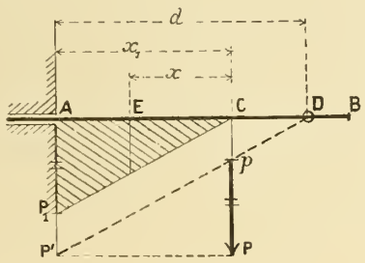


Fig. 162

Considérons les deux triangles rectangles ADP′ et pPP′ ; ces figures sont semblables comme ayant les 3 angles égaux ; on en tire

$$\frac{AD}{AP'} = \frac{PP'}{Pp},$$

d'où $$\overline{Pp} \times \overline{AD} = \overline{AP'} \times \overline{PP'};$$

ou bien, en remplaçant AD par d, $\overline{AP'}$ par P et $\overline{PP'}$ par x_1,

$$\overline{Pp} \times d = P \times x_1.$$

Or, $P \times x_1$ c'est le moment du couple qui résulterait du transport en A de la force P, la seule qui soit située à droite de la section A ; c'est donc le moment fléchissant développé en A ; donc $\overline{Pp}$ est bien la représentative de ce moment ; le couple d'encastrement qui lui fait équilibre est égal et de signe contraire.

Le moment fléchissant en un autre point du corbeau, tel que E, s'obtiendrait en y transportant la force P et en considérant le couple dû à ce transport ; on trouverait ainsi pour valeur du moment fléchissant M_e

$$M_e = P \times x,$$

x désignant la distance du point considéré à la force P.

Or $P \times x$, lorsqu'on fait varier la position du point E, a toujours la même valeur que l'ordonnée correspondante de la droite CP_1 d'où l'on conclut que CP_1 est précisément la représentative des moments dus à la charge P.

(*b*) **Moments dus à plusieurs charges.** — Si au lieu d'une charge P nous en avons plusieurs, nous raisonnerons de la même manière en considérant chacune d'elles isolément et les moments fléchissants définitifs s'obtiendront en additionnant les moments obtenus séparément.

Soit, par exemple, un corbeau AB (fig. 163) supportant quatre forces P_1, P_2, P_3, P_4 appliquées aux points C, D, E, F.

Soit $AG = d$ la distance polaire.

D'après ce que nous avons vu plus haut les moments dus à la force P_4, agissant seule, sont représentés par les ordonnées du triangle $A'F'h'_4$. Les moments dus à la force P_3 seraient représentés par les ordonnées d'un triangle rectangle qui aurait A′E′ pour base et h_3 pour hauteur ; mais les ordonnées de ce triangle seraient égales à celles du triangle $e'h'_4h'_3$ dont le côté $h'_3h'_4$ est égal au segment h_3 et dont l'autre dimension, perpendiculaire à ce côté, a même valeur que A′E′.

Les moments fléchissants dus aux deux forces P_3 et P_4 sont donc représentés par le contour $h'_3e'F'A'$.

En continuant le même raisonnement on reconnaîtra que les moments fléchissants définitifs ont pour représentative les ordonnées du contour polygonal $h'_1c'd'e'F'A'$.

Nous pourrons donc énoncer la règle suivante :

Pour obtenir la représentative des moments fléchissants dans le cas de poutres en corbeau chargées des points isolés, il faut procéder comme il suit :

1° Projeter sur la verticale d'origine les forces appliquées au corbeau.

2° Joindre les extrémités de ces projections au point de la poutre situé à une distance de l'origine égale à la distance polaire d adoptée, puis déterminer les segments compris

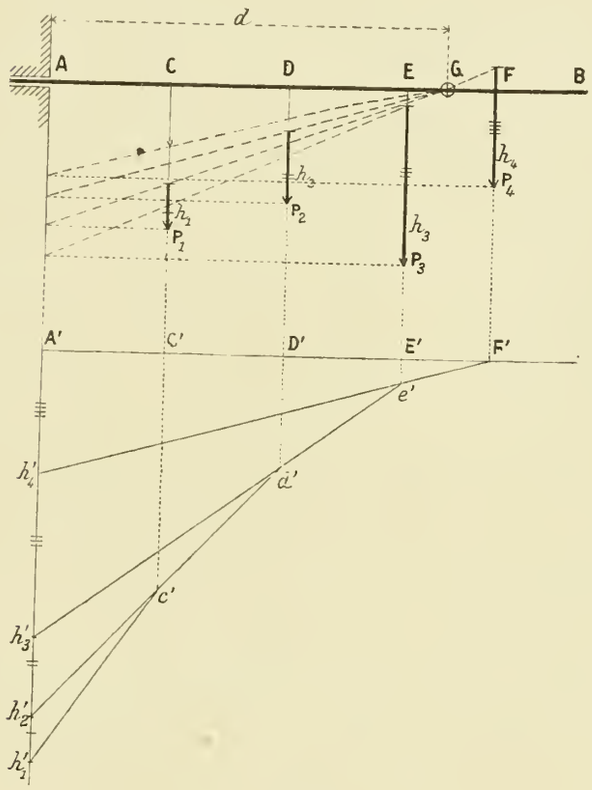


Fig. 163

entre les droites ainsi menées et les extrémités des forces opposées à la poutre. (Les marquer d'un trait gras.)

3° Porter bout à bout, sur la verticale d'origine, les segments obtenus ci-dessus *en commençant toujours par celui qui se rapporte à la force la plus éloignée de l'origine ;* c'est en cela que le tracé diffère des tracés donnés pour les poutres posées sur deux appuis.

4° Joindre l'extrémité du premier segment au point d'application de la dernière force sur le corbeau, puis l'extrémité du deuxième segment au point d'intersection du côté précédent avec la ligne d'action de l'avant-dernière force, et ainsi de suite.

Dans le cas où les forces isolées sont très rapprochées, les angles du polygone des moments sont très peu accusés et à la limite, lorsque la charge du corbeau est répartie sur toute sa longueur, le polygone des moments est remplacé par une courbe.

On pourrait obtenir ces représentatives de moments par tout autre tracé de funiculaire, mais cette interprétation de la méthode de M. Collignon présente comme principal avantage de donner immédiatement au funiculaire une ligne de base horizontale.

(*d*) **Moments dus à une charge uniformément répartie.** — La représentative sera une parabole tangente à la poutre à son extrémité et recoupant la verticale d'origine à une distance égale à $\frac{Pl}{2d}$; P étant la charge totale, l la portée du corbeau, d la distance polaire. Nous l'étudierons plus en détail au chapitre suivant.

200bis. **Elastique d'un corbeau.** — Nous avons dit (v. n° 178) qu'en considérant le funiculaire des moments évidés comme une surface de charge, c'est-à-dire en assimilant chaque élément de cette surface à une force proportionnelle à son aire, l'ordonnée de l'élastique en un point était égale à la somme des moments par rapport à la verticale de ce point de tous les éléments du funiculaire situés d'un même côté de ce point, ce moment étant augmenté du produit de la pente initiale par la distance du point à l'origine ; on avait la formule

$$y = \alpha_0 x + V_0^c(x - \gamma).$$

Ce principe s'applique aussi aux poutres en corbeau avec cette

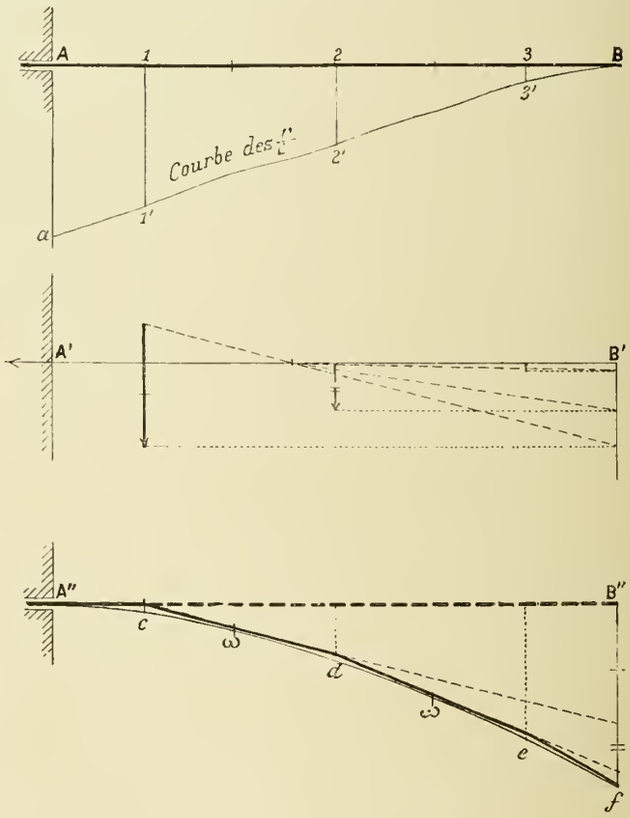


Fig. 164

simplification qu'il n'y a pas lieu de s'inquiéter ici de la déviation initiale α_0, qui est nulle, puisque la poutre est en-

castrée à l'origine suivant la direction même de la poutre avant sa flexion, c'est-à-dire de l'axe des x.

Nous pourrons donc appliquer au tracé de la courbe élastique la construction que nous avons faite au numéro précédent ; seulement on remarquera que, tandis que tout à l'heure on cherchait les moments des charges réelles comprises *entre la section et l'extrémité*, maintenant on prendra les moments des forces fictives comprises *entre la section et l'origine* ; par conséquent les segments que nous portions sur la verticale d'extrémité nous devrons les porter maintenant sur la verticale d'origine. On opérera comme suit :

Soit, en a, 1′, 2′, B (fig. 164), le funiculaire eïfié d'un corbeau dont nous voulons trouver la courbe élastique, nous obtiendrons celle-ci de la manière suivante.

Nous diviserons la longueur AB en un nombre pair de parties égales et nous mènerons les verticales correspondant aux divisions impaires ; soient 11′, 22′, 33′ ces verticales. Les aires élémentaires que nous avons déterminées ainsi dans le funiculaire eïfié ont pour mesure le produit de chacune des verticales tracées par la distance de deux verticales voisines.

Nous remplacerons alors chacun de ces éléments par une force fictive égale à la hauteur du rectangle équivalent qui aurait pour base de réduction la distance polaire adoptée d ; et enfin nous construirons sur ces dernières forces un funiculaire, par la méthode indiquée au numéro précédent, *mais en prenant pour verticale d'origine celle qui passe par l'extrémité libre de la poutre.*

La fig. 164 montre d'ailleurs le détail des constructions à l'aide desquelles on obtient le polygone élastique ; la courbe élastique serait tangente aux côtés de ce polygone. Quant aux valeurs des flèches prises par la poutre dans l'espace, elles sont données en faisant le produit des flèches de l'épure par le cube d^3 de la distance polaire.

Telle est la méthode générale pour les corbeaux à section variable, chargés d'une manière quelconque. Dans le chapitre suivant nous étudierons les cas usuels des poutres en corbeau.

CHAPITRE II

CAS USUELS DES POUTRES A UNE TRAVÉE ET A SECTION CONSTANTE

§ 1. — Poutres chargées d'un poids unique en leur milieu

201. **Poutre posée sur deux appuis simples.** — (*a*) **Moments fléchissants.** — D'une manière générale nous appliquerons la méthode de M. Collignon pour le tracé des funiculaires.

Soit PC (fig. 165-I) le poids unique appliqué au milieu. Dans le cas actuel, P étant au milieu, on peut être embarrassé pour savoir comment appliquer la construction. Nous conseillons, soit de considérer P comme appartenant à la demi-travée de gauche, soit de prendre 1/2P pour la gauche et 1/2 P pour la droite. Ici nous adoptons la première hypothèse. On voit que nous sommes alors conduits à prendre pour segment d'origine A*f* une longueur égale à P et pour segment d'extrémité une longueur nulle ; en joignant, suivant B*f*, les extrémités de ces segments nous rencontrons la force P au milieu de la représentative, en *c*, de sorte que les moments fléchissants sont, dans ce cas, représentés par le triangle A*c*B dont le sommet *c* est à une hauteur 1/2 P au-dessus de la droite des appuis.

Le moment maximum, que nous représenterons par le signe M_{max}, est égal à cette hauteur 1/2P multipliée par la distance polaire 1/2*l*, c'est-à-dire

$$M_{max} = \frac{P}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}.$$

(*b*) **Réaction des appuis.** — Les réactions des appuis, que nous représenterons toujours par X_0 et par X_1, sont obtenues en prenant en C*c* la hauteur, au-dessus de AB, de l'intersection du côté initial et du côté final avec la verticale milieu ; dans le cas actuel elles sont égales entre elles et ont pour valeur 1/2P (fig. I).

$$X_0 = \frac{P}{2}, \qquad X_1 = \frac{P}{2}.$$

(*c*) **Efforts tranchants.** — L'effort tranchant qui est représenté par la pente des côtés du funiculaire est, ici, proportionnel à la pente des côtés A*c* et *c*B du triangle des moments. L'effort tranchant est donc constant : 1° entre A et C, 2° entre C et B. De plus, comme les côtés A*c* et *c*B sont également inclinés sur la droite AB, l'effort tranchant dans la seconde moitié CB a même valeur absolue que dans la

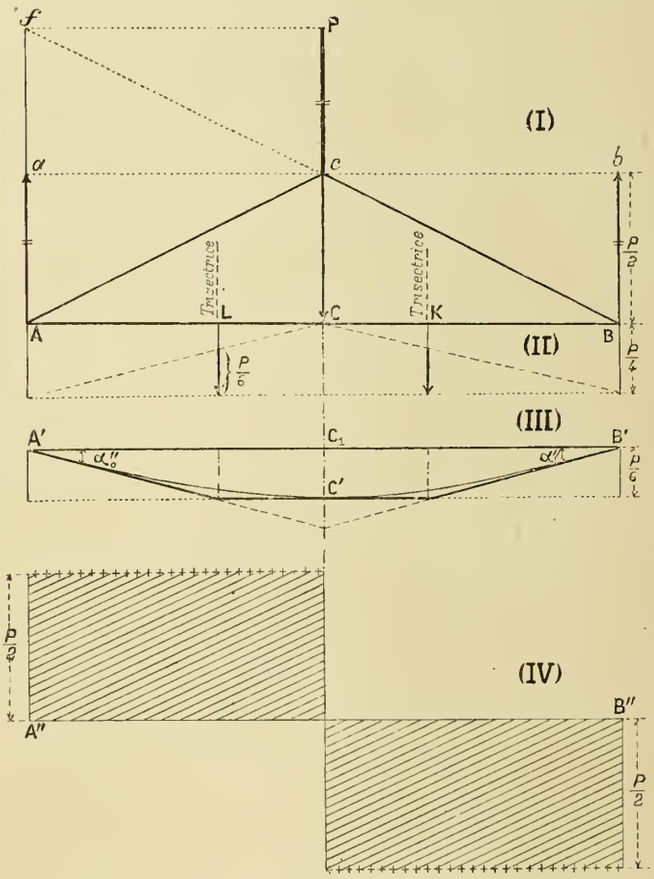


Fig. 165

première moitié, mais il est affecté d'un signe différent. Il est positif d'abord et négatif ensuite. La fig. IV en donne la représentative ; nous conviendrons de figurer les efforts tranchants par des lignes garnies de petites croix.

(*d*) **Elastique.** — Pour obtenir la courbe élastique, décomposons le triangle des moments en deux autres par la verticale C*c*, puis appliqnons au centre de gravité de chacun de ces triangles élémentaires une force fictive proportionnelle à sa surface ; c'est la construction que nous avons déjà appliquée plusieurs fois ci-dessus (fig. II et III).

En construisant un funiculaire sur ces forces, par la méthode de M. Colligaon, on obtient le polygone élastique A'C'B' dont les côtés sont tangents à la courbe élastique en A', C' et B' (fig. III). On sait que le coefficient d'échelle est alors $l^3 : 8EI$ (v. n° 178-*c* et *d*).

(*e*) **Flèche milieu.** — La plus grande flèche, ψ, celle du point C, a pour valeur, sur l'élastique,

(*flèche-épure*) $$\psi'' = \frac{P}{6}$$

et dans l'espace, en la multipliant par le facteur $l^3 : 8EI$

(*flèche-espace*) $$\psi = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

(*f*) **Pentes sur les appuis.** — Les pentes initiale et finale de la fibre neutre ont sur l'épure les valeurs suivantes :

(*pente-épure*) $$\left.\begin{matrix}\alpha''_0\\ \alpha''_1\end{matrix}\right\} = \frac{P}{6}\cdot\frac{l}{3} = \frac{P}{2l}$$

et dans l'espace, en les multipliant par le facteur $l^3 : 8EI$

(*pente-espace*) $$\left.\begin{matrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{matrix}\right\} = \frac{Pl^2}{16EI}.$$

202. **Poutre encastrée horizontalement sur chacun de ses appuis.** — (*a*) **Moments.** — Cet exemple (fig. 166) ne diffère du précédent qu'en ce que la poutre est encastrée *horizontalement* à ses extrémités.

Les moments d'encastrement doivent donc être tels qu'ils ramènent à zéro les pentes α''_0 et α''_1 trouvées ci-dessus. D'après ce que nous avons dit à propos des poutres soumises uniquement à des couples d'encastrement égaux (v. n° 187), la représentative des moments d'encastrement est une horizontale de hauteur égale aux 3/2 de l'ordonnée du point d'intersection de la tangente à l'origine de la courbe élastique avec la première trisectrice, c'est-à-dire, dans le cas de la figure 166, aux 3/2 de 1/6P, soit 1/4P.

La distance polaire étant $1/2l$, les moments d'encastrement, M_0 et M_1, seront donc égaux entre eux et l'on aura

(*moments d'encastrement*) $$\left\{\begin{matrix}M_0\\ M_1\end{matrix}\right\} = -\frac{P}{4}\times\frac{l}{2} = -\frac{Pl}{8}.$$

Quant au moment milieu, qui tout à l'heure était $1/4\,Pl$, il faut le diminuer de $1/8\,Pl$, et il devient :

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} = +\frac{Pl}{8}.$$

Ainsi, le moment fléchissant maximum n'a plus, dans ce cas, que la moitié de la valeur qu'il avait dans le cas précédent, et il est égal aux moments d'encastrement.

(*b*) **Efforts tranchants.** — Les efforts tranchants sont les mêmes, ainsi que les réactions sur les appuis.

(*c*) **Elastique et flèche.** — Quant à l'élastique elle s'obtiendra en ajoutant analytiquement celle que nous avons trouvée au numéro précédent avec l'élastique due aux moments d'encastrement seuls, et comme la flèche maximum de cette dernière est représentée sur l'épure (fig. II) par 1/8P, on a comme représentative de la flèche définitive prise par la poutre en son milieu

(*flèche-épure*) : $$\psi'' = \frac{P}{6} - \frac{P}{8} = \frac{P}{24}$$

et la flèche réelle prise dans l'espace a pour valeur

(*flèche-espace*) $$\psi = \frac{P}{24}\times\frac{l^3}{8EI} = \frac{1}{4}\times\frac{Pl^3}{48EI}.$$

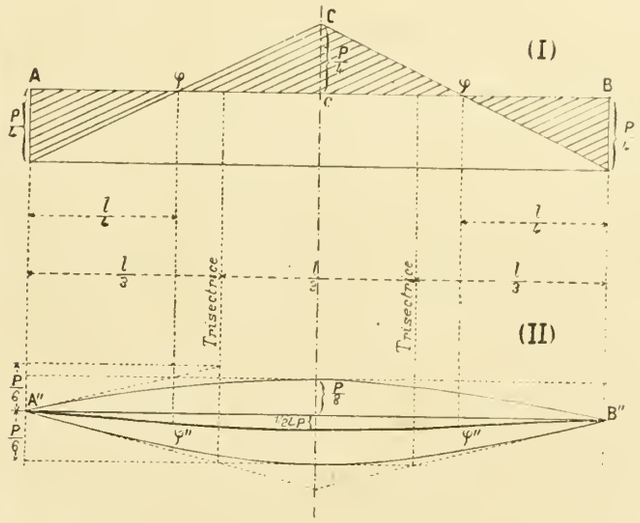


Fig. 166

Les encastrements ont donc réduit les flèches au quart de la valeur qu'elles avaient avant l'encastrement.

Enfin les points d'inflexion de la courbe élastique sont aux points $\varphi\varphi'' - \varphi\varphi''$ situés au premier et au troisième quart de la longueur de la portée.

(*d*) **Pentes sur les appuis.** — Elles sont nulles par le fait même de l'encastrement, puisque ce dernier est horizontal.

203. **Poutre encastrée horizontalement sur un appui et posée sur l'autre.** — (*a*) **Moments.** — Dans ce cas, la pente de la fibre neutre au-dessus de l'appui encastré est nulle ; le moment fléchissant au-dessus de l'autre appui est nul.

Le moment d'encastrement doit donc être tel qu'il puisse annuler, au-dessus de l'appui d'origine, la pente α_0 trouvée pour le premier cas (n° 201-*f*).

En nous reportant à ce que nous avons déjà dit plus haut (v. n° 185), nous prendrons sur la première trisectrice

une hauteur $L''l'' = 1/6P$ (v. fig. 167-II), et en joignant $D''l''$, nous aurons une droite qui, prolongée, rencontrera l'ordonnée d'origine en a'' à une hauteur

$$\overline{A''a''} = \frac{3}{2} \times \frac{P}{6} = \frac{P}{4};$$

la représentative de l'ordonnée d'encastrement sera

$$\overline{Aa} = \frac{3}{2}\overline{A''a'} = \frac{3}{8}P$$

et le véritable moment d'encastrement sera, en multipliant par la distance polaire $1/2l$,

$$M_{max} = M_0 = \overline{Aa} \times \frac{l}{2} = \frac{3}{16}Pl.$$

Le funiculaire des moments sera le triangle acD dans lequel l'ordonnée cc_1, prise par rapport à la droite aD, est

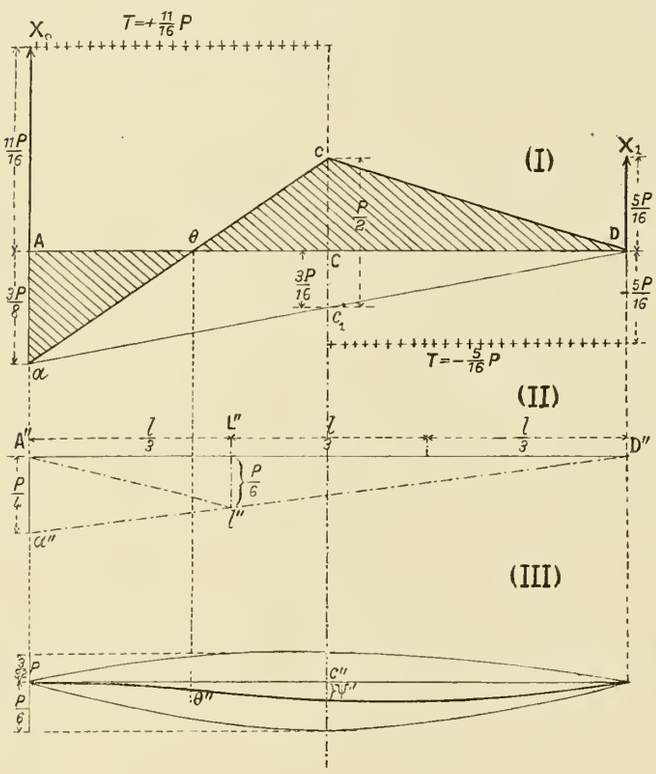


Fig. 167

égale à $1/2P$ et le moment fléchissant au milieu de la portée sera représenté par

$$\overline{Cc} = \overline{cc_1} - \overline{Cc_1} = \frac{P}{2} - \frac{3P}{16} = \frac{5P}{16}$$

et sa véritable valeur sera

$$\frac{5P}{16} \times \frac{l}{2} = \frac{5}{32}Pl,$$

c'est-à-dire un peu moins que la valeur du moment sur l'appui d'origine, lequel était $3/16$, c'est-à-dire $6/32$ de Pl. Ainsi, le moment maximum se produit à l'encastrement.

(*b*) **Réactions et efforts tranchants.** — L'effort tranchant dû au couple d'encastrement est mesuré (v. n° 47) par la droite Cc_1 (fig. I), et il a pour valeur $3/16P$, il sera à *ajouter* à la réaction primitive de l'appui A et à *retrancher* de la réaction de l'appui B. Les réactions primitives des appuis étant égales à $1/2P$, les réactions définitives seront

(*réactions d'appui*)
$$\begin{cases} X_0 = \frac{P}{2} + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P \\ X_1 = \frac{P}{2} - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P \end{cases}$$

Quant à la représentative des efforts tranchants (fig. I), on l'obtiendra en remontant celle du premier cas (fig. 165-IV) de toute la pente de la ligne aD (fig. 167-I), qui était la représentative des moments dûs à l'encastrement en A. Cette pente est, sur l'épure, $3/8P : l$; dans l'espace il faudrait la multiplier encore par $1/2l$, ce qui donnera $3/16P$. Cela placera la ligne des efforts positifs à $8/16 + 3/16$ soit $11/16P$ et celle des efforts négatifs à $5/16P$.

(*c*) **Elastique et flèche.** — La flèche dans le cas de la poutre librement posée (v. n° 201) est, sur l'épure, représentée par $1/6P$; d'un autre côté la flèche due au moment d'encastrement en A est sur l'épure $\frac{3}{4} \times \frac{P}{8}$ (v. n° 184-*e*).

La flèche que prendra la poutre dans le cas que nous étudions sera donc représentée par

(*flèche-épure*) $$\psi'' = \frac{P}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{P}{8} = \frac{7}{96}P$$

et la flèche dans l'espace sera

(*flèche-espace*) $$\psi = \frac{7}{18} \times \frac{Pl^3}{48EI}.$$

(*d*) **Pente d'extrémité.** — Nous avons vu (v. n° 184-*b*) que sur l'appui libre la pente α_1 que fait prendre un moment d'encastrement M_0 appliqué sur l'autre appui était égale à la moitié de celle α_0 qui est prise sur l'appui encastré. Or, cet encastrement ayant pour objet de détruire la pente α_0 du premier cas, il en résulte que α_1 est égal à la moitié de α_0 du premier cas, c'est-à-dire que l'on a

(*pente à l'extrémité*) $$\alpha_1 = \frac{1}{48}\frac{Pl^2}{EI}.$$

§ 2. — Poutres uniformément chargées

204. Poutre posée sur deux appuis simples. — (*a*) **Moments.** — Soit P la charge totale. Nous savons que dans le cas où elle est uniformément répartie, le funiculaire des charges est une parabole AcB (fig. 168-I) et que si elle est tracée par la méthode Collignon son ordonnée maxima Cc (v. n° 51) est au milieu de la portée et est égale à 1/4P. Le coefficient d'échelle étant $1/2l$, cela donne pour le moment maximum

$$M_{max} = \frac{Pl}{8}.$$

(*b*) **Efforts tranchants et réactions.** — L'effort tranchant (v. n° 51) est la droite ZZ'. Elle passe par le milieu de la poutre ; elle recoupe la verticale d'origine à la distance $+1/2P$ qui est la réaction X_0, et elle rencontre la verticale d'extrémité au point Z', à une distance $-1/2P$, qui est égale et de signe contraire à la réaction d'extrémité X_1.

(*c*) **Pentes sur les appuis.** — Considérons la parabole AcD des moments fléchissants ; sa surface S est, on le sait, les 2/3 du rectangle enveloppant

$$S = \frac{2}{3}\, l \times \frac{P}{4} = \frac{Pl}{6}.$$

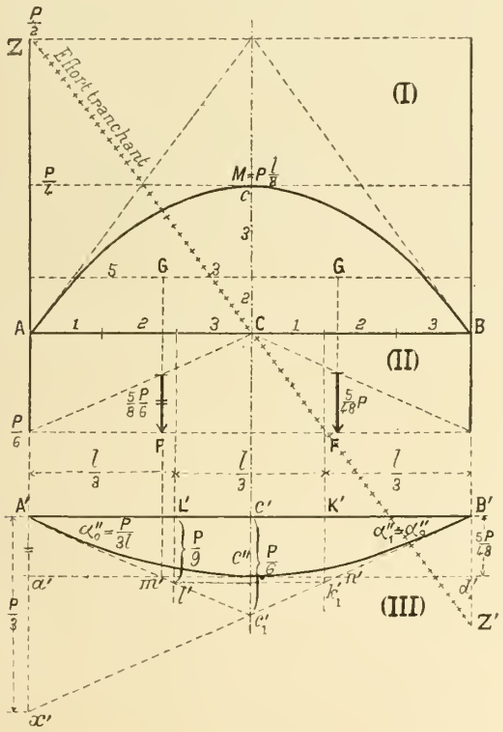


Fig. 168

Prenant comme base de réduction $1/2l$, la hauteur H du rectangle équivalent serait :

$$H = \frac{Pl}{6} : \frac{l}{2} = \frac{P}{3}.$$

Dès lors le funiculaire Collignon construit sur cette force fictive, $H = 1/3P$, supposée appliquée au milieu se trace (fig. III) en portant 1/3P de A' en x', et en joignant $x'B'$. On obtient ainsi le funiculaire $A'c'_1B'$ qui fait connaître les pentes-épure

$$(\textit{pentes-épure}) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha''_0\\ \alpha''_1\end{matrix}\right\} = \frac{P}{3l}.$$

En multipliant par $l^3 : 8EI$, on aura les pentes-espace

$$(\textit{pentes-espace}) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{matrix}\right\} = \frac{1}{24} \cdot \frac{Pl^2}{8EI}.$$

(*d*) **Elastique et flèche.** — Pour serrer de plus près l'élastique, décomposons la parabole en deux moitiés par la verticale milieu Cc (fig. I). L'aire S' de la demi-parabole est

$$S' = \frac{Pl}{12}.$$

Nous la remplacerons par une force fictive F qui sera, en prenant toujours $1/2l$ comme base de réduction (fig. I),

$$F = \frac{Pl}{12} : \frac{l}{2} = \frac{P}{6}.$$

Elle est appliquée au centre de gravité G de la demi-parabole et l'on sait (v. n° 66, fig. 52) que ce centre de gravité est situé aux 3/8 de la demi-portée à partir du point C.

Sur la force F et sur sa symétrique, pour l'autre demi-parabole, nous construisons en $A'm'n'B'$ (fig. III) le funiculaire Collignon. L'élastique lui est tangente, non seulement aux extrémités, mais encore au milieu, ce qui fait connaître en $c'c''$ la flèche-épure ψ'' et l'on a évidemment, à l'aide des rapports :

$$(\textit{flèche-épure}) \qquad \psi'' = \frac{5}{8} \times \frac{P}{6} = \frac{5}{48}P.$$

En multipliant par $l^3 : 8EI$ on aura la flèche-espace

$$(\textit{flèche-espace}) \qquad \psi = \frac{5}{8} \cdot \frac{Pl^3}{48EI}.$$

(*e*) **Comparaison avec le cas de la même charge concentrée.** — La flèche est les 5/8 de ce qu'elle serait avec la même charge concentrée au milieu ; quant au moment maximum il est la moitié de ce qu'il serait.

205. Poutre encastrée horizontalement sur chacun de ses appuis (fig. 169). — (*a*) **Moments.** — Les moments d'encastrement M_0 et M_1 doivent être calculés pour détruire les pentes d'appui α_0 et α_1 de l'élastique précédente.

Pour les déterminer on mène, sur la figure précédente,

(168-III) les trisectrices ; celles-ci rencontrent les tangentes extrêmes en l' et k' dont les ordonnées sont (fig. 168)

$$\overline{L'l'} = \overline{K'k'} = \frac{2}{3} \times \frac{P}{6} = \frac{P}{9}.$$

Nous savons que les moments d'encastrement sont représentés par les 3/2 de ces ordonnées, c'est-à-dire par 1/6 P. Donc, en descendant la parabole précédente (fig. 168-I) de

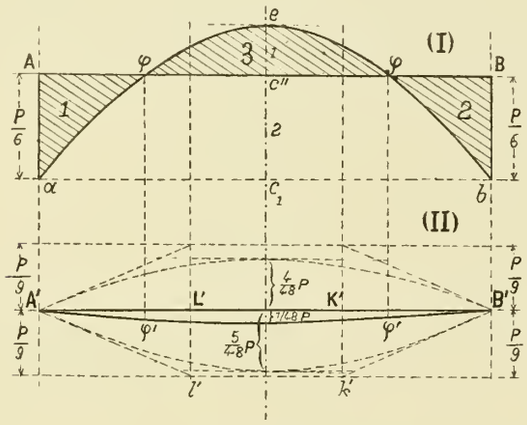


Fig. 169

toute cette hauteur on aura le nouveau funiculaire des moments (fig. 169-I). Le moment maximum se trouve alors au-dessus des appuis et il a pour valeur

$$M_{max} = \frac{P}{6} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl}{12}.$$

(*b*) **Elastique et flèche.** — Les ordonnées de l'élastique s'obtiennent, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, en prenant la différence entre les ordonnées de l'élastique due aux charges seules qui a été tracée (fig. 168-III) et de l'élastique qui serait due aux moments d'encastrement seuls.

On trouve ainsi pour la flèche définitive :

(*flèche-épure*) $$\psi'' = \frac{5P}{48} - \frac{4P}{48} = \frac{P}{48}.$$

La flèche dans l'espace sera, en multipliant par $l^3 : 8EI$:

(*flèche-espace*) $$\psi = \frac{1}{8} \times \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Les points d'inflexion φ' et φ' sont situés à une distance de la verticale milieu égale à $\frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$, c'est-à-dire sensiblement $0{,}288l$ ou en forçant $0{,}30l$ ou encore 6/10 de la demi-portée.

On prouve ce fait en remarquant que dans une parabole placée comme celle des moments les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses ; on a donc (fig. I)

$$\frac{\overline{c''\varphi}^2}{\overline{c_1 a}^2} = \frac{1}{3},$$

d'où l'on déduit en extrayant la racine carrée

$$\overline{c''\varphi} = \frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(*c*) **Comparaisons.** — La flèche est le 1/8 de ce qu'elle serait si la charge était concentrée au milieu dans le cas d'appuis simples.

Le moment maximum est réduit aux 2/3.

206. **Poutre avec encastrements les plus favorables** (fig. 170). — (*a*) **Choix des moments d'encastrement.** — Dans le cas précédent le moment fléchissant sur l'appui était figuré par 1/6 P et celui du milieu de la portée par 1/12 P. Mais si au lieu de descendre la parabole primitive de la hauteur 1/6 P on avait pris seulement $\overline{Aa} = 1/8$ P, le moment fléchissant au milieu aurait été représenté par

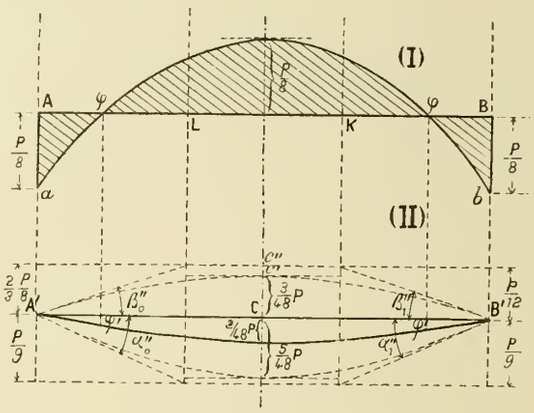


Fig. 170

1/8 P et la poutre aurait, autant qu'il était possible, gagné en résistance, puisque l'ancien moment maximum de la poutre libre sur ses appuis aurait été, pour ainsi dire, coupé en deux parties égales.

Prenons donc comme représentative des moments d'encastrement 1/8 P, nous en déduirons les pentes d'encastrement, nous trouverons ainsi

$$\beta''_0 = \frac{3}{4}\alpha''_0.$$

(*b*) **Conclusion.** — Si l'on dispose l'encastrement de telle sorte qu'il réduise des 3/4 la pente que la poutre aurait prise librement au-dessus de ses appuis, le moment fléchissant est la moitié de ce qu'il serait dans le cas d'une poutre libre, et la flèche de la courbe élastique serait réduite aux 2/5. Quant au point d'inflexion φ, il partagerait la demi-portée dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$. Tout cela est facile à démontrer sur la figure ci-contre (fig. 170).

207. **Poutre encastrée horizontalement sur un appui et posée sur l'autre.** — (*a*) **Moments.** — Nous raisonnerons

comme nous l'avons fait précédemment. En considérant le funiculaire élastique obtenu dans le premier cas, nous porterons sur la trisectrice, en l'' la longueur $L'l' = 1/9$ P déjà trouvée (fig. 168-III) et qui répondait à la pente à l'origine α_0 de la première élastique ; nous joindrons les points l'' et B' (fig. 171-I) et en prolongeant la droite ainsi obtenue jusqu'à la verticale d'origine nous aurons

$$\overline{A'a'} = \frac{P}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{P}{6}.$$

Le moment d'encastrement en sera les 3/2, ainsi que nous l'avons déjà dit, ce qui donnera sur l'épure (fig. II)

$$\overline{Aa} = \frac{3}{2} \times A'a' = \frac{P}{4}.$$

Nous descendrons ensuite la parabole des moments obtenus dans le premier cas (fig. 168-I) de manière que ses extrémités viennent en a et B (fig. 171-II), $\overline{Aa}$ étant égale à

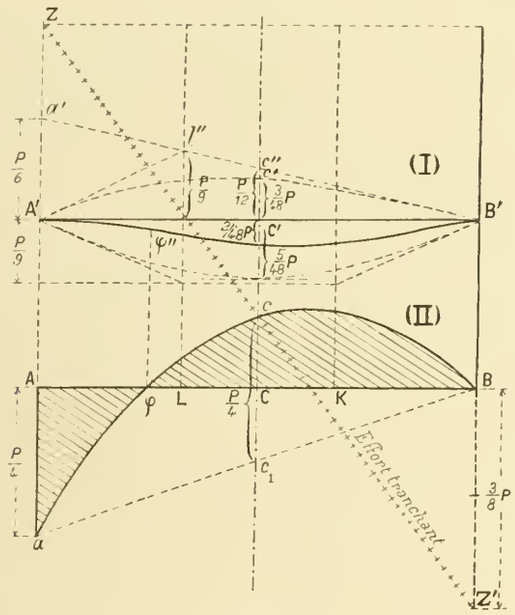


Fig. 171

1/4 P, et nous aurons la nouvelle représentative des moments dont l'ordonnée maximum, égale à 1/4 P, se présente au-dessus de l'appui A et non plus au milieu.

Le moment maximum est donc

$$M_{max} = M_0 = \frac{P}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl}{8}.$$

Il a la même valeur que le moment maximum trouvé dans le cas de la poutre librement posée sur ses appuis.

(*b*) **Flèche-milieu.** — Nous savons que la flèche-épure due à la charge est mesurée sur le funiculaire par 5/48 P. La flèche due au moment d'encastrement (v. n° 184-*e*) est représentée par

$$\frac{3}{4} C'c'' = \frac{1}{16} P = \frac{3}{48} P.$$

La flèche-épure finale, qui est la différence de ces deux valeurs, aura pour expression

(*flèche-épure*) $$\psi'' = \frac{2}{48} P.$$

Dans l'espace on aura, en multipliant par $l^3 : 8EI$

(*flèche-espace*) $$\psi = \frac{2}{8} \times \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Cette valeur est le double de celle que nous avons trouvée pour la poutre encastrée à ses deux extrémités. Remarquons d'ailleurs que la valeur maximum de la flèche ne correspond pas, dans le cas actuel, au milieu de la portée, mais à un point qui serait placé plus loin de l'origine.

(*c*) **Efforts tranchants et réactions.** — Puisque l'effort tranchant est toujours égal à la pente de la représentative des moments, il faudra, dans le cas actuel (fig. 171-II), remonter la représentative des efforts tranchants de la figure 168 de toute la pente de la ligne aB de la figure 171-II.

Cette pente sur l'épure est

$$\frac{\overline{Aa}}{\overline{AB}} = \frac{P}{4l}.$$

Il faut la multiplier par $1/2\,l$, distance polaire, ce qui donne 1/8 P ; telle est la quantité à remonter, ce qui donne la représentative Z'Z.

Ainsi donc l'effort tranchant dû au couple d'encastrement est égal à 1/8 P ; il s'ajoute à la réaction de gauche et il se retranche de celle de droite. Les réactions finales sont donc

(*réactions*) $$X_0 = \frac{5}{8} P. \qquad X_1 = \frac{3}{8} P.$$

(*d*) **Résumé.** — L'encastrement horizontal effectué sur un seul appui n'améliore donc pas la poutre au point de vue de sa résistance puisque le moment maximum y est le même (quoique placé ailleurs) que dans la poutre simplement posée ; mais il permet : 1° de diminuer la flèche-milieu prise par la poutre ; 2° de réduire dans le rapport de 5 à 3 la charge sur l'un des appuis, ce qui pourrait être assez important si l'un des deux points d'appui avait une solidité douteuse ; cela permettrait de reporter les 5/8 de la charge sur le bon support en n'imposant que les 3/8 à l'autre. Néanmoins, ainsi que nous l'avons dit (v. n° 191), pratiquement, il serait imprudent de compter sur un encastrement pour réaliser ce que nous venons de dire.

§ 3. — Corbeaux

208. Corbeau chargé d'un poids unique à son extrémité. — (*a*) **Moments.** — Soient l la longueur du corbeau, P le poids qu'il supporte à son extrémité et $1/2\,l$ la distance polaire adoptée. En réalisant la construction indiquée au chapitre précédent (v. n° 200) on obtient pour représentative du moment d'encastrement 2P.

Ce moment a donc pour valeur :

$$M_{max} = M_0 = 2P \times \frac{l}{2} = Pl.$$

Les moments fléchissants développés dans la poutre sont figurés par les ordonnées d'un triangle rectangle qui a l pour base et 2P pour hauteur.

(*b*) **Élastique et flèche.** — Pour avoir la flèche à l'extrémité B′, remplaçons le triangle des moments par une force fictive égale à la hauteur du rectangle de surface équivalente au funiculaire des charges et qui aurait pour base de réduction $1/2\,l$; cette force sera représentée par 2P et elle sera appliquée en G au tiers de la longueur. Construisons par la méthode indiquée (v. n° 201) un funiculaire sur cette force en prenant pour verticale d'origine celle de l'extrémité B′B″ (fig. II), nous obtenons en A″CB″ les côtés de ce funiculaire, côtés qui sont tangents en A″ et en B″ à la courbe élastique.

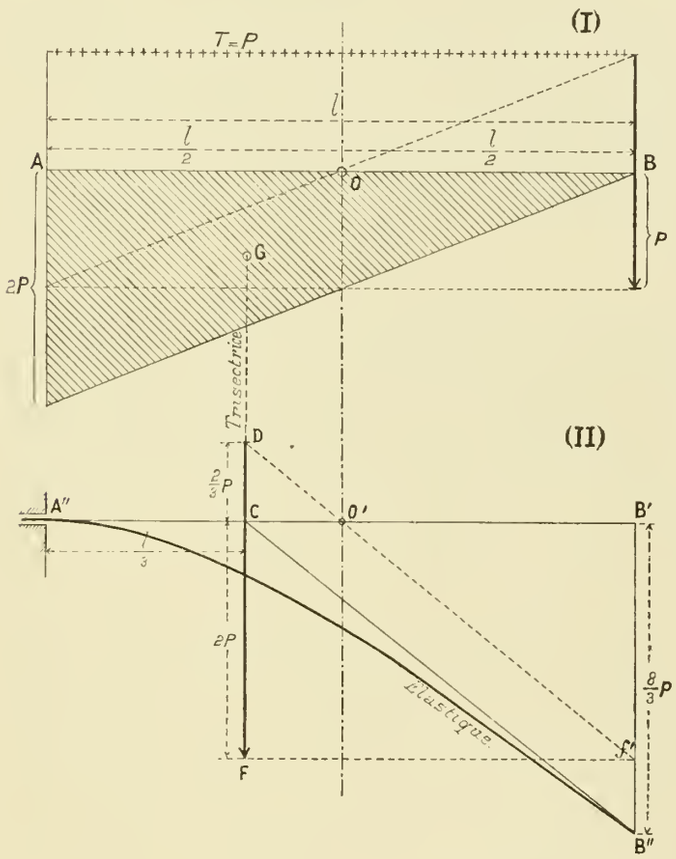


Fig. 172

Voici comment on a opéré : 1° La force F = 2P a été portée sur la trisectrice de C en F (fig. II); 2° elle a été projetée en B′f′ sur la verticale d'extrémité ; 3° on a joint f' au pôle O′ pris au milieu de la portée. On a prolongé jusqu'à la force F et on a obtenu en FD (trait fort) le segment d'extrémité ; 4° ce segment a été porté de B′ en B″, et la ligne B″C est la tangente finale de l'élastique.

La flèche prise par la poutre en B est donc représentée par B′B″; sur l'épure elle est mesurée par 8/3 P, mais sa valeur dans l'espace est

$$(\textit{flèche-espace}) \qquad \psi = \frac{8}{3}\,P \times \frac{l^3}{8EI} = 16\,\frac{Pl^3}{48EI}.$$

La flèche de la poutre est donc, dans ce cas, 16 fois plus forte que dans celui où elle repose sur deux appuis et où elle est chargée au milieu d'un poids P.

(*c*) — **Effort tranchant.** — L'effort tranchant T est constant (fig. I) et égal à + P.

209. Corbeau chargé d'un poids uniformément réparti. — (*a*). **Moments.** — Soient AB la longueur du corbeau (fig. 173), P le poids qu'il supporte. Cette charge peut être représentée par la surface d'un rectangle ayant pour base la longueur AB et dont la surface serait proportionnelle à P; soit ABCD ce rectangle.

Décomposons-le en éléments verticaux de même largeur et considérons le système des forces qui seraient proportionnelles aux rectangles élémentaires et qui seraient appliquées à leur centre de gravité. Toutes ces forces sont égales et leur somme est égale à P. Si nous construisons sur elles un funiculaire par la méthode indiquée plus haut (n° 200), nous obtiendrons un polygone dont les côtés seront tangents au funiculaire courbe des moments fléchissants.

En général il suffit de remplacer la force totale P uniformément répartie par un nombre très limité de forces p' dont la somme est égale à P, et le polygone funiculaire obtenu à l'aide de ces forces p' suit d'assez près la courbe funiculaire pour qu'on puisse facilement tracer celle-ci.

Dans la fig. 173, nous avons divisé la longueur de la poutre en 6 parties égales et nous avons considéré les 3 forces égales à 1/3 P qui agissent aux points impairs de cette division; nous avons ensuite construit sur ces forces un polygone funiculaire par la méthode indiquée au n° 200,

et en prenant $1/2\ l$ pour distance polaire; ce polygone $abcd$B′ nous suffit pour tracer la courbe des moments fléchissants qui est tangente à ses côtés (fig. II).

A l'inspection de la fig. 173, on reconnaît que le moment fléchissant développé dans la poutre est nul en B′ et que

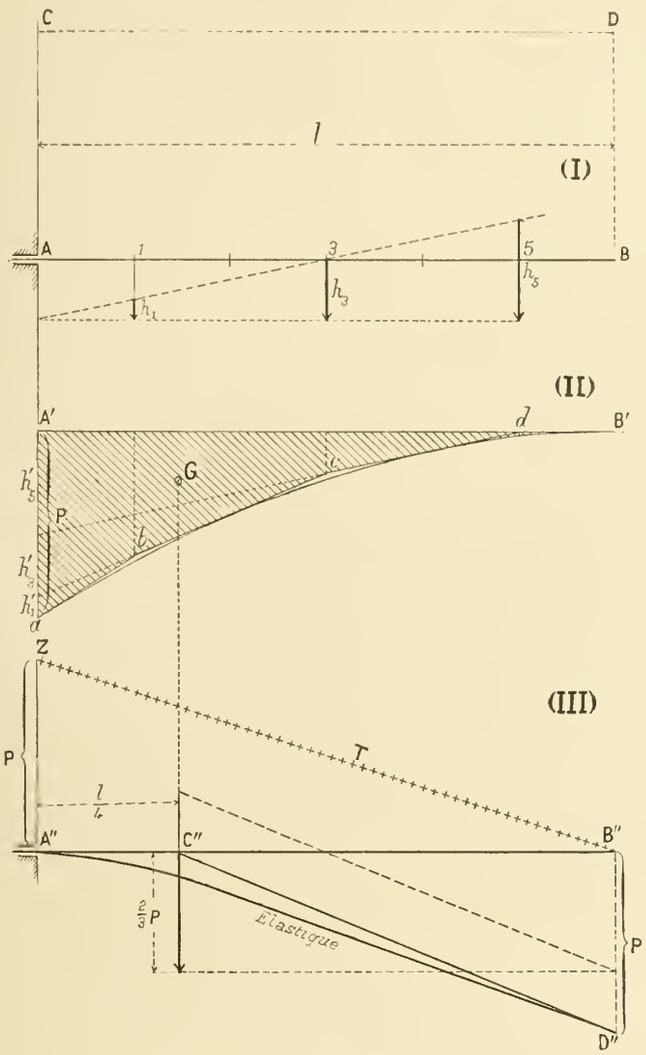


Fig. 173

en A′ il est représenté par P, car la somme des segments $h_1 + h_3 + h_5$ est égale à P. Le moment fléchissant M_0 en A est donc

$$M_{max} = M_0 = P \times \frac{l}{2}.$$

Quant à la courbe aB′, c'est une parabole à axe vertical, car les pentes des tangentes à cette courbe croissent en progression arithmétique lorsque les abscisses des points de contact par rapport au point B′ croissent aussi en progression arithmétique. Ces pentes sont proportionnelles aux abscisses.

(*b*) **Efforts tranchants.** — Les efforts tranchants sont représentés par les ordonnées de la droite ZB″. Ces ordonnées sont d'ailleurs égales aux pentes des tangentes à la courbe des moments.

(*c*) **Élastique et flèche.** — Pour obtenir la flèche prise par la poutre à son extrémité libre, considérons une force fictive égale à la hauteur d'un rectangle équivalent à l'aire des moments fléchissants et qui aurait pour base la distance polaire $1/2\ l$; cette force fictive sera donc représentée par

$$\frac{P \times l}{3} \times \frac{2}{l} = \frac{2P}{3}.$$

En construisant sur cette force, comme il est dit n° 201, un funiculaire avec $1/2\ l$ pour distance polaire on obtient en C″D″ la tangente à l'extrémité de la courbe élastique et la longueur B″D″ est celle de la flèche cherchée.

Si maintenant on remarque que la force fictive agit à $l/4$ de la longueur A″B″ parce que c'est à cette distance que se trouve le centre de gravité G de l'aire A′B′a extérieure à la parabole (1), on voit que le segment B″D″ a pour valeur :

(*flèche-épure*) $$\psi'' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} P = P;$$

telle est la valeur de la flèche mesurée sur l'épure; dans l'espace la vraie flèche sera

(*flèche-espace*) $$\psi = P \times \frac{l^3}{8EI} = 6\ \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Cette valeur est à celle de la flèche que nous avons obtenue pour le corbeau chargé d'un poids unique dans le rapport de 3 à 8.

(1) En effet (fig. 174), soit G′ le centre de gravité du segment intérieur; on sait (v. n° 66) qu'il est situé aux 5/8 de la largeur et que sa surface est $S' = 2/3\ l \times h$. La surface S extérieure est $S = 1/3\ l \times h$.

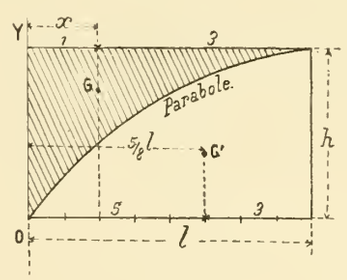
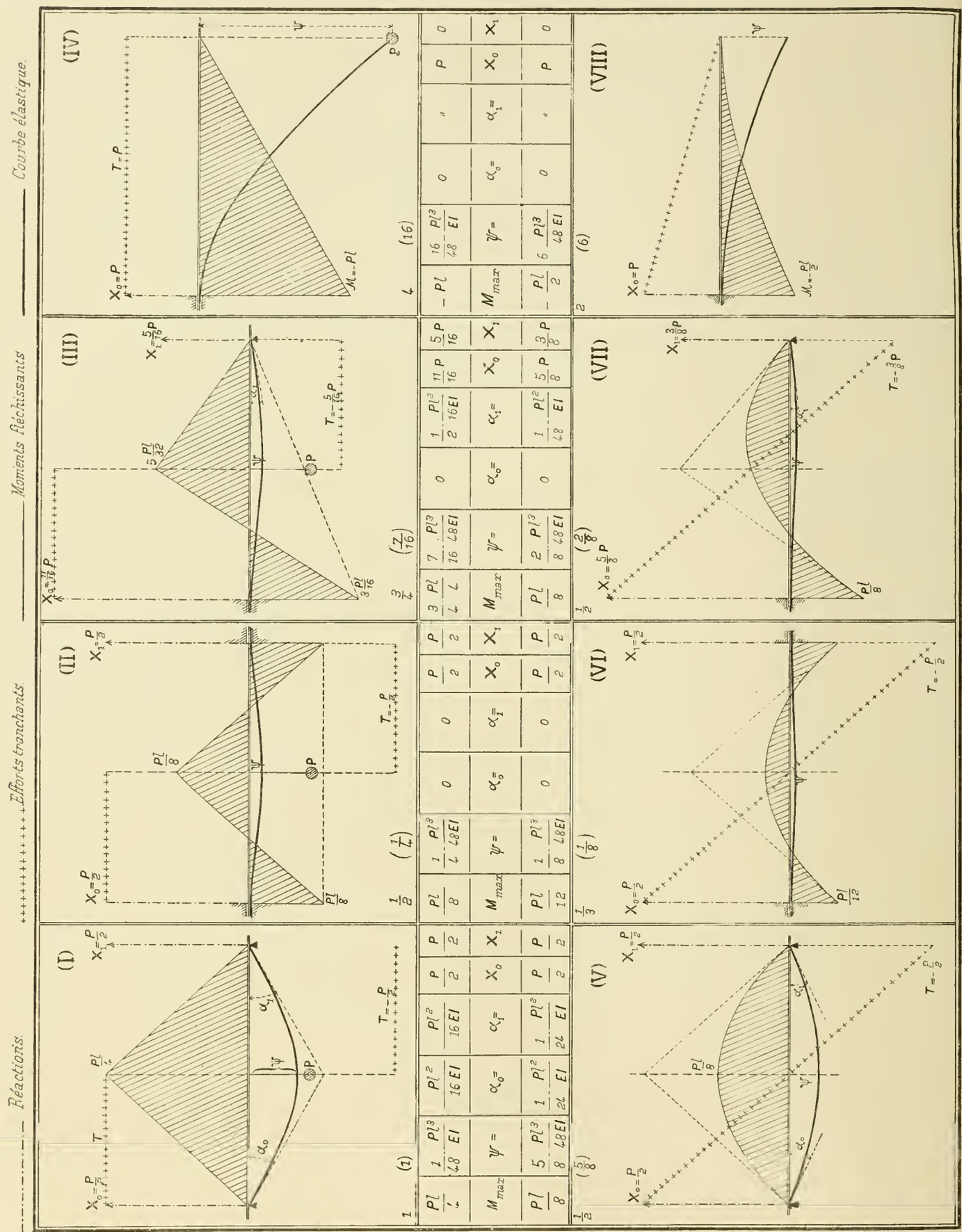


Fig. 174

Ecrivons que le moment de S par rapport à OY est égal au moment du rectangle diminué du moment de S′, nous aurons l'équation

$$x \times \frac{1}{3}\ lh = lh \times \frac{l}{2} - \frac{2}{3}\ lh \times \frac{}{8}\ l, \qquad \text{d'où l'on tire}$$

$$x = \frac{l}{4}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



Poids total P, appliqué en un point.

Poids total P, uniformément réparti.

§ 4. — Tableau résumant les cas usuels de la poutre à une travée

210. Légende du tableau. — Ce tableau s'explique de lui-même : Les significations des lettres y sont les suivantes :

M_{max}. Moment maximum ; celui pour lequel la poutre doit être calculée.

Ψ. Flèche-espace ; soit au milieu pour les poutres, soit à l'extrémité pour les corbeaux.

α_0 Pente initiale de l'élastique.

α_1 Pente finale de l'élastique.

X_0 Réaction de l'appui de gauche.

X_1 Réaction de l'appui de droite.

Pour en tirer un bon parti, il faut tout d'abord apprendre par cœur les expressions de Ψ et surtout de M_{max} pour le premier cas (1)

$$M = \frac{Pl}{4} \qquad \text{et} \qquad \Psi = \frac{Pl^3}{48EI},$$

après quoi on cherchera à retenir les rapports des autres valeurs de M et de Ψ à celles ci-dessus. Ces rapports sont écrits en vedette au droit des colonnes voulues.

Les réactions des appuis sont figurées par un trait mixte ; les efforts tranchants par un trait croisillonné ; les moments fléchissants par un trait plein, fin ; l'élastique par un trait plein, plus fort ; la fibre neutre, avant la flexion, par un trait double, fin.

Les hachures indiquent les aires de moments fléchissants.

§ 5. — Problème des aiguilles de barrage

211. Aiguille pressée d'un seul côté. — (*a*) **Description** (fig. 183). — Pour barrer une rivière et retenir l'eau à une hauteur donnée, à l'aide d'un barrage mobile, on emploie très souvent le système à *fermettes mobiles et à aiguilles de M. Poirée.*

Les fermettes F, en fer, sont mobiles autour de tourillons *m* et *n* fixés au radier. Elles peuvent s'abattre sur ce radier lorsque l'on veut effacer le barrage.

La retenue d'eau se fait à l'aide d'aiguilles en bois, CD, que le barragiste vient placer une à une ; chacune d'elles s'appuie par son pied B sur un seuil fixe, et par sa tête sur une barre A reliée aux fermettes.

Les aiguilles, ordinairement en sapin, ont une section droite carrée. Nous nous proposons de calculer l'équarrissage d'une pareille aiguille et de nous rendre compte de ses déformations sous l'influence de la charge d'eau qu'elle doit supporter.

(*b*) **Application donnée.** — « Déterminer les dimensions « qu'il convient de donner à une aiguille de barrage mobile « dont la hauteur de retenue $h = 2^m,50$ et dont la portée « $l = 3^m,00$ ».

Nous supposerons d'abord que le barrage considéré ne reçoit la pression de l'eau que d'un seul côté ; c'est ce qui a lieu généralement sur les déversoirs des barrages.

D'après un principe connu de physique on sait qu'en chaque point d'une surface située au sein d'un liquide en repos, la pression exercée par ce liquide est normale à la surface et qu'elle est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour hauteur la distance du point considéré à la surface libre. Par conséquent, si en chaque point de l'aiguille AB (fig. 183) nous élevons une perpendiculaire à sa direction et si nous portons sur cette perpendiculaire la distance de son pied à la surface libre CD, nous obtiendrons un point de la représentative des pressions supportées par

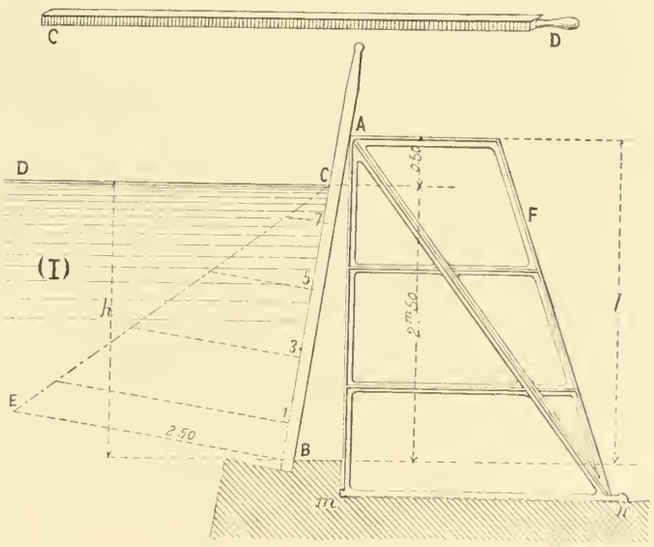


Fig. 183

l'aiguille. Il est d'ailleurs facile de démontrer que tous ces points se trouvent sur une ligne droite passant en C ; il suffira donc de déterminer un autre point de cette droite pour la connaître complètement.

Nous avons pris $BE = 2^m,50$; de sorte que les pressions se trouvent représentées par le triangle BCE.

Le problème à résoudre est donc celui-ci :

« Étant donné une poutre en bois posée librement contre « deux appuis et supportant, perpendiculairement à sa « direction, des pressions réparties proportionnellement « aux ordonnées d'un triangle, déterminer l'équarrissage à « donner à cette pièce. »

Nous remarquons immédiatement que tout se passera de la même façon que si l'aiguille étant horizontale, reposait sur deux appuis distants de la longueur AB, et si elle était chargée d'un poids réparti proportionnellement aux ordonnées du triangle BCE. Aussi pour la clarté de la figure, nous adopterons cette dernière disposition.

Ici AB, longueur réelle de la poutre, est égale à $3^m,033$. Son inclinaison fait qu'elle est un peu plus grande que la portée verticale l qui est de 3^m.

(*c*) **Moments.** — Déterminons d'abord le polygone funiculaire qui sera tangent à la représentative des moments. Pour cela nous supposerons que la partie chargée de l'aiguille CB (fig. 183) est divisée en quatre parties égales, au milieu de chacune desquelles agit un poids unique égal à la pression exercée par l'eau sur cette portion.

Or ce poids unique a sensiblement pour valeur le produit du quart de la longueur mouillée de l'aiguille par l'ordonnée moyenne de chacun des trapèzes partiels.

D'ailleurs, ces ordonnées moyennes passent par les points 1, 3, 5 et 7 de la division en 8 parties égales de la longueur BC.

En outre, nous pouvons considérer le barrage sur une longueur de $1^m,00$ comptée perpendiculairement à la fig. 183.

Dans ces conditions, en raisonnant pour le premier trapèze, la force unique F_1 agissant en 1 a pour valeur, en remarquant que $BC = 2^m,53$ et que l'ordonnée du point 1 est égale à 2,19

$$F_1 = 0,25 \times 2^m,53 \times 1,00 \times 2^m,19 = 1385 \text{ k}.$$

Nous l'avons représentée (fig. 184-2) par $1'a$; les autres forces F_3, F_5, F_7 agissant en 3', 5', et 7' seront représentées par des droites limitées à l'oblique aC'. C' étant le point d'intersection de la ligne d'eau avec l'aiguille.

Nous sommes ainsi ramenés à la recherche du funiculaire des moments d'une poutre A'B' simplement posée sur ses appuis A' et B' et chargée de 4 poids isolés $1'a$ — $3'b$ — $5'c$ et $7'd$.

Nous avons déjà plusieurs fois indiqué comment on procède en pareil cas par la méthode Collignon (v. nos 42-179...); nous n'y reviendrons pas.

Ayant alors obtenu (fig. III) le polygone funiculaire $B''a'b'c'd'A''$, on tracera facilement la courbe qui est tangente à ses côtés ; on obtiendra ainsi la représentative des moments de charge B''MA'' dont l'ordonnée maxima au point M atteint la valeur 1200 km,

$$M_{max} = 1200 \text{ km}.$$

(*d*) **Équarrissage à adopter.** — Appliquons la formule de l'équarrissage (v. n° 146)

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

dans laquelle nous ferons

$$M = 1200 \text{ km}. \qquad \text{et} \qquad R = 1000000^k \text{ (1)},$$

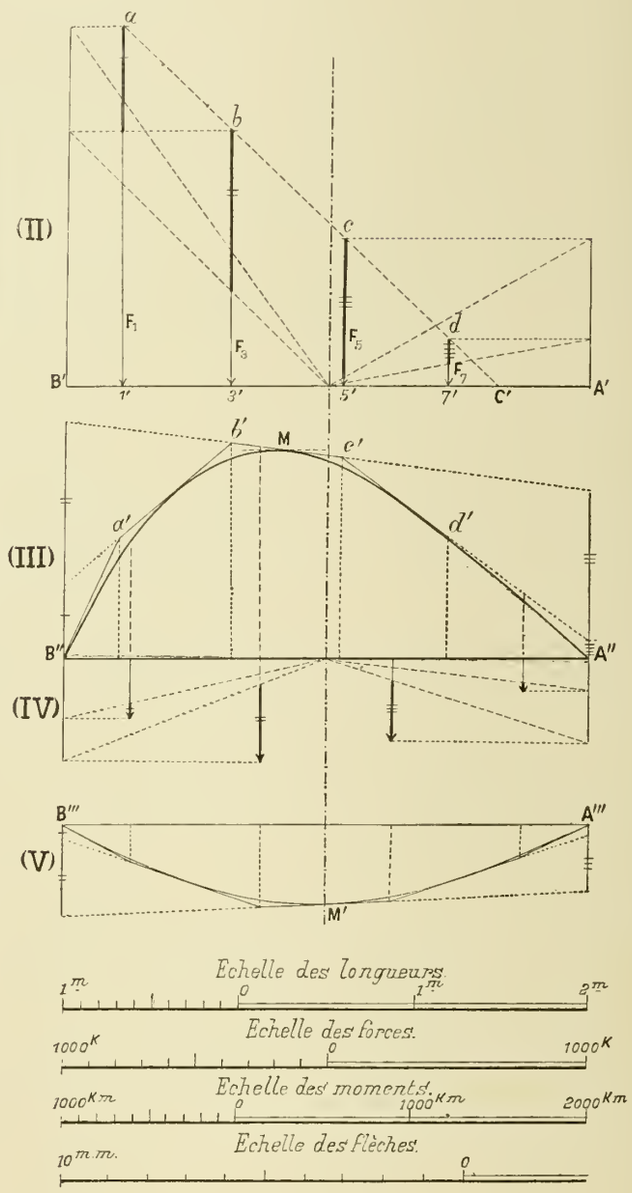


Fig. 184

(1) Dans le calcul des dimensions des aiguilles de barrages on adopte pour résistance de sécurité P des valeurs beaucoup plus grandes que celles que nous avons indiquées pour toute autre construction en bois. Cela n'a pas d'inconvénients. En effet, si une aiguille casse, cela n'a pour résultat que de laisser passer de l'eau, mais n'entraîne pas la rupture des autres aiguilles ; ce serait plutôt le contraire, elles seront légèrement soulagées. Par contre il y a un très grand intérêt à avoir des aiguilles légères et, par conséquent, maniables.

il viendra

$$\frac{I}{v} = 0{,}0012$$

et comme $\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6} = \frac{1.00 \times b^2}{6} = \frac{b^2}{6}$ on en déduit

$$\frac{b^2}{6} = 0{,}0012,$$

d'où $$b = \sqrt{0{,}0072} = 0^m{,}085.$$

Telle serait l'épaisseur, $b = 0^m{,}085$, d'une planche de bois qui aurait 1^m de largeur et qui serait capable de résister à la pression de l'eau. Pour avoir des aiguilles à section carrée, nous débiterons cette planche par largeurs de $0^m{,}085$, de sorte que nos aiguilles auront pour équarrissage $0^m{,}085$ sur $0^m{,}085$.

(*e*) **Élastique.** — En considérant la surface des moments fléchissants A″MB″ (fig. III) comme représentant une charge fictive répartie et en traçant un nouveau funiculaire des moments fléchissants qui en résulteraient, on obtient la courbe élastique A‴M′B‴ (fig. V) dont les ordonnées, mesurées à l'échelle des flèches, font connaître les ordonnées prises par l'aiguille sous la pression de l'eau. Les constructions à faire dans ce cas sont les mêmes que celles que nous avons indiquées dans les exemples précédents (v. nos 179 à 183). La seule différence consiste en ce que nous avons pris pour l'eïfication, le module d'élasticité du bois E = 1500 millions de kilos, au lieu de celui du fer qui était E′ = 20000 millions de kilos (v. no 136 — Tableau). Nous n'insistons pas.

212. **Aiguille pressée de deux côtés.** — (*a*) **Données.** — Il arrive souvent qu'un barrage à aiguille reçoit, outre la pression des eaux qu'il retient en amont, une pression, moins forte, des eaux du bief d'aval; ces deux efforts s'équilibrent en partie, et l'on peut se demander dans quelles conditions l'aiguille résiste aux efforts qui lui sont alors imposés.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer quel est l'effort unitaire maximum qui serait imposé à l'aiguille de $0{,}085 \times 0{,}085$ d'équarrissage, que nous avons déterminée ci-dessus lorsque le niveau de l'eau dans le bief d'aval est à $0^m{,}50$ au-dessus de l'appui A.

Nous pourrions traiter ce problème en cherchant séparément, par la méthode précédente, les valeurs des moments fléchissants qui résulteraient des pressions exercées sur chacune des faces de l'aiguille; les moments fléchissants définitifs seraient les différences entre les moments partiels ainsi trouvés, et du maximum du moment fléchissant définitif on déduirait l'effort unitaire cherché.

Mais nous pouvons aussi étudier directement ce cas ainsi que nous allons le faire.

La représentative des pressions de l'eau d'amont (fig. 185), est le triangle BCE; celle des pressions de l'eau d'aval est le triangle BC′E′ ou BC′E₁ dont les ordonnées doivent être prises en signe contraire de celui qui est adopté pour le triangle d'amont BCE. Les pressions définitives seront donc

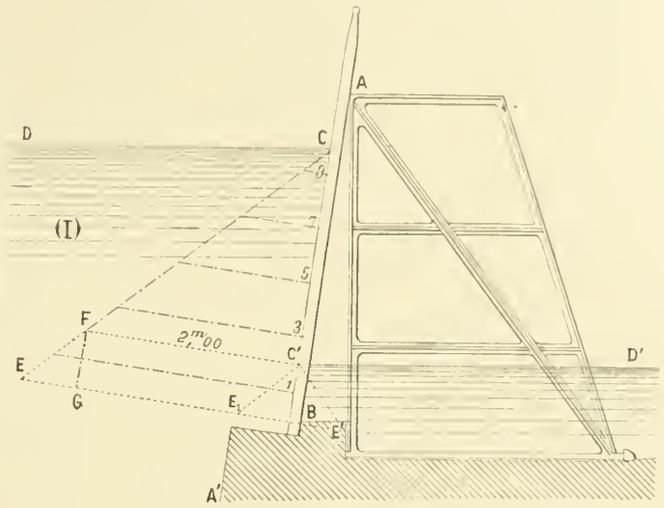


Fig. 185

représentées par les ordonnées du quadrilatère CEE₁C′ ou bien, comme CE et C′E₁ sont parallèles, par les ordonnées du trapèze BCFG.

(*b*) **Moments.** — Ainsi que nous l'avons fait au numéro précédent, imaginons que la longueur BC est divisée en parties égales : ici le nombre de ces parties sera 5, en raison du rapport des hauteurs de l'eau dans les biefs d'amont et d'aval (2,50 : 0,50 = 5.); et imaginons qu'au milieu de chaque partie se trouve appliquée une force équivalente à la pression totale que développerait l'eau sur le segment considéré de l'aiguille.

Nous calculons la pression de l'eau sur l'aiguille de $0^m{,}085$ de largeur et non plus, comme tout à l'heure, sur une planche qui aurait 1^m de largeur.

La 1re force, voisine de l'appui B, aura pour valeur

$$1000^k \times \frac{2^m{,}53}{5} \times 0{,}085 \times 2{,}00 = 86^k;$$

nous l'avons représentée en (fig. 186 — II), par 1′*a*.

La 2e force sera égale à

$$1000^k \times \frac{2^m{,}53}{5} \times 0{,}085 \times 1{,}75 = 75^k$$

et se trouve représentée par 3′*b*.

Quant aux autres forces, elles passent par les points impaires de la division de B′C′ en 10 parties égales et elles sont représentées par des droites limitées à l'oblique C′*b*.

Nous sommes ainsi ramenés à l'étude d'une poutre droite reposant sur deux appuis simples et chargés de 5 poids isolés appliqués en des points connus et ayant des valeurs déterminées; ce problème est tout à fait analogue à celui

que nous venons de traiter, nous ne répéterons pas ce que nous avons dit.

(*c*) **Vérification de la résistance.** — La fig. 186-III montre que, en M, tangente horizontale, le moment fléchissant maximum est

$$M_{max} = 102 \text{ km},$$

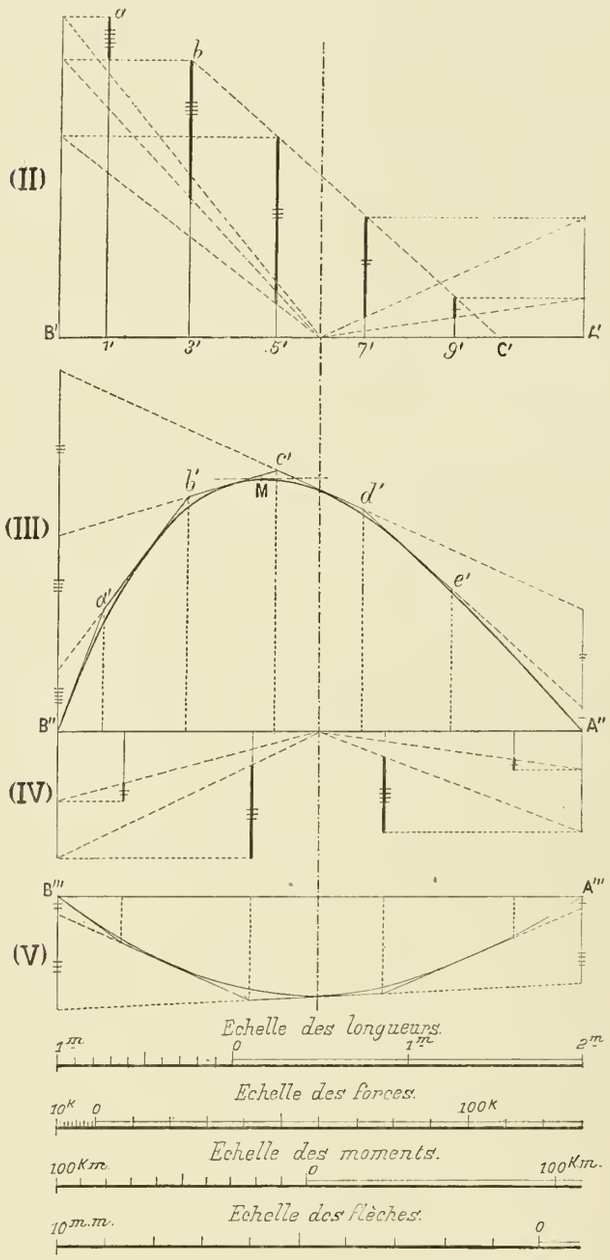


Fig 186

d'où l'on déduit en appliquant la formule d'équarrissage

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

dans laquelle on remplace M par 102

$$\text{et } \frac{I}{v} \text{ par } \frac{\overline{0{,}085}^3}{6} = 0{,}000.102.354$$

$$R = 996541^k$$

soit $99^k{,}65$ par centimètre carré, et comme la résistance de sécurité admise était de $1\,000000^k$ par m^2 soit 100^k par cm^2, nous sommes dans de bonnes conditions.

(*d*) **Flèche.** — On voit également que la flèche prise par l'aiguille, sous l'influence de la pression de l'eau, atteint sa plus grande valeur vers le milieu où elle est un peu supérieure à 2 millimètres.

213. **Règle pratique pour le calcul des aiguilles.** — (*a*) **Construction directe du moment maximum.** — Une construction géométrique, très simple, permet de trouver directement la position et la grandeur du moment maximum M_{max} (fig. 187).

Soit AB l'aiguille, rendue horizontale; CB la partie mouillée et CBB′ le triangle de charge d'eau; nous représentons sa surface par une force F*f* appliquée en son centre de gravité, c'est-à-dire en G, au tiers de sa largeur et, si nous prenons comme base de réduction la demi-hauteur mouillée $1/2h$, la force F*f* sera égale à h car la surface du triangle CBB′ étant égale à $1/2h^2$, on devra avoir

$$\overline{Ff} = \frac{h^2}{2} : \frac{h}{2} = h.$$

Nous construisons sur cette force F*f* le funiculaire Collignon ADB comme à l'ordinaire; les deux longueurs OX_0 et OX_1, suivant lesquelles ses côtés coupent la verticale milieu, donnent les deux réactions d'appui, X_0 et X_1, de la force F*f*, c'est-à-dire du triangle de charge. Reportons-les en X'_0 et X'_1 sur les verticales d'extrémité.

Cela fait, remarquons d'abord, et cela d'une manière générale, que le moment est maximum lorsque l'effort tranchant est nul; cela résulte du théorème de l'effort tranchant (v. n° 173), qui dit que cet effort tranchant est égal à la pente de la représentative des moments; pour le point S (fig. 187-II) d'ordonnée maxima S*s* la pente est nulle, et, par suite aussi, l'effort tranchant.

Mais l'effort tranchant en S s'obtiendrait en y transportant 1° la réaction de gauche X'_0 et 2° la charge d'eau représentée par le triangle CSS′; à elles deux elles devront donner une somme nulle.

Trouver le point S′, ou son ordonnée y, revient donc à détacher dans le grand triangle CBB′ un triangle plus petit CSS′ qui soit tel que la force Ω' équivalente à sa surface soit égale à X'_0.

Or sa surface sera $1/2y^2$; la base de réduction étant $1/2h$, on aura donc l'équation :

$$\frac{y^2}{2} : \frac{h}{2} = X'_0 \qquad \text{d'où}$$

$$y^2 = hX_0,$$

ce qui conduit au tracé suivant :

1° On reporte X_0 de B en E; 2° sur B'E comme diamètre on construit une demi-circonférence; 3° la longueur BK suivant laquelle elle recoupe AB donne la valeur de y; 4° on reporte BK de B en K' sur la verticale d'extrémité et on tire l'horizontale K'S', ce qui détermine le petit triangle, dont la surface est égale et de signe contraire à X_0.

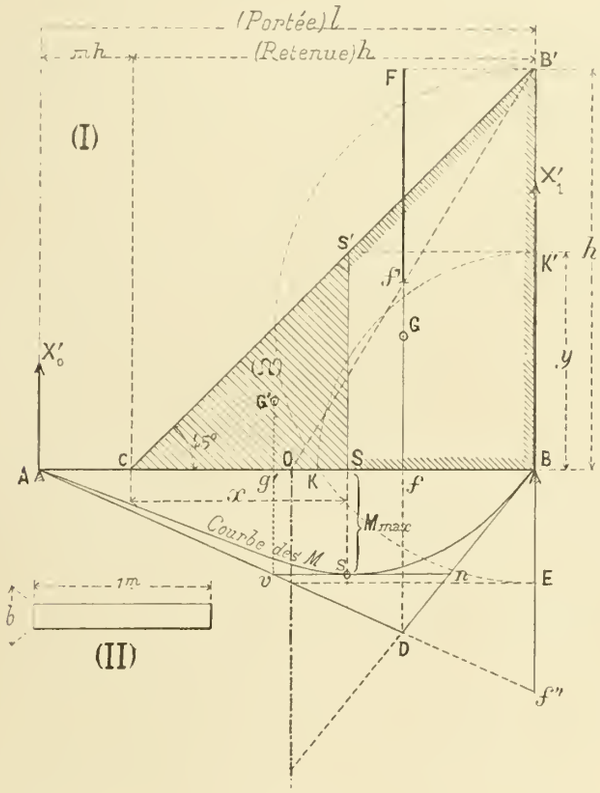


Fig. 187

Pour avoir la valeur de M_{max} on prend en $G'g'$ la trisectrice de ce petit triangle; la force représentant sa surface y serait appliquée. On la prolonge jusqu'en V, où elle rencontre le premier côté AD, déjà tracé, du funiculaire, et par suite ce funiculaire sera AvnB; le côté moyen vn étant horizontal.

Le moment maximum M_{max} a pour valeur $g'v$ et c'est en S qu'il se produit.

(*b*) **Remarque.** — Nous avons admis, dans l'exemple actuel, que la partie non mouillée AC de l'aiguille était environ le cinquième, c'est-à-dire les 0,20 de la partie CB qui est mouillée et qui reçoit par conséquent la charge d'eau. Sur l'épure, nous trouvons que le moment maximum M_{max} est représenté à l'échelle du dessin par une longueur Ss qui est *très sensiblement* égale aux 0,28 de CB, c'est-à-dire de la hauteur mouillée h; un peu plus du quart.

Or le coefficient d'échelle est $\left(\frac{h}{2}\right)^2$, savoir $\frac{h}{2}$, distance polaire, multipliée par $\frac{h}{2}$, base de réduction; on voit donc que ce moment maximum a sensiblement pour valeur

$$(1) \qquad M_{max} = 0{,}28h \times \frac{h^2}{4} = 0{,}07h^3.$$

(*c*) **Charge d'équivalence.** — Imaginons une poutre d'une portée fictive h (*et non plus* l) reposant sur deux appuis et soumise à une charge d'eau ayant *partout* une hauteur constante H'; le poids total de cette charge sera

$$P = hh'$$

et nous savons (v. n° 204) qu'elle donnerait un moment maximum

$$(2) \qquad M'_{max} = \frac{Ph}{8} = \frac{h^2h'}{8}.$$

Egalons les valeurs (1) et (2), il viendra

$$0{,}07h^3 = \frac{h^2h'}{8} \qquad \text{d'où}$$

$$h' = 0{,}56h,$$

ce qui nous permet d'établir la règle pratique suivante.

(*d*) **Règle pratique.** — Lorsque la partie non mouillée de la portée d'une aiguille est le cinquième (ou à peu près) de la partie mouillée on peut calculer l'aiguille comme une poutre qui, *ayant pour portée fictive la longueur mouillée*, supporterait une hauteur d'eau *partout* égale aux 56 centièmes de la hauteur de retenue du barrage.

Nota. — 1° A cause de la faible inclinaison des aiguilles, on peut confondre la hauteur de retenue avec la longueur de la partie mouillée.

2° On fera bien, alors, de forcer un peu le chiffre et de prendre pour hauteur fictive de la charge d'eau uniforme $h' = 0{,}60h$.

(*e*) **Application de cette règle.** — Même énoncé qu'au n° 211.

La longueur mouillée étant $2^m{,}50$, assimilons l'ensemble de plusieurs aiguilles à une planche qui aurait 1^m de largeur et une épaisseur b (fig. 187-II).

La règle pratique nous donne pour la charge d'eau

$$P = 2{,}50 \times (0{,}6 \times 2{,}50) = 3750^k$$

et pour moment maximum fictif

$$M' = \frac{Pl}{8} = \frac{9375}{8} = 1172^{km}.$$

Nous avions trouvé plus haut (v. 211-*c*) 1200^{km} en opérant sur notre épure. La différence est de l'ordre des erreurs graphiques possibles.

(*f*) **Solution algébrique.** — Traitons la même question par le calcul.

Soit h la hauteur mouillée CB (fig. 187), et soit m le rapport de la longueur non mouillée AC, à la longueur mouillée, on aura $AC = mh$, et la longueur de l'aiguille sera $(m + 1\ h$.

Le centre de gravité G du triangle de pression, CBB′, est à une distance $1/3h$ de l'extrémité B. Son poids est $1/2h^2$ et ses deux réactions sur les appuis sont :

$$(1) \qquad X_0 = \frac{h^2}{2} \times \frac{\frac{h}{3}}{(m+1)h} = \frac{h^3}{6(m+1)h} = \frac{h^2}{6(m+1)}.$$

$$X_1 = \frac{h^2}{2} - X_0 = \frac{h^2}{6} \times \frac{3m+2}{m+1}.$$

Prenons pour origine des abscisses le point C et soit x l'abscisse d'une section quelconque S.

L'effort tranchant T pour cette section sera la somme de la réaction X_0 et de l'aire Ω' du triangle partiel CSS′. Cette aire Ω' a pour expression $\Omega' = 1/2x^2$, on aura donc l'équation

$$(2) \qquad T = X_0 - \frac{x^2}{2}\ ;$$

le second membre doit s'annuler pour l'abscisse x du point S ce qui donne :

$$x = \sqrt{2X_0}.$$

Le moment maximum sera égal à la somme algébrique du moment de X_0 et du moment de Ω' par rapport au point S.

$$M_{max} = X_0(mh + x) - \frac{x^3}{6}.$$

Faisons, selon nos conventions, $m = 0{,}20$ et calculons M_{max} ; les éléments du calcul sont :

$$m = 0{,}20 \quad || \quad m + 1 = 1{,}20 \quad || \quad 6(m+1) = 7{,}20.$$

$$X_0 = \frac{h^2}{6(m+1)} = \frac{h^2}{7{,}20} = 0{,}14h^2.$$

$$x = \sqrt{2X_0} = h\sqrt{0{,}28} = 0{,}529h.$$

$$x^3 = h^3(0{,}529)^3 = 0{,}148035h^3.$$

$$\frac{x^3}{6} = 0{,}0246.$$

$$M_{max} = h^3(0{,}7290 - 0{,}0246) = 0{,}7044h^3.$$

Quelle serait la hauteur d'eau h' constante qui, appliquée sur l'aiguille en supposant la portée fictive de celle-ci égale à h, donnerait le même moment maximum ?

La charge totale P′ que donnerait cette hauteur d'eau h' serait

$$P' = hh'$$

et le moment maximum M'_{max} serait (v. n° 204)

$$M' = \frac{P'h}{8} = \frac{h^2h'}{8}.$$

En l'égalant au précédent on a l'équation

$$\frac{h^2h'}{8} = 0{,}7044h^3, \qquad \text{d'où}$$

$$h' = 0{,}56352h.$$

Nous arrivons au même résulat que ci-dessus.

§ 6. — Problème de la poutre surchargée

214. **Surcharge unique concentrée en un point.** — (*a*) **Enoncé du problème.** — Une poutre soumise à une charge totale P, uniformément répartie, reçoit, en outre, en un de ses points C une charge concentrée P′ (fig. 188) ; on dit alors que la poutre subit une *charge mixte*. Etudier les modifications apportées par cette charge aux moments fléchissants , aux efforts tranchants, et, par conséquent, aux conditions de résistance de la pièce.

Les données algébriques seront :

l portée de la poutre ;

P charge totale uniformément répartie ;

P′ surcharge concentrée au point C ;

K rapport $\overline{CB} : \overline{OB}$ de la distance à laquelle la surcharge est appliquée à la *demi-portée* $1/2\,l$;

m rapport P′ : P de la surcharge à la charge.

Sur la fig. 188. On aura donc

$$\overline{BC} = \frac{Kl}{2}, \qquad AC = l - \frac{Kl}{2} = \frac{l(2-K)}{2}, \qquad \frac{CB}{BA} = \frac{K}{2}.$$

(*b*) **Moment maximum ; distinction à faire.** — Traitons le problème graphiquement en employant les funiculaires de M. Collignon.

1° Les moments dus à la charge uniformément répartie P sont représentés par une parabole AIB (fig. 188-I) dont la hauteur est $OI = 1/4P$.

2° Les moments fléchissants dus à la charge concentrée en C sont représentés par les ordonnées du triangle AC′B obtenu comme nous l'avons indiqué.

3° Le funiculaire définitif sera représenté par une courbe dont les ordonnées sont égales à la somme de celles de la parabole primitive et du triangle AC′B. La courbe ainsi obtenue sera formée de deux arcs de parabole ATd et dB.

4° En menant à ce funiculaire définitif une tangente horizontale, l'ordonnée Tt du point de tangence mesurera le moment fléchissant maximum dont la valeur sera

$$M = \overline{Tt} \times \frac{l}{2}.$$

Sur la fig. 188, le maximum Tt est un *maximum tangentiel*. Désignons-le par M, mais il pourrait se faire (v. fig. 189),

si la surcharge était considérable, ou si elle était appliquée plus près du milieu, que le point de tangence T fût placé au-delà du point de croisement, d, des deux paraboles.

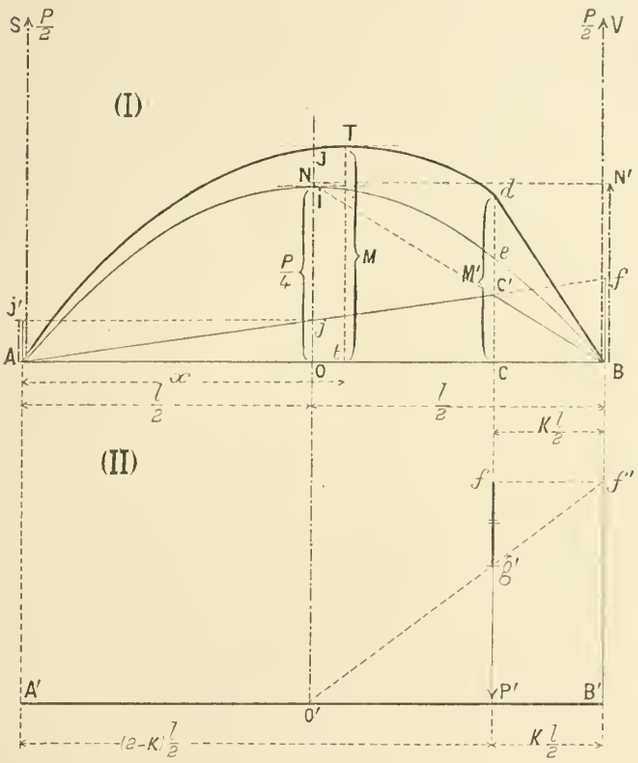


Fig. 188

Dans ce cas, le maximum du moment répondrait précisément à cet angle de croisement et nous aurions alors ce

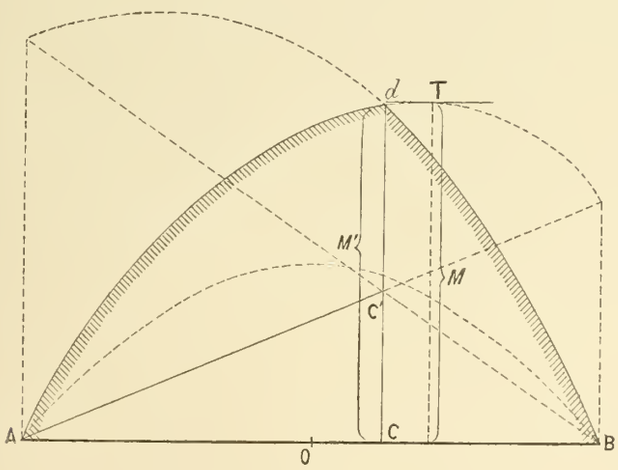


Fig. 189

que nous nommerons un *maximum anguleux* ; désignons-le par M'.

Pratiquement il faudra donc calculer M et M' et prendre le plus grand des deux moments.

(*b*) **Maximum tangentiel.** — Calculons d'abord l'abscisse du maximum *tangentiel* (fig. 188-I). Soit x l'abscisse du point t. Nous savons que pour ce point t l'effort tranchant est nul (v. n° 173). Or cet effort tranchant s'obtiendra en transportant en t toutes les forces situées à gauche et comprenant :

1° La réaction X_0 de l'appui A laquelle est

$$X_0 = \frac{P}{2} + P'\frac{K}{2},$$

et peut s'écrire, avec nos notations, en mettant $\frac{P}{2}$ en facteur :

$$X_0 = \frac{P}{2}(1 + Km). \tag{1}$$

En effet, 1/2 P c'est la réaction AS de la charge uniformément répartie P. Quant à la charge P', sa réaction AJ' s'obtient en partageant P' dans le rapport CB : BA lequel est égal à 1/2K. Cette réaction est donc égale à 1/2P'K : elle est positive.

2° La portion de charge uniformément répartie, comprise entre A et t, c'est-à-dire sur une longueur x; cette portion de charge sera, quand il s'agira d'en évaluer le moment, supposée appliquée en son centre de gravité, c'est-à-dire à une distance du point t égale à $1/2x$. Elle a pour valeur $-\frac{Px}{l}$ (elle est négative); pour l'instant cette valeur nous importe seule. Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{P}{2}(1 + Km) - \frac{Px}{l} = 0, \qquad \text{d'où l'on tire :}$$

$$x = \frac{l}{2}(1 + Km). \tag{2}$$

Dès lors, nous pouvons savoir immédiatement s'il faut choisir le maximum tangentiel de préférence au maximum anguleux; pour qu'il en soit ainsi, il faut que la valeur x, trouvée ci-dessus, soit plus petite que AC, ce qui donne la *relation de condition :*

$$\frac{l}{2}(1 + Km) < \frac{l}{2}(2 - K), \qquad \text{d'où}$$

$$K < \frac{1}{m + 1}. \tag{3}$$

Exemple : Pour $m = 1$, c'est-à-dire pour une surcharge P' égale à la charge uniforme P, on devra avoir $K < 1/2$, ce qui veut dire que cette surcharge doit être appliquée à une distance du mur moindre que la moitié de la demi-portée, soit le quart de la portée pour que ce soit le maximum tangentiel qui soit à considérer.

Calculons la valeur correspondante de M,

on aura $$M = X_0 x - \frac{Px}{l} \times \frac{x}{2}.$$

Remplaçant X_0 et x par les valeurs (1) et (2), trouvées ci-dessus, et simplifiant, il vient

$$(4) \qquad M = \frac{Pl}{8}(1 + Km)^2.$$

Coefficient de majoration. — Rappelons que $\frac{Pl}{8}$ est précisément le moment maximum qui serait dû à la charge uniformément répartie P si elle agissait seule; par conséquent si nous posons

$$(5) \qquad \delta = (1 + Km)^2, \qquad \text{d'où} \qquad M = \frac{Pl}{8}\delta;$$

on voit que δ est une sorte de *coefficient de majoration* que la surcharge P′ impose au moment maximum qui serait produit par la charge P toute seule. En vertu de la formule d'équarrissage

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}.$$

on voit aussi que ce coefficient de majoration frappera, de même, les moments de résistance, $I : v$, des poutres ainsi surchargées.

(*c*) **Maximum anguleux.** — Calculons le maximum anguleux M′.

L'abscisse x' du point C qui lui correspond est

$$x' = \frac{l(2 - K)}{2}.$$

Le moment correspondant M′ a pour expression

$$M' = X_0 x' - \frac{Px'}{l} \times \frac{x'}{2}.$$

En remplaçant X_0 et x' par leurs valeurs, et simplifiant, il vient :

$$M' = \frac{Pl}{8}[K(2 - K)(2m + 1)].$$

Coefficient de majoration. — Le coefficient de majoration δ' dans ce cas est donc

$$(6) \qquad \delta' = K(2 - K)(2m + 1).$$

En écrivant que $\delta' = \delta$ on trouve l'équation

$$(1 + Km)^2 = K(2 - K)(2m + 1)$$

qui, en effectuant les calculs, devient :

$$K^2(m + 1)^2 - 2K(m + 1) + 1 = 0 \qquad \text{ou}$$

$$[K(m + 1) - 1]^2 = 0 \qquad \text{d'où}$$

$$K = \frac{1}{m + 1};$$

c'est la valeur limite trouvée ci-dessus par la relation de condition (3).

215. **Application numérique.** — (*a*) **Énoncé.** — Une série de poutres en bois de 6^m de longueur supportent, chacune, une charge totale uniformément répartie de 2400 k.

L'une d'elles, la poutre A, supporte en outre, à $1^m,20$ du mur d'appui, une surcharge de 800 k.; une autre, B, supporte la même surcharge de 800 k., à $2^m,40$ du mur.

Les poutres auront toutes la même hauteur $b = 0^m,65$. On demande de calculer : 1° l'épaisseur a des poutres courantes; 2° les épaisseurs a' et a'' des deux poutres surchargées A et B.

On adoptera 600000 k. pour résistance de sécurité du bois, par mètre carré

(*b*) **Poutres courantes.** — Nous avons :

$$P = 2400^k, \qquad l = 6^m,00, \qquad M_{max} = \frac{Pl}{8} = 1800^{km}.$$

L'équation d'équarrissage donne :

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R} = \frac{1800}{600000} = 0,0300 = \frac{ab^2}{6};$$

il vient, en faisant :

$$b = 0,65 \qquad \text{et} \qquad b^2 = 0,4225,$$

$$a = \frac{0,18}{0,4225} = 0^m,426.$$

(*c*) **Poutre A.** — Cherchons d'abord lequel des deux coefficients de majoration δ ou δ', il faut adopter. Or, on a ici :

$$K = \frac{1,20}{3,00} = 0,40, \qquad m = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

$$Km = 0,133 : \frac{1}{1 + m} = \frac{24}{24 + 8} = 0,75.$$

On a donc $K < \frac{1}{1 + m}$ et c'est le maximum tangentiel qui convient.

Le coefficient de majoration est alors

$$\delta = (1 + Km)^2 = (1,138)^2 = 1,28.$$

Telle est la majoration à imposer au moment M dans la formule d'équarrissage et comme, d'après cette formule, la largeur a est proportionnelle à M lorsque b reste constant, ce qui est une des conditions imposées, il en résulte que l'on aura

$$a' = a \times 1,28 = 0,426 \times 1,26 = 0,537.$$

(*d*) **Poutre B.** — Pour cette poutre on a :

$$K = \frac{2,40}{3,00} = 0,80 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1 + m} = 0,75;$$

par conséquent c'est le maximum anguleux qui convient ; le coefficient de majoration est alors

$$\delta' = K(2 - K)(2m + 1),$$

$$K = 0,80, \qquad 2 - K = 1,20, \qquad 2m + 1 = 1,66,$$

$$\delta' = 1,60.$$

et par suite,

$$a'' = a \times 1,60 = 0,426 \times 1,60 = 0,681.$$

Les équarrissages des trois poutres sont donc :

$$b = 0,650 \begin{cases} a = 0,426 \\ a' = 0,537 = (0,426 \times 1,26) & \text{(A)} \\ a'' = 0,681 = (0,426 \times 1,60). & \text{(B)} \end{cases}$$

Il est évident que pour la dernière poutre B, la largeur est très grande ; on la formera par deux pièces accolées.

(*e*) **Solution par hauteurs variables.** — Il vaudrait peut-être mieux, pour l'aspect, si les circonstances le permettaient, adopter une largeur constante a et faire varier les hauteurs b, b' et b''. Or, celles-ci entrent au carré dans l'équation d'équarrissage; autrement dit, la hauteur b est proportionnelle à la racine carrée du moment maximum ; par conséquent, une fois trouvée la hauteur b des poutres courantes, il faudra, pour les poutres surchargées, la multiplier par $\sqrt{\delta}$ et $\sqrt{\delta'}$ qui sont

$$\sqrt{\delta} = 1,132, \qquad \sqrt{\delta'} = 1,26.$$

En adoptant la même poutre courante, cela donnera pour les poutres les équarrissages suivants :

$$a = 0,426 \begin{cases} b = 0,650 \\ b' = 0,735 = (0,65 \times 1,132) & \text{(A)} \\ b'' = 0,820 = (0,65 \times 1,260). & \text{(B)} \end{cases}$$

La poutre B serait bien haute et peut-être hors mesure.

Cherchons une autre solution ; prenons une largeur commune a, un peu plus grande ; 0,50 par exemple, au lieu de 0,422.

L'équation d'équarrissage donne comme ci-dessus :

$$\frac{ab^2}{6} = \frac{M}{R} = 0,03 ; \qquad \text{d'où}$$

$$b^2 = \frac{0,18}{0,50} = 0,36 \qquad \text{et} \qquad b = 0,60.$$

Dès lors, on aura

$$a = 0,50 \begin{cases} b = 0,60 \\ b' = 0,68 = (0,60 \times 1,132) & \text{(A)} \\ b'' = 0,76 = (0,60 \times 1,260), & \text{(B)} \end{cases}$$

à l'œil tout au moins, cette solution paraît plus satisfaisante.

216. — **Abaque résolvant le problème de la poutre surchargée.** — (*a*) **Sa construction.** — Posons $Km = x$, $\delta = y$ et $\delta' = y'$; dans ces conditions les coefficients de majoration δ et δ' auront pour expression

$$(1) \qquad y = (1 + x)^2,$$

$$(2) \qquad y' = (2x + K)(2 - K).$$

L'équation (1) représente une parabole dont le paramètre, c'est-à-dire la forme, est indépendant de K.

L'équation (2) représente, lorsque l'on fait varier K, une série de droites. On fera varier K par dixièmes, entre 0 et 1 et, en construisant cette parabole OB' ainsi que ces droites, on aura l'abaque ci-après (fig. 190).

Je dis que les droites représentées par l'équation (2) sont tangentes à la parabole.

En effet, cherchons les points d'intersection de l'une d'elles avec la parabole ; les abscisses des points d'intersection s'obtiendront en éliminant y entre les équations (1) et (2), ce qui donnera l'équation suivante en x :

$$(1 + x)^2 = (2x + K)(2 - K)$$

qui devient, en développant et en simplifiant :

$$x^2 + 2x(K - 1) + (K - 1)^2 = 0.$$

Le premier membre est le carré parfait $(x + K - 1)^2$; ce qui prouve que les deux racines x' et x'' sont égales entre elles et que l'on a :

$$x' = x'' = 1 - K.$$

Par conséquent, chaque droite coupe la parabole en deux points qui sont confondus en un seul, autrement dit, elle lui est tangente. C. Q. F. D.

Pour une valeur déterminée de K, par exemple $K = 0,7$, la ligne qui, par ses ordonnées, donnera le coefficient de majoration à adopter se composera donc : 1° de la parabole depuis l'origine O jusqu'au point $K = 0,7$ et 2° de la tangente à cette parabole, depuis ce point jusqu'à l'autre point 0,7 marqué sur le cadre à droite.

Dès lors la règle pour se servir de l'abaque est la suivante :

(*b*) **Règle.** — 1° Calculer le rapport $K = a : \frac{l}{2}$ qui fixe la position de la surcharge par rapport à la *demi-portée*, et adopter, comme représentative du coefficient de majoration, la parabole prise à partir de l'origine 0, mais continuée ensuite par celle de ses tangentes qui répond à ce rapport K.

2° Calculer le rapport $m = P' : P$ de la surcharge P' à la charge uniformément répartie P et faire le produit Km.

3° Prendre pour abscisse cette valeur Km et l'ordonnée correspondante de la représentative ci-dessus donnera le coefficient de majoration, c'est-à-dire le nombre par lequel il faudra multiplier le moment fléchissant maximum dû à la charge P pour tenir compte de la surcharge P'.

(*c*) **1re application.** — On a comme données :

$$l = 9^m, \quad \frac{l}{2} = 4,50, \qquad a = 2,80\ldots \qquad a : \frac{l}{2} = \underline{K = 0,62}$$

$$P = 2500^k. \qquad P' = 800. \qquad m = \frac{P'}{P} = 0,32. \qquad \underline{Km = 0,21}.$$

L'abscisse $Km = 0,21$ nous donne le point n sur l'axe des x ; son ordonnée est à prendre jusqu'en n' sur la parabole, puisque le point n' est avant le point de la parabole répondant à la tangente $K = 0,62$.

En mesurant nn', on a pour le coefficient de majoration

$$\delta = nn' = 1,45.$$

POUTRE SURCHARGÉE

ABAQUE N° 1, servant pour les **Poutres surchargées**, et faisant connaître, à vue, le coefficient de majoration à appliquer au moment maximum de la même poutre uniformément chargée.

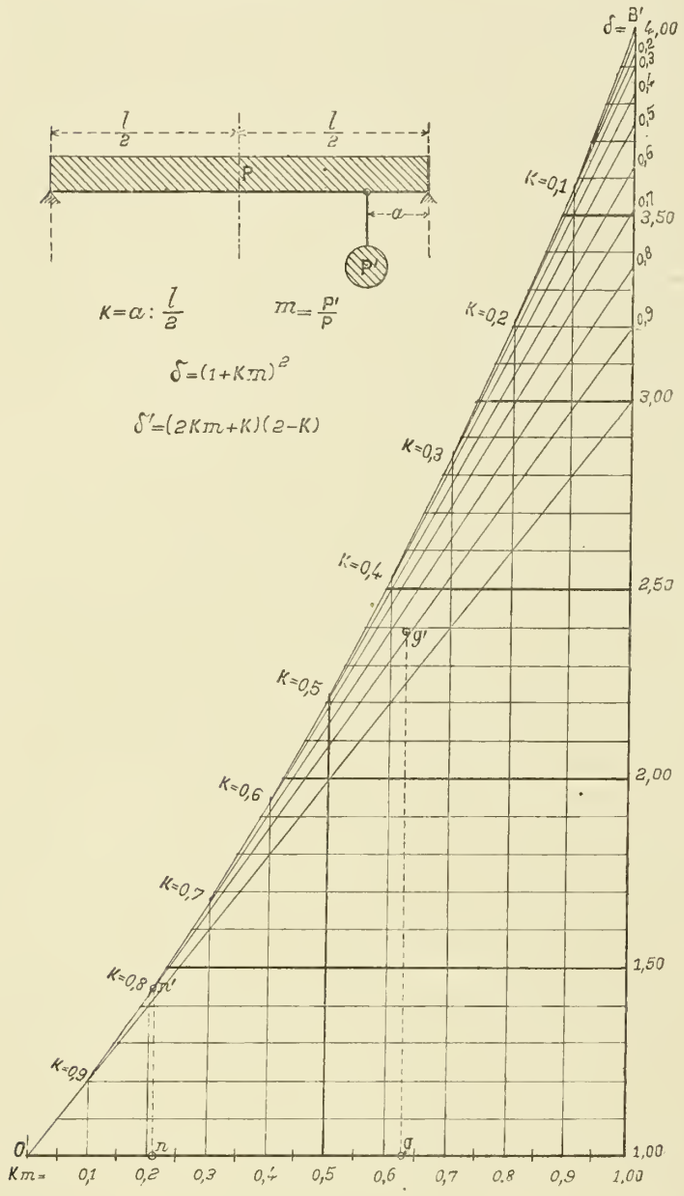


Fig. 190

(*d*) **2e application.** — On a comme données :

$l = 9.$ $\quad \frac{l}{2} = 4{,}50.$ $\quad a = 4{,}00.$ $\quad a : \frac{l}{2} = \underline{K = 0{,}88}$

$P = 2500^k.$ $\quad P' = 1800.$ $\quad m = \frac{P'}{P} = 0{,}72.$ $\quad \underline{Km = 0{,}63}.$

L'abscisse $Km = 0{,}63$ donne le point g sur l'axe des x; son ordonnée est à prendre jusqu'au point g' qui est situé entre les deux tangentes qui sont marquées : $K = 0{,}8$ et $K = 0{,}9$, et qui répondront sensiblement à $K = 0{,}88$. On a : pour le coefficient de majoration à adopter,

$$\delta' = gg' = 2{,}39.$$

(*e*) **Remarque pratique.** -- Cet abaque montre que les tangentes ne s'écartent notablement de la parabole que pour les valeurs de K les plus grandes, telles que $K = 0{,}9$, $K = 0{,}8....$, ce qui veut dire, alors, que la surcharge est placée très près du milieu de la poutre. Si de plus le produit Km est grand, ce qui exige que le rapport m de la surcharge à la charge soit grand lui aussi, alors on sera dans les conditions de la 2e application et il y aura véritablement lieu, au point de vue de l'économie, de tenir compte de ces tangentes, c'est-à-dire, en somme, d'appliquer le second coefficient de majoration δ'.

S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si K aussi bien que m ont de faibles valeurs, on peut, sans grande erreur, se servir toujours de la parabole, c'est-à-dire appliquer le premier coefficient de majoration

$$\delta = (1 + Km)^2.$$

En opérant ainsi on sera conduit à donner aux pièces des dimensions un peu trop fortes, ce qui fournira un surcroît de sécurité.

C'est ce que nous ferons, en général, dans les planchers en bois, lorsque nous calculerons les solives qui recevront des surcharges par le fait, soit de chevêtres, soit de linçoirs, soit même de cloisons légères; nous y serons autorisés parce que ces surcharges seront ordinairement placées assez près des murs d'appui.

CHAPITRE III

PLANCHERS EN BOIS

1re SECTION

PLANCHERS A TRAVURES SIMPLES

§ 1. — CONSTRUCTION DES PLANCHERS EN BOIS ET CHARGES QU'ILS SUPPORTENT

217. — **Définitions et classifications.** — L'élément de résistance de tout plancher, qu'il soit en bois ou en fer, est *la solive.*

Si les solives reposent directement sur les murs (fig. 191), on dit que le plancher est à *travures simples*; on les construit ainsi lorsque la portée, ou espace à franchir, est faible.

Si les solives reposent sur des pièces plus fortes, nommées *poutres*, tandis que ces dernières s'appuient sur les parties les plus solides des murs d'appui, on dit alors que le plancher est à *travures composées* (v. plus loin fig. 203). Dans un cas comme dans l'autre, l'ensemble des solives constitue le *solivage :* on a un *solivage parallèle* lorsque (fig. 191) les solives sont toutes parallèles entre elles et, en général, de même équarrissage; on a un *solivage enchevêtré* lorsque (fig. 200), elles sont dirigées dans différents sens et lorsque certaines d'entre elles sont supportées par les autres.

218. **Composition d'un plancher.** — (*a*) **Solives.** — Avant de commencer l'étude des planchers, nous allons indiquer sommairement comment on les construit ordinairement.

Soient M et M′ (fig. 191) les deux murs qui limitent l'espace à couvrir; on pose de l'un à l'autre des pièces de bois nommées *solives* dont l'*écartement* δ d'axe en axe est variable, mais ne dépasse pas généralement $0^m,50$. Cet écartement dépend d'ailleurs, ainsi que nous le verrons, du poids à porter et de l'équarrisage des pièces de bois employées. Les solives sont plus longues que l'intervalle l qui sépare les deux murs et elles reposent sur ceux-ci par une portion mn de leur longueur qui varie entre 1/10 et 1/20 de la portée l; cette longueur mn ne doit cependant jamais descendre au-dessous de $0^m,20$. Ainsi les solives sont encastrées dans les murs; mais lorsque l'on détermine leurs dimensions par le calcul, on les considère toujours comme simplement posées à leurs extrémités.

(*b*) **Augets et entrevous.** — Les solives étant posées, on cloue au-dessous d'elles un *lattis* de $0^m,01$ à $0^m,015$ d'épais-

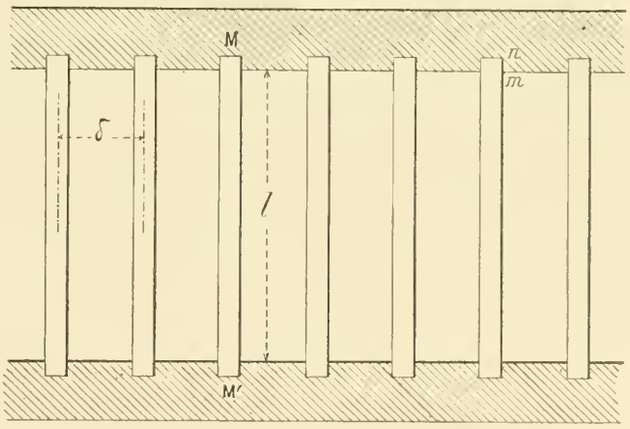


Fig. 191

seur, puis après avoir planté dans la solive de grands clous nommés *rappointis*, on construit l'*auget* (fig. 192).

L'auget est une maçonnerie faite de plâtre et de plâtras bien blancs, placée entre les solives; il est limité à la partie inférieure par le lattis et à la partie supérieure par une surface courbe en forme d'auge; ce qui lui a valu son nom.

On nomme *entrevous*, l'espace compris entre les faces de deux solives consécutives. La largeur de l'entrevous ne doit

guère descendre au-dessous de $0^m,17$ ou de $0^m,20$, sous peine de ne plus pouvoir exécuter facilement les augets; elle ne doit pas être supérieure à 0,40, sous peine de voir les rappointis être insuffisants pour maintenir les augets.

L'épaisseur minima de l'auget ne doit guère être inférieure à $0^m,04$.

Au-dessous du lattis on exécute l'enduit du plafond ayant de $0^m,015$ à $0^m,02$ d'épaisseur.

(*c*) **Lambourdes et bardeaux.** — La partie du plancher qui est placée au-dessus des solives est constituée de la manière suivante : sur les solives et perpendiculairement à leur direction on place des *lambourdes*, pièces de bois de

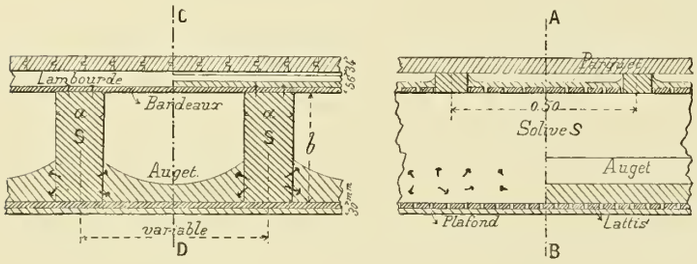


Fig. 192

$0^m,08$ sur $0^m,056$ d'équarrissage, posées à plat, à 0,50 de distance d'axe en axe et destinées à recevoir le parquet. L'intervalle entre les lambourdes est garni de petites pièces de bois clouées sur les solives et qu'on nomme *bardeaux*.

Au-dessus des bardeaux on exécute un enduit en plâtre d'environ 0,04 d'épaisseur relevé en *solins* sur les faces latérales des lambourdes.

(*d*) **Parquet.** — Enfin au-dessus des lambourdes, que l'on a soin de poser bien de niveau, on place le parquet formé de frises de sapin ou de chêne de $0^m,027$ à $0^m,034$ d'épaisseur, assemblées à rainures et languettes.

(*e*) **Epaisseur totale d'un plancher en bois.** — Les lambourdes (0,056), le parquet (0,027 ou 0,034), le lattis et l'enduit du plafond (0,030) donnent, ensemble, une épaisseur de 0,113 ou 0,120 qui sera la *constante d'épaisseur* et qui sera toujours la même ; la seule variable sera la hauteur b de la solive ; de sorte que l'épaisseur totale h du plancher sera :

$$h = b + \begin{cases} 0,113 \\ \text{ou} \\ 0,120. \end{cases}$$

219. **Charges d'un plancher.** — (*a*) **Eléments de la charge totale.** — Lorsqu'un plancher est construit suivant un type déterminé le poids de ses différentes parties, sauf les solives, est constant par mètre carré, tandis que celui des solives augmente avec leur portée ; toutes ces charges réunies constituent ce qu'on appelle le *poids propre* ou *poids mort* du plancher. Mais on doit aussi considérer la *charge utile*, c'est-à-dire la *surcharge* qui variera avec la destination des locaux et qui proviendra du poids des meubles ou des personnes, s'il s'agit de maisons d'habitation, du poids des marchandises, s'il s'agit de magasins, d'entrepôts, de greniers, etc.

Le *poids total* d'un plancher s'obtiendra en additionnant le poids propre et la surcharge.

Il importerait de connaître, par avance, quels seront, à peu près, les poids propres dans les différents cas qui pourront se présenter, ainsi que la surcharge à adopter.

Or, on connaît la surcharge, puisque celle-ci est une conséquence de l'usage en vue duquel la construction est faite ; mais il n'en est pas de même du poids propre puisque, dans ce dernier poids, les solives entrent pour une part importante, et que celles-ci n'auront leur équarrissage connu qu'une fois terminé le calcul des résistances. Il semble donc que l'on soit dans un cercle vicieux. Pour en sortir on remarquera que les éléments du poids propre sont :

1° Le *garnissage* (parquet, aire supérieure, augets et plafond), dont le poids est à très-peu près toujours le même (200^k par mètre carré).

2° Le *solivage*, dont le poids variable avec la portée, est inconnu tout en étant, évidemment, une fonction de cette portée l et de la surcharge. A défaut d'une formule algébrique qui ferait connaître rigoureusement cette fonction, c'est-à-dire le poids du solivage, on admet que ce poids est proportionné à la portée l et qu'il est réglé par un coefficient, 8^k, 12^k, 17^k (voir plus loin le tableau), qui dépend de l'importance de la surcharge. Ce n'est qu'une approximation grossière, mais cela permet de faire un premier calcul de résistance duquel on déduit des équarrissages de solives et, par suite, un poids pour le solivage. Si ce poids s'écarte très peu de celui que l'on avait admis pour commencer, on s'en tient là ; sinon on refait un nouveau calcul avec le poids de solivage qui vient d'être obtenu.

(*b*) **Poids moyens pour un premier calcul.** — Nous avons réuni dans le tableau ci-dessous les nombres généralement adoptés pour ces différentes charges, nombres qui permettent d'établir les données d'un premier calcul ou *avant-projet*.

Néanmoins, pour un projet sérieux, on devra calculer directement la charge totale d'après la destination particulière de l'édifice.

A. Poids propre d'un plancher en bois (par mètre carré).

Garnissage.. (à peu près invariable).	Parquet...	en sapin..	de 0,027.	16^k
			de 0,034.	20
		en chêne.	de 0,027.	24
			de 0,034.	30
	Aire supérieure	*Lambourdes* en chêne de 0,08×0,056 espacées de 0,50.		8^k
		Aire en plâtre de 0,04 d'épaisseur compris *bardeaux et solins* des lambourdes		75^k
				83
	Plafond...	*Augets* en plâtre de 0,05 d'épaisseur moyenne.....		45^k
		Plafond compris lattis et enduit de 0,03 d'épaisseur totale		42^k
				87
				200^k

Solivage... (variable avec la surcharge et la portée).	*Pour surcharge ordinaire* (de 100 à 300^k).....	Sapin.	$8^k,30 \times l$
		Chêne	$12^k,00 \times l$
	Pour surcharge forte (de 300 à 600^k).....	Sapin.	$12^k,00 \times l$
		Chêne	$17^k,00 \times l$

(l *étant la portée des solives exprimée en mètres*).

Nous étudierons plus loin (v. 2e section) les planchers qui sont composés de poutres, indépendamment des solives et du garnissage dont nous venons de parler. Nous pouvons cependant compléter, dès maintenant, le tableau ci-dessus en indiquant quels sont les poids généralement adoptés pour ces poutres dans les avant-projets.

B. Poids propre d'un poutrage en bois.

Surcharges moyennes.....	Sapin :	$3^k,0 \times \frac{L^2}{E}$,
	Chêne :	$4^k,4 \times \frac{L^2}{E}$.
Surcharges fortes.....	Sapin :	$2^k,2 \times \frac{L^2}{\sqrt{E}}$,
	Chêne :	$3^k,2 \times \frac{L^2}{\sqrt{E}}$.

Dans ces dernières formules L désigne la portée des poutres, E leur écartement.

C. Surcharges ordinaires des planchers (bois ou fer).

Bâtiments d'habitation.....	Étages sous combles....	75 à 100^k
	Chambres à coucher. ..	
	Petits salons.....	
	Grands salons.....	200^k
	Salles de réunion ordinaires....	
	Hôpitaux....	
	Casernes..... ..	250^k
	Grandes salles de réunion.....	300^k
	Salles de bal..... ..	
Magasins	A blé (*placé en tas*)	450 à 600^k
	A blé (*sacs entassés jusqu'à 6m de hauteur*	1082^k

(*c*) **Exemple.** — Trouver, pour un avant-projet, quelle sera la charge totale d'un plancher de $5^m,50$ de portée destiné à une salle de réunion ordinaire.

En consultant les tableaux précédents, on trouve :

Parquet en chêne de 0,034 d'épaisseur et garnissage.	200^k
Solivage en chêne 5,50 × 12..	66
Surcharge	200
Total...	466^k

(*d*) **Charges totales moyennes.** — Dans la pratique des constructions, c'est-à-dire lorsque l'on ne se trouve pas en présence d'un cas tout à fait spécial, comme celui où l'on aurait à construire une usine, des docks ou des entrepôts, on peut adopter pour la *charge totale* (poids propre et surcharge réunis) les chiffres suivants :

D. Charges totales usuelles des planchers en bois.

Maisons ordinaires.....	Q = 350 à 400^k.
Grandes maisons	Q′ = 400 à 500^k.
Edifices publics..... ..	Q″ = 500 à 600^k.

§ 2. — Calcul des solives

220. **Indétermination du problème.** — Supposons que l'on connaisse la charge totale Q que devra supporter le plancher; cette donnée ne suffira pas pour déterminer les trois autres inconnues qui sont : 1° les dimensions des solives et 2° leur écartement ; il y aura indétermination. Aussi en profiterons-nous pour choisir, à notre gré, deux des trois inconnues en nous basant soit sur des considérations d'économie, soit sur des considérations d'aspect, etc. : alors les autres quantités pourront être déterminées.

Si nous nous donnons la hauteur et la largeur des solives,

nous en déduirons leur écartement; si nous prenons arbitrairement l'écartement des solives et leur hauteur, alors ce sera la largeur que nous aurons à calculer.

221. **Résistance d'une solive. — Formules dites « de la solive ».** — Les solives résisteront aux charges de la même manière que les poutres que nous avons étudiées jusqu'ici.

Charge concentrée au milieu. — Soient : P la charge totale, supposée concentrée au milieu.

l la portée de la solive.

a la largeur, b la hauteur de la section droite supposée rectangulaire.

$R = 600000^k$ la résistance de sécurité.

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}.$$

Nous savons que lorsqu'une charge concentrée P agit au milieu de la portée l, le moment fléchissant maximum a pour valeur

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}.$$

Dès lors l'équation d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

appliquée à la solive que nous étudions s'écrira, en faisant $R = 600000^k$:

$$\frac{Pl}{4 \times 600000} = \frac{ab^2}{6}$$

d'où l'on tire en simplifiant

$$(1) \qquad P = 400000\,\frac{ab^2}{l}.$$

Charge uniformément répartie. — Si la charge P est uniformément répartie au lieu d'être concentrée, le moment maximum est réduit de moitié et la formule d'équarrissage conduit à la valeur suivante

$$(2) \qquad P' = 800000\,\frac{ab^2}{l}.$$

Telles sont en (1) et (2) les formules dites « *de la solive* ».

Dans ces formules (1) et (2) les dimensions de la solive sont exprimées en mètres, et la charge P, en kilogrammes.

222. **Formule simplifiée et abaque correspondant.** — (*a*) **Formules.** — Si, pour simplifier, on prend une portée égale à l'unité ($l = 1^m,00$) les formules (1) et (2) deviennent

$$(1') \qquad P = 400000\,ab^2 \qquad \text{et}$$
$$(2') \qquad P' = 800000\,ab^2$$

et la charge que pourrait supporter une solive ayant l mètres de portée serait la $1/l^2$ partie de la valeur de P ou de P′ déduites de l'expression.

Mais ces expressions peuvent encore être simplifiées.

Exprimons en effet a et b en centimètres ; le produit ab^2 sera 1 million de fois plus grand ($100 \times 100^2 = 1000000$) qu'en écrivant ces dimensions en mètres, de sorte que pour conserver l'égalité dans les formules (1′) et (2′) il faudra diviser par 1000000 le coefficient de ab^2 lorsque l'on prendra comme unité le centimètre pour exprimer l'équarrissage de la solive.

Les formules deviendront alors

$$\left.\begin{array}{ll}(1'') & P = 0{,}4ab^2 \\ (2'') & P' = 0{,}8ab^2\end{array}\right\} \quad a \text{ et } b \text{ étant exprimés en centimètres.}$$

Pour une pièce de portée l le poids P ou P′ serait l fois plus petit.

On peut même ne conserver que l'équation (1″) en remarquant que la charge P doit être doublée lorsqu'au lieu d'être concentrée au milieu de la portée, elle est uniformément répartie sur toute sa longueur.

Afin de faciliter l'emploi de la formule (1″) surtout sur le chantier, et pour supprimer les calculs, nous l'avons traduite en tableau graphique ou *abaque* (fig. 193).

(*b*) **Abaque.** — On a pris pour abscisses les largeurs a (exprimées en centimètres) des poutres ou des solives, et pour ordonnées les charges P qu'elles peuvent supporter, *en leur milieu*, lorsque ces poutres ont $1^m,00$ de portée; enfin, les lignes obliques, qui sont cotées à droite, représentent la hauteur b (également en centimètres) de la section transversale de la poutre. Ce tableau a été dressé en prenant pour résistance de sécurité $R = 600000^k$. Dans le cas où l'on adopterait une valeur différente R′ on devrait modifier la charge P dans le rapport R′ : 600000.

1re Application. — Quel est le poids total, uniformément réparti, que pourrait supporter une poutre de $2^m,75$ de portée et de $0{,}12 \times 0{,}22$ d'équarrissage posée de champ ?

En appliquant la formule (1″) dans laquelle on remplace a par 12 et b par 22, puisque l'équarrissage doit être exprimé en centimètres, on trouve :

$$P = 400000ab^2 = 400000 \times 12 + 22^2 = 2323^k.$$

Mais, puisque la charge est uniformément répartie, P devra être doublé; d'un autre côté la portée étant $2^m,75$ le poids que pourra supporter la poutre sera

$$P = \frac{2 \times 2323}{2{,}75} = 1790^k.$$

Pour se servir de l'abaque on opère comme suit :

1° Sur l'axe des x, on prend l'abscisse répondant à la largeur : $a = 12$.

2° Sur la verticale correspondante on remonte jusqu'à la ligne oblique cotée 22, répondant à la hauteur.

3° On mesure l'ordonnée correspondante. Dans le cas actuel on trouve avec l'abaque un peu plus de 2300.

La formule avait donné 2323; l'incertitude que laisse

subsister l'abaque est donc tout à fait insignifiante et représente à peine 1 ou 1/2 pour cent.

ABAQUE N° 2

servant à calculer la

Résistance d'une solive en bois de 1m de portée.

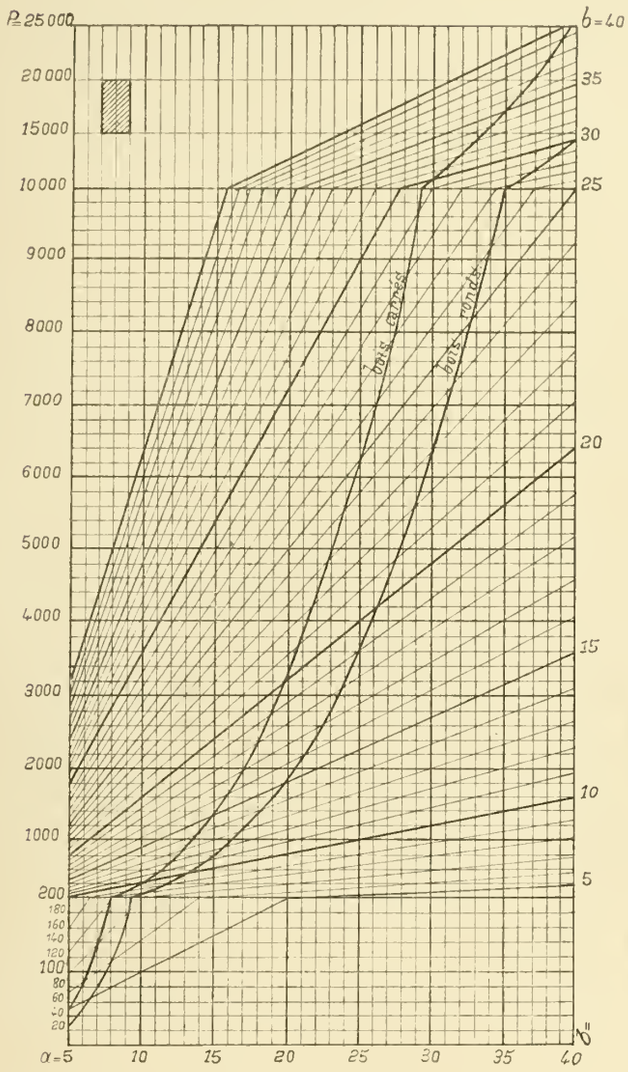


Fig. 193

Formule : $P = 0{,}4ab^2$.

P charge concentrée au milieu... Evaluée en kilogrammes.
a, b. Equarrissage..... Evalués en centimètres.
R. Résistance de sécurité... ... 600000k par mètre carré.

Nota. — Pour les solives à équarrissage normal $(b = a\sqrt{2})$ doubler les charges P fournies pour les bois carrés $(b = a)$.

(*d*) **2e Application.** — Le plancher d'une salle de réunion de 5m,00 de largeur et de 7m,00 de longueur doit comprendre 16 solives parallèles pour toute la longueur. L'épaisseur du plancher, compris plafond, lambourdes et parquet ne devra pas dépasser 0m,38; on demande quelle sera la largeur, a, des solives. On prendra comme charge totale par mètre carré $Q = 500^k$.

Puisqu'il y a 16 solives, leur écartement d'axe en axe est

$$\delta = \frac{7{,}00}{17} = 0{,}412;$$

chaque solive supportera donc une charge uniformément répartie qui sera

$$P = 500^k \times 5{,}00 \times 0{,}412 = 1030^k.$$

En vertu de la remarque faite plus haut (v. n° 221) une solive de même équarrissage que celles qui nous occupent, mais dont la portée serait seulement 1m, pourrait supporter en son milieu une charge P′ concentrée qui serait d'abord moitié moindre, puisque la charge serait concentrée et ensuite 5 fois plus grande, puisque la portée serait 5 fois plus petite; on aurait donc :

$$P' = \frac{5 \times 1030}{2} = 2575^k.$$

Cette valeur P′ nous permet de trouver l'équarrissage à donner à la solive dont la hauteur nous est fixée.

En effet, la hauteur totale du plancher doit être de 0m,38. Si de cette hauteur on déduit la constante d'épaisseur, savoir :

Plafond et enduit.....	0,030	0,113,
Parquet.....	0,027	
Lambourdes.....	0,056	

soit, au total, en arrondissant : 0,110,
il reste pour la hauteur des solives

$$b = 0{,}38 - 0{,}11 = 0{,}27 \text{ (27 centimètres).}$$

Appliquons alors la formule simplifiée (1″) dans laquelle nous ferons $P = 2575$ et $b = 27$ et il viendra

$$2575 = 0{,}4 \times a \times \overline{27}^2,$$

d'où en effectuant

$a = 8^{cm},8$, soit 9^{cm} en arrondissant.

Pour se servir de l'abaque on opère comme suit :

On y entre par la valeur de b ; on prend donc la ligne oblique cotée 27, et on la suit jusqu'à ce que l'on rencontre une ordonnée ayant pour valeur $P = 2575^k$; on descend alors sur cette ordonnée jusqu'à l'axe des x et on lit sur cet axe l'épaisseur a, qui ici est un peu inférieure à 9cm.

De cette valeur de $a = 0{,}09$ on déduit la largeur d'entrevous, c'est-à-dire du vide compris entre les solives, qui est :

$$0{,}412 - 0{,}09 = 0{,}322.$$

223. **Solives en bois non équarris.** — (*a*) **Formule pour les bois ronds.** — Il arrive souvent, dans les constructions provisoires, que l'on emploie, comme poutres, des bois en grume, c'est-à-dire à section sensiblement circulaire ou des bois dont la section transversale est intermédiaire entre le carré et le cercle.

La résistance de ces dernières pièces à la flexion est alors comprise entre les résistances que donneraient la section rectangulaire et la section circulaire.

Afin d'arriver rapidement, sur le chantier, à la connaissance du poids que peut supporter une pièce de bois en grume, nous avons représenté sur la fig. 193, la courbe résultant de l'application de la formule d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

dans laquelle nous avons remplacé M par sa valeur $\frac{P}{4}$ correspondant à une charge P concentrée au milieu de la portée égale à $1^m,00$; R par 600000 et $\frac{I}{v}$ par $\frac{\pi D^3}{32}$; cette dernière expression étant le moment de résistance du cercle.

La formule d'équarrissage devient alors

$$\frac{P}{4 \times 600000} = \frac{\pi D^3}{32}$$

ou bien en simplifiant et *en exprimant* D *en centimètres et* P *en kilogrammes*

(3) $$P = 0,236\, D^3 \quad (\text{pour } l = 1^m).$$

Cette équation est celle de la parabole du 3e degré que nous avons représentée (fig. 193) ; les abscisses indiquent les diamètres, les ordonnées correspondantes donnent les poids (concentrés au milieu) qu'une poutre de $1^m,00$ de portée, à section circulaire, peut admettre avec sécurité en son milieu.

(*b*) **1re Application.** — Quel est le poids total uniformément réparti que peut supporter une pièce de bois en grume de $3^m,85$ de portée et de 0,25 de diamètre ?

En consultant l'abaque n° 2 on trouve qu'une poutre de 0,25 de diamètre et de $1^m,00$ de portée peut recevoir en son milieu une charge de 3700^k. Par conséquent, une poutre de $3^m,85$ de portée pourra admettre une charge uniformément répartie

$$P = \frac{2 \times 3700}{3,85} = 1922^k.$$

En appliquant la formule (3) on aurait trouvé

$$P = 1914^k.$$

(*c*) **2e Application.** — Une pièce de bois en grume de 3^m de portée, entre appuis, doit supporter, en son milieu, un poids de 2000^k.

Quel doit être son diamètre D ?

La même poutre, si elle n'avait que $1^m,00$ de portée, pourrait recevoir une charge $P = 3 \times 2000 = 6000^k$.

En consultant l'abaque n° 2, on voit que l'ordonnée 6000^k correspond à un point de la parabole dont l'abscisse est

$$D = 29^{cm},5.$$

L'application de la formule (3) nous aurait donné :

$$D = 29^{cm},4.$$

224. **Solives à équarrissage modulé.** — (*a*) **Définition.** — La section circulaire n'est qu'un cas particulier de *l'équarrissage modulé*, c'est-à-dire dans lequel la section reste toujours semblable à une figure donnée prise comme module.

Tel est l'équarrissage *carré*, pour lequel on a :

$$b = a \qquad (\textit{équarrissage carré})$$

et l'équarrissage *normal*, dont nous étudierons plus loin les propriétés au point de vue de la résistance, et pour lequel on a :

$$b = a\sqrt{2} \qquad (\textit{équarrissage normal}).$$

(*b*) **Equarrissage carré.** — On aura

$$b = a, \qquad I = \frac{a^4}{12}; \qquad \frac{I}{v} = \frac{a^3}{6}.$$

En faisant dans la formule simplifiée (1″) $b = a$, on aura pour valeur de la charge P concentrée que supporterait une poutre carrée de 1^m de portée :

$$P = 0,4a^3.$$

(*c*) **Equarrissage normal.** — On a :

$$b = a\sqrt{2}, \qquad I = \frac{a^4\sqrt{3}}{6}, \qquad \frac{I}{v} = \frac{a^3}{3}.$$

En faisant dans la formule (1″), $b = a\sqrt{2}$, on a

$$P = 0,8a^3,$$

c'est-à-dire le double de la charge répondant à l'équarrissage carré.

A ces deux types d'équarrissage modulé répondraient, sur l'abaque, deux autres paraboles dont on se servirait comme de celle relative aux sections circulaires.

On n'a tracé que celle relative aux bois carrés. Pour l'équarrissage normal on doublera les charges données pour les bois carrés.

D'ailleurs, pour tous les équarrissages modulés, la charge P sera proportionnelle au cube de l'une des dimensions de la section.

(*d*) **Solives en bois imparfaitement équarris.** — Lorsque le bois dont est composée la poutre est imparfaitement équarri, la charge que peut supporter cette poutre est comprise entre celle correspondant à la section carrée parfaite et celle qui répond à la section circulaire ; on détermine alors le poids P par une interpolation.

§ 3. — Calcul d'un solivage parallèle

225. **Solution algébrique du problème.** — (*a*) **Formule dite** : *du solivage.* — Les données d'un solivage sont :

l... la portée des solives ;

δ... leur écartement d'axe en axe ;

Q la charge totale que supporte le plancher par mètre carré (v. n° 219).

Chaque solive devra résister à un poids total *uniformément réparti* :

$$P = Q \times l \times \delta.$$

Le moment fléchissant maximum dû à ce poids est

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{Q\delta l}{8}.$$

Soient a et b les dimensions transversales des solives, exprimées en mètre. Appliquons l'équation d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}$$

dans laquelle on fait $R = 6000\,000$, il vient

$$\frac{Q\delta l^2}{8 \times 600\,000} = \frac{ab^2}{6}$$

qui s'écrit en simplifiant :

(A) $$Q\delta l^2 = 800\,000\, ab^2.$$

Telle est la formule ou l'équation dite : *du solivage.*

(*b*) **Formule dite** : *du cubage.* — On a toujours intérêt à connaître rapidement le volume des bois qui entreront dans une construction afin d'en évaluer la dépense. Proposons-nous donc de trouver une formule qui nous fasse connaître le volume des solives par mètre carré de plancher.

Le volume d'un mètre linéaire de solive, correspond à une surface de plancher égale à δ : Ce volume est $v = ab$.

Le volume des solives par mètre carré est donc

(1) $$V = \frac{ab}{\delta};$$

de la formule du solivage (A), on tirera la valeur de $ab : \delta$ et en la substituant dans l'équation (1) il viendra :

(2) $$V = \frac{Ql^2}{800000b}.$$

Cette dernière valeur est celle du cube de solives exprimé en mètres cubes, pour chaque mètre carré de surface du plancher ; mais ce volume ne comprend pas les abouts des solives qui sont logés dans les murs d'appui.

Pour tenir compte de cet élément il suffit de remarquer que la longueur de la partie encastrée de la solive est d'environ 1/20 de sa longueur utile l, ce qui fait pour l'ensemble des deux extrémités $1/10l$; dès lors le cube du bois entrant dans les solives, par chaque mètre carré de surface utile de plancher, est, en mètres cubes,

(B) $$V = \frac{1.10\,Ql^2}{800000b}.$$

Telle est la formule ou équation du cubage (sous-entendu : des solivages parallèles).

Nota. — Il est à remarquer que dans cette expression du volume des bois, volume qui est proportionnel au prix de revient, la largeur a des solives n'entre pas, mais seulement leur hauteur b, et c'est au dénominateur. Il en résulte que l'on a tout avantage à faire les planchers aussi épais que possible.

(*c*) **Application.** — Reprenons les données de l'exemple choisi plus haut (v. n° 222-*d*) ; on avait :

$l = 5^m,00$, $\delta = 0,412$, $b = 0^m,27$, $Q = 500^k$.

La formule *du solivage*

$$Q\delta l^2 = 800000ab^2, \qquad \text{donnera}$$

$$a = \frac{500 \times 0,412 \times 5^2}{800000 \times 0,27^2} = 0^m,088$$

résultat déjà trouvé ci-dessus.

La formule du cubage donne, par mètre carré de plancher

$$V_1 = \frac{1,10 \times 500 \times 5^2}{800000 \times 0,27} = 0^{m3},0637.$$

Et pour la salle entière, dont la longueur totale est 7^m, et dont la superficie est par suite

$$S = 7 \times 5 = 35,$$

$$V = 0^{m3},0637 \times 35 = 2^{m3},23.$$

Si l'on fait le calcul en cubant directement chaque solive et en multipliant par 16, qui est le nombre des solives, on trouve

$$V' = 16 \times 0,09 \times 0,27 \times 5,00 \times 1,10 = 2^m,13.$$

Cette différence provient de ce que la formule du cubage ne tient pas compte de ce fait qu'il n'existe pas de solive sur les murs aux extrémités de la salle. Comme l'erreur ainsi commise est faible et qu'elle est en excès, cette formule (B) sera toujours utilement employée lorsque l'on voudra connaître, approximativement, le prix d'un plancher avant d'avoir calculé les dimensions des solives.

226. **Solution graphique du problème.** — (*a*) **Abaque n° 3.** — Tous les problèmes relatifs aux planchers reviennent, en somme, à la résolution des équations du solivage et du cubage dans lesquelles l'une quelconque des quantités qui y entrent est inconnue. La résolution graphique de ces équations permettra donc de répondre à toutes les questions relatives à l'établissement des planchers en bois ; cette résolution graphique est obtenue par l'emploi de l'abaque n° 3 (v. plus loin fig. 199) ainsi que nous allons le montrer par des exemples.

Nous croyons inutile d'indiquer comment cet abaque a été tracé ; on s'est inspiré, pour sa construction, des princi-

pes donnés par M. **Léon Lalanne**, inspecteur général des Ponts et chaussées.

(*b*) **1re Question.** — Construire un plancher de $6^m,00$ de portée, devant subir une charge totale $Q = 350^k$ par mètre carré, et dans lequel l'écartement d'axe en axe des solives δ sera égal à 2,50 de leur largeur a ($\delta : a = 2,5$) (1).

Hauteur b. — la hauteur b est donnée (fig. 194) par la courbe qui pour l'abscisse $\delta : a = 2,5$ possède la même ordonnée que le point d d'intersection de la droite oblique $l = 6^m00$ avec la verticale passant par $Q = 350$; donc : 1° prenons en d le point d'intersection de la droite $l = 6^m,00$

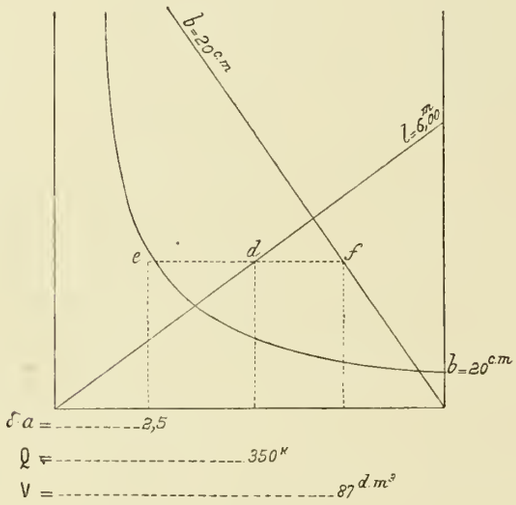


Fig. 194

avec la verticale répondant à $Q = 350^k$; 2° menons par d une horizontale jusqu'à l'ordonnée ayant pour abscisse $\delta : a = 2,5$; 3° le point e ainsi obtenu est très voisin de la courbe $b = 20^{cm}$. C'est donc $0^m,20$ qu'il faudra prendre pour hauteur de la solive.

Largeur a. — La largeur a sera prise à volonté ainsi que l'écartement δ puisqu'il suffit d'avoir $\delta : a = 2,5$; δ est en général compris entre $0^m,25$ et $0^m,50$. Prenons par exemple $\delta = 0,30$, il en résulte

$$a = \frac{\delta}{2,5} = \frac{0.30}{2,50} = 0,12.$$

Volume des solives par mètre carré de plancher. — Le volume des solives est indiqué, **en décimètres cubes**, par l'abscisse de la droite $b = 20^{cm}$ qui a la même ordonnée que les points d et e ci-dessus obtenus.

Le point de la droite $b = 20$ qui répond à cette condition est f dont l'abscisse est $V = 87^{dm3}$. Le volume des solives par mètre carré de plancher est donc $0^{m3},087$.

(*c*) **2e Question.** — Construire un plancher de 5,00 de portée, supportant une charge totale $Q = 500^k$ par mètre carré, sachant que l'on a à sa disposition des solives dont l'équarrissage est $22^c \times 12^c$.

Calcul de δ (écartement des solives). — La valeur de $\delta : a$ nous sera donnée (fig. 195) par l'abscisse du point de la

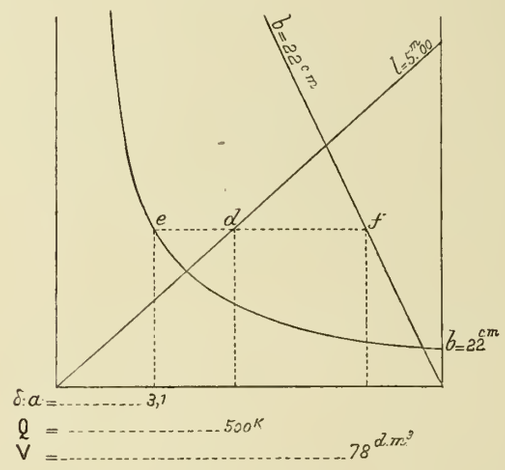


Fig. 195

courbe $b = 22$ dont l'ordonnée sera égale à celle du point d'intersection de la droite $l = 5,00$ avec la verticale $Q = 500^k$. Donc :

1° Prenons en d le point de la droite $l = 5^m,00$ dont l'abscisse $Q = 500^k$; 2° menons par ce point une horizontale jusqu'à sa rencontre en e avec la courbe $b = 22^{cm}$; 3° l'abscisse du point ainsi obtenu est $\delta : a = 3,10$ d'où l'on déduit pour $a = 12^{cm}$

$$\delta = 3,10 \times 12 = 37^{cm},2.$$

L'écartement d'axe en axe des solives ne devra donc pas dépasser $\delta = 0^m,37$.

Nous disons que δ ne devra pas dépasser $0^m,37$, parce qu'il n'est pas dit que la longueur de la salle permettra d'inscrire cet écartement un nombre exact de fois. On essaiera, avec le compas, de faire cette inscription exacte et, si l'on n'y réussit pas, on *réduira* l'écartement jusqu'à ce que l'on y parvienne.

Volume des solives. — Prolongeons l'horizontale du point d jusqu'à sa rencontre en f avec la droite $d = 22$; l'abscisse du point f donnera : $V = 78^{d3}$. Le cube des solives, *par mètre carré de plancher*, sera donc

$$V = 0^{m3},078.$$

(1) Certains usages locaux entraînent, souvent, à donner aux entrevous une largeur qui soit dans un rapport constant avec celle des solives. Au moyen-âge, on construisait souvent les planchers *tant plein que vide*, ce qui voulait dire que les entrevous (ou vides) étaient aussi larges que les solives (ou pleins) ; on avait alors $\delta : a = 2$.

Dans certaines localités on construit à *deux de vide pour un plein* ($\delta : a = 3$) ; l'exemple choisi répondrait à *un et demi de vide pour un plein*.

(*d*) 3e **Question.** — Construire un plancher de $5^m,50$ de portée devant porter une charge totale de 400^k par mètre carré ; l'espacement, d'axe en axe, des solives étant de $0^m,35$.

Nous pouvons ici choisir arbitrairement soit la largeur a de la solive, soit sa hauteur b.

Hauteur des solives. — Prenons d'abord $a = 0,15$; nous en déduisons

$$\frac{\delta}{a} = \frac{0,35}{0,15} = 2,333.....$$

le problème se trouve ramené à la résolution de la première question que nous avons déjà traitée ; on opérera comme suit :

1° Prenons en d (fig. 196) le point de la droite $l = 5^m,50$ dont l'abscisse est $Q = 400^k$.

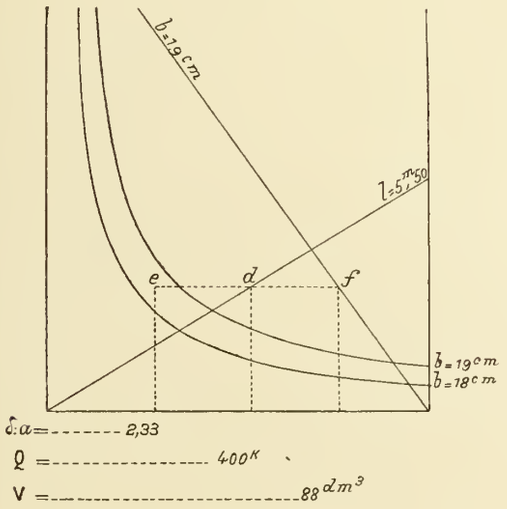


Fig. 196

2° Menons par d l'horizontale ed jusqu'à sa rencontre avec la verticale issue du point $\delta : a = 2,333$;

3° Le point e ainsi obtenu se trouve situé entre les deux courbes $b = 18^{cm}$ et $b = 19^{cm}$. Nous adopterons, en forçant, $b = 19^{cm}$. Les solives auront donc $15^{cm} \times 19^{cm}$ d'équarrissage.

Volume des bois. — Prolongeons ed jusqu'en f, point de sa rencontre avec la droite $b = 19^{cm}$; l'abscisse correspondante $V = 88$ nous fera connaître le volume des solives par mètre carré de plancher ; on aura donc

$$V = 0^{m3},088.$$

Autre hypothèse. — Si au lieu de prendre arbitrairement la largeur a, notre choix avait porté sur b, nous aurions procédé de la façon suivante :

Admettons pour hauteur de la solive $b = 0,22$; cela posé : nous menons (fig. 197) par le point d obtenu comme précédemment, à la rencontre de $l = 5,50$ et de $Q = 400$ une horizontale jusqu'à sa rencontre en e, avec la courbe $b = 22^{cm}$ et nous obtenons pour abscisse du point e

$$\frac{\delta}{a} = 3,25,$$

d'où nous déduisons :

$$a = \frac{\delta}{3,25} = 0,108 \quad \text{soit, en forçant, } 0,11.$$

Pour avoir le volume des solives, par mètre carré, pro-

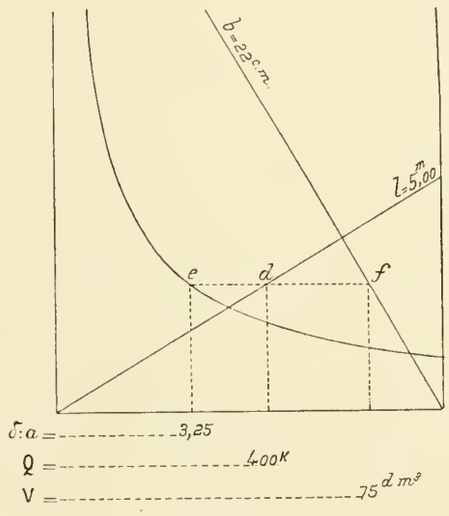


Fig. 197

longeons l'horizontale ed, jusqu'en f, à sa rencontre avec la droite $b = 22^{cm}$ et le volume cherché est exprimé par l'abscisse du point f ; on a ainsi

$$V = 0^{m3},075.$$

Cette valeur de V est plus petite que celle trouvée précédemment. Nous obtiendrions une valeur de V moindre encore si nous prenions b plus grand ; mais alors nous serions conduits à adopter pour a une valeur plus faible que celle que nous avons choisie ou trouvée. Des considérations diverses, telles que la commodité de construction, ou bien la hauteur totale qu'on ne devra pas dépasser, etc., serviront à déterminer celles des dimensions des solives qui restent au choix du constructeur.

(*e*) 4e **Question.** — Un plancher étant construit sur 4,50 de portée avec des solives en sapin de $22^{cm} \times 12^{cm}$, espacées d'axe en axe de $0^m,36$, trouver quelle charge totale, et quelle charge utile ou surcharge on peut lui faire supporter.

Charge totale. — Des données du problème on tire immédiatement

$$\frac{\delta}{a} = \frac{0,36}{0,12} = 3.$$

1° Cherchons le point d (fig. 198) de la courbe $b = 24^{cm}$ dont l'abscisse est $\delta : a = 3$; 2° menons, par ce point, une horizontale jusqu'à la rencontre avec la droite $l = 4^m,50$;

ABAQUE N° 3
servant à calculer un
Plancher en bois à solivage parallèle et donnant la

Résolution graphique des équations. $\begin{cases} \dfrac{ab^2}{\delta} = \dfrac{Ql^2}{800000} \text{ (solivage).} \\ V = \dfrac{1,10Ql^2}{800000b} \text{ (cubage).} \end{cases}$

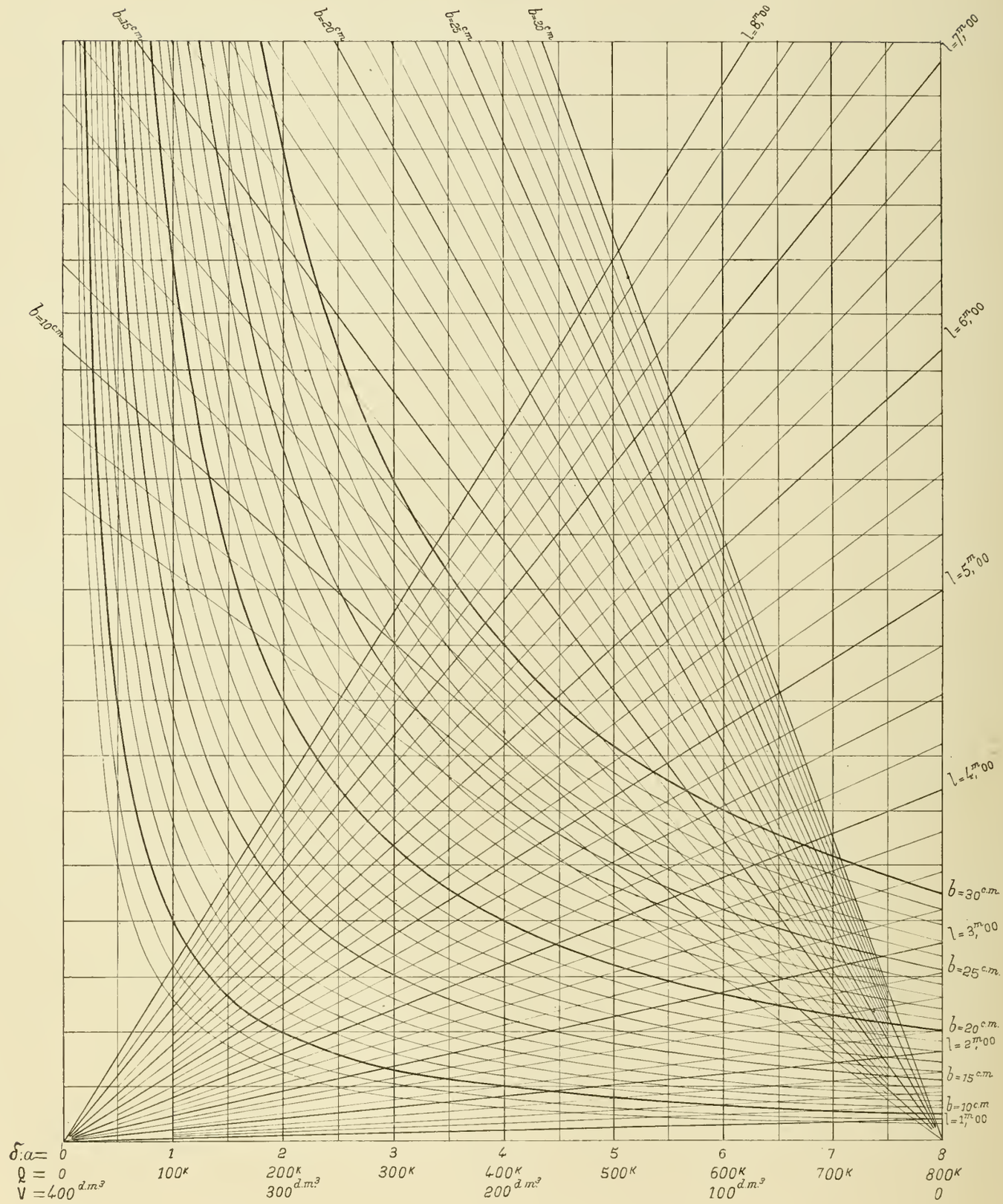


Fig. 199 L'usage de cet abaque est expliqué au n° 226.

3° le point e ainsi obtenu a pour abscisse $Q = 760^k$. Telle est la charge totale que peut supporter le plancher. En déduisant de ce poids celui du plancher proprement dit on obtiendra la charge utile.

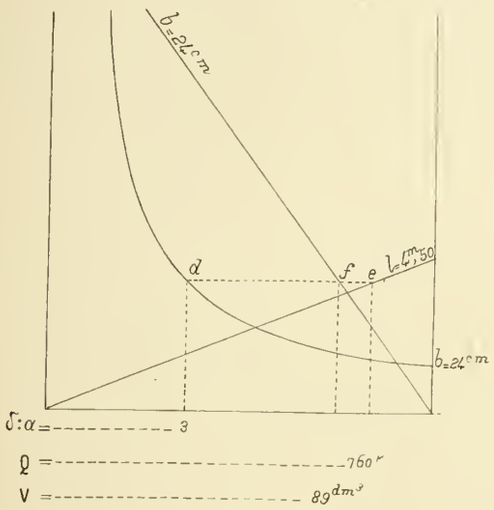


Fig. 198

Surcharge. — Or, le volume des solives, donné comme ci-dessus par le point f, est ici 0,089.

Le poids en est donc, en admettant 600^k pour poids spécifique du bois :

$0,089 \times 600^k$	$= 53^k,4$
Le poids du garnissage du plancher est	200,00
Soit un poids mort de	$253^k,4$

Il reste donc comme charge utile

$$760 - 253,4 = 506,6,$$

soit 500^k en nombre rond.

227. **Solivages en madriers.** — (*a*) **Formules spéciales aux madriers.** — Les madriers ont comme équarrissage $0,22 \times 0,08$. En substituant ces valeurs dans l'équation du solivage (v. n° 225-A), il vient :

$$\delta = \frac{800000 \times 0,08 \times \overline{0,22}^2}{Ql^2} = \frac{3097,6}{Ql^2}$$

Nous avons indiqué dans le tableau ci-après les résultats que l'on obtient pour δ, en donnant à Q les différentes valeurs de charge qui se présentent le plus ordinairement dans la pratique.

Il est clair qu'en faisant varier l'écartement des solives on peut faire varier aussi, en sens inverse, la charge qu'elles supportent.

Cependant il y a pour δ un minimum au-dessous duquel il ne faut pas descendre, car alors on ne pourrait plus exécuter les augets. Nous avons pris pour limite $\delta = 0,25$, ce qui répondrait à des entrevous de $0,25 - 0,08$, soit 0,17 ; c'est un minimum, et nous avons inscrit, dans la dernière colonne du tableau ci-dessous, les valeurs de l qui répondent à cette limite.

Valeurs de Q (charge totale)	Valeurs de $\delta = \frac{k}{l^2}$ — $k =$		Limite de l pour laquelle $\delta = 0,25$
350	8,85	$\times \frac{1}{l^2}$	$5^m,95$
400	7,74		5 ,57
450	6,88		5 ,25
500	6,20		4 ,98
550	5,63		4 ,75
600	5,16		4 ,55

(*b*) **Application.** — On veut soliver avec des madriers une salle de 4.30 de largeur sachant que la charge totale peut atteindre 400^k par mètre carré.

Le tableau ci-dessus nous donne

$$\delta = \frac{7,74}{(4,30)^2} = 0^m,418.$$

Tel est l'espacement moyen que l'on acceptera tout d'abord et à l'aide duquel on fera le projet de répartition des solives dans la pièce à construire.

Cet exemple est susceptible d'applications nombreuses. On trouve en effet dans différents pays des bois débités sous des équarrissages usuels qu'il y aura tout intérêt, au point de vue économique, à employer de préférence aux bois débités sur commande. Néanmoins pour une construction importante on devra faire débiter les solives suivant les équarrissages calculés.

(*c*) **Généralisation du problème.** — Ce problème n'est qu'un cas particulier de la 2e question traitée au numéro précédent ; par conséquent, l'abaque n° 3 permettra de résoudre toutes les questions de solivages à *équarrissage imposé par les bois du commerce.* Il est inutile d'insister.

§ 4. — Solivage enchevêtré

228. **Définitions.** — (*a*) **Linçoirs.** — En général un plancher en bois n'est pas uniquement formé de solives parallèles, allant d'un mur à l'autre ; il serait, en effet, dangereux de faire porter des solives au-dessus d'un linteau de porte ou de fenêtre.

Pour tourner la difficulté, on place, de chaque côté du linteau, des solives plus fortes que les autres AA (fig. 200) et qu'on appelle *solives d'enchevêtrure*, puis on les réunit par un *linçoir* B, très voisin du mur.

C'est sur ce linçoir que viendront s'appuyer les solives telles que *m* placées entre les solives d'enchevêtrure. On nomme *solives boiteuses* les solives telles que *m* ; elles sont

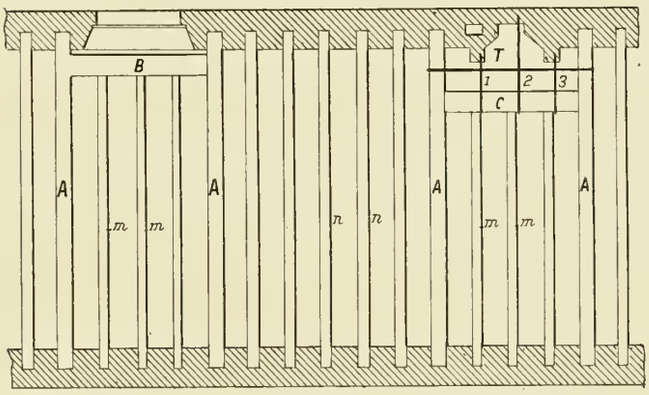


Fig. 200

plus courtes que les autres et elles s'appuient d'un côté sur le mur et de l'autre côté sur une pièce de bois, linçoir ou chevêtre.

De même, au-dessous des âtres de cheminée, afin d'éviter les incendies, les règlements de police prescrivent de ne pas employer de solive en bois. Pour s'y conformer on place de chaque côté de la cheminée une solive d'enchevêtrure AA et l'on réunit les solives par un linçoir C désigné dans ce cas spécial sous le nom de *chevêtre* ; c'est sur le chevêtre que reposent les solives boiteuses comprises entre les solives d'enchevêtrure. Le chevêtre et le mur sont réunis par des tiges de fer carré nommées bandes de trémie (fig. 201).

On nomme *trémie* cette sorte de cavité, dégarnie de bois et ne comportant que des pièces en fer, qui est située au-dessous de l'âtre et qui est comprise entre le mur, le chevêtre et les deux extrémités des solives d'enchevêtrure.

229. **Calcul d'une enchevêtrure.** — (*a*) **Données.** — Une enchevêtrure comprend : 1° les deux solives d'enchevêtrure ; 2° le chevêtre (ou le linçoir) ; 3° les solives boiteuses.

Lorsque l'on étudie les dispositions à donner aux pièces d'un solivage enchevêtré, on ne se préoccupe pas, d'abord, des enchevêtrures, et l'on cherche la largeur *a*, la hauteur *b* des solives ainsi que leurs intervalles δ comme si, constituant un solivage parallèle, elles devaient toutes reposer sur les

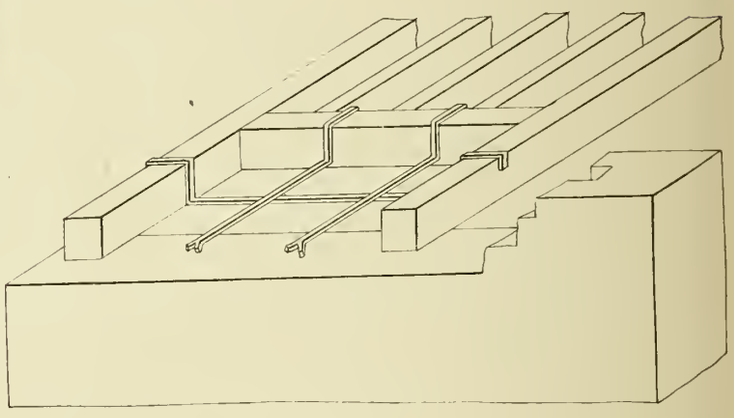


Fig. 201

deux murs de la pièce à couvrir. Ce seront les dimensions de ce que nous nommerons *les solives courantes.*

Puis, adoptant pour toutes les pièces de l'enchevêtrure la hauteur *b* trouvée pour les solives courantes, on détermine, comme nous allons l'indiquer, les largeurs qu'il convient de donner aux solives boiteuses, au chevêtre et aux solives d'enchevêtrure, c'est-à-dire, en somme, les coefficients de majoration ou de minoration à leur appliquer.

Le calcul du linçoir est d'ailleurs identique à celui du chevêtre.

Dans cette étude nous désignerons par

(*b*) la hauteur } des solives courantes (connues) ;
(*a*) la largeur }

δ l'écartement, d'axe en axe, des solives courantes (id.) ;

a' la largeur des solives boiteuses (inconnue) ;

e la largeur des solives d'enchevêtrure (inconnue) ;

c la largeur du chevêtre ou du linçoir (inconnue) ;

n le nombre d'espacements courants (*entrevous*) qui répond à la longueur du chevêtre ou du linçoir (connu) ;

l la portée du plancher (connue) ;

K le rapport suivant lequel le chevêtre, ou le linçoir, partage la demi-longueur $1/2l$ des solives d'enchevêtrure (connu) ;

K' le rapport de la longueur des solives boiteuses à celle des solives courantes (connu) ;

Q la charge totale par mètre carré de plancher (connu).

(*b*) **Calcul du solivage courant.** — Nous avons la formule (A) dite *du solivage* (ou son abaque) établie plus haut (v. n° 225-*a*) :

(A) $$Q\delta l^2 = 800000ab^2.$$

Elle nous permet de calculer une des trois quantités a, b ou δ, lorsque l'on se donne les deux autres.

Supposons donc connus les éléments a, b et δ du solivage courant.

(*c*) **Calcul du chevêtre ou du linçoir.** — Le chevêtre de longueur $l' = n\delta$ supporte :

1° La charge qui lui vient de la trémie ;

2° Celle qui lui vient des solives boiteuses; mais la trémie et les solives boiteuses transmettent la moitié de la charge qu'elles supportent aux murs de la salle ; elles développent donc sur le chevêtre un effort total égal à la moitié de la charge appliquée au rectangle de plancher compris entre les deux solives d'enchevêtrure. On aura donc en désignant par P″ la charge totale supportée par le chevêtre :

$$P'' = \frac{nl\delta Q}{2}.$$

D'ailleurs nous pourrons, avec assez d'approximation, supposer que ce poids P″ est uniformément réparti.

Dans ces conditions le chevêtre est dans la situation d'une poutre qui aurait une portée $l' = n\delta$, qui supporterait le poids ci-dessus P″; en lui appliquant la formule dite de la solive (v. n° 221), on obtient l'équation :

(B) $$\frac{nl^2\delta Q}{2} = 800000cb^2.$$

Rappelons que c est la largeur du rectangle d'équarrissage du *chevêtre* ou du *linçoir*.

Divisons membre à membre les formules (A) et (B), nous aurons

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{2},$$

d'où

(C) $$c = \frac{n}{2}a.$$

Telle est la *formule du chevêtre*.

(*c'*) **Exemple.** — Un chevêtre ou un linçoir supporte 3 solives boiteuses, quelle doit être sa largeur ?

Trois solives boiteuses représentent 4 entrevous; dès lors en faisant $n = 4$ dans la formule du chevêtre on en tire

$$c = 2a.$$

La largeur du chevêtre devra donc être double de celle des autres solives.

(*d*) **Calcul des solives boiteuses.** — La longueur de ces solives est

$$l'' = K'l$$

puisque K′ est le rapport de la longueur des solives boiteuses à celle des solives courantes. Comme l'intervalle, δ, qui les sépare d'axe en axe est le même que pour les solives courantes, la charge P‴ que supporte chaque solive boiteuse est donc

$$P''' = K'P.$$

Mais l'examen de la formule dite de la solive montre que b, δ et Q restant fixes, la largeur d'équarrissage, a, doit va-

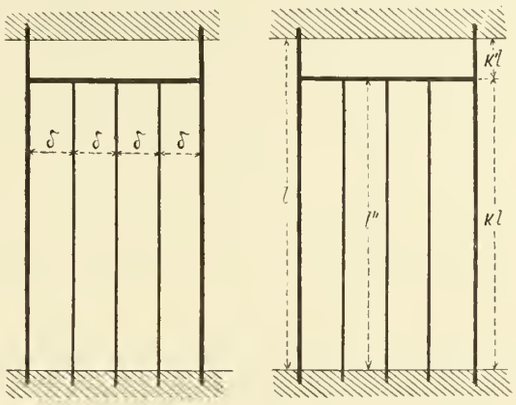


Fig. 202

rier comme le carré des longueurs; on aura donc pour largeur des solives boiteuses

(D) $$a' = K'^2 a \quad (\textit{formule des solives boiteuses}).$$

(*d'*) **Exemple.** — Dans un plancher dont la portée est $l = 6^m,00$, un chevêtre est placé à $0^m,80$ du mur ; quelle sera la largeur d'équarrissage, a', des solives boiteuses en fonction de celle des solives courantes ?

Le rapport K′ est ici

$$K' = \frac{6,00 - 0,80}{6,00} = 0,866,$$

d'où $K'^2 = 0,75$.

On aura donc

$$a' = 0,75a = 3/4a.$$

C'est en effet la proportion admise dans la pratique courante des travaux.

S'il s'agit d'un linçoir c'est différent; le linçoir étant placé très près du mur, le rapport K′, pour ses solives boiteuses, est très voisin de l'unité ; c'est pourquoi on donne ordinairement à ces solives la même largeur qu'aux solives courantes.

Nota. — Au lieu de diminuer l'équarrissage des solives boiteuses on obtient le même résultat en les espaçant davantage.

La formule de la solive montre que l'espacement δ varie en raison inverse du carré de la portée; par conséquent dans l'exemple précédent, si l'on donnait aux solives boiteuses le même équarrissage qu'aux solives courantes, leur écartement (δ') aurait dû être

$$\delta' = 4/3\,\delta.$$

En résumé, pour les constructions ordinaires de planchers, en ce qui regarde les solives boiteuses d'un chevêtre :

ou bien on garde l'écartement courant δ et on leur donne une largeur a' égale aux 3/4 de la largeur des solives courantes, ou bien on adopte le même équarrissage a et b et on adopte un écartement δ' qui est les 4/3 de l'écartement courant d'axe en axe, δ.

Pour les solives boiteuses d'un linçoir on garde toutes les dimensions a, b et δ du solivage courant.

(*e*) **Calcul d'une solive d'enchevêtrure.** — La détermination des dimensions d'une solive d'enchevêtrure revient à la résolution du problème, déjà traité, de la poutre surchargée (v. n°s 214, 215 et 216).

Dans le cas actuel le problème se pose comme suit.

La solive d'enchevêtrure, dont la longueur est l, reçoit une charge P uniformément répartie qui, de même que pour les solives courantes, est

$$P = Ql\delta.$$

En un point donné, qui partage sa *demi-longueur*, $1/2l$, dans un certain rapport K, elle reçoit le tenon et l'étrier du chevêtre, lesquels lui transmettent un poids concentré P′ qui a pour valeur le quart de tout le poids du rectangle de plancher compris entre les deux solives d'enchevêtrure; on a donc :

$$P' = 1/4\, Qn\delta l,$$

n étant le nombre d'entrevous répondant au chevêtre.

Dès lors appliquons la formule de majoration établie pour la poutre surchargée (v. n° 214-formule 5).

On fera dans cette formule :

$$m = \frac{P'}{P} = \frac{Qn\delta l}{4Ql\delta} = \frac{n}{4},$$

et l'on en déduira en appelant :

M′ le moment fléchissant maximum de la solive d'enchevêtrure et M celui de la solive courante

$$\frac{M'}{M} = (1 + km)^2, \qquad \text{et en faisant} \quad m = \frac{n}{4}$$

$$\frac{M'}{M} = \left(1 + \frac{kn}{4}\right)^2.$$

Nous nous imposons de garder partout la même hauteur d'équarrissage b; dès lors les largeurs, savoir : a pour la solive courante et e pour la solive d'enchevêtrure, doivent être proportionnelles aux moments fléchissants, ce qui nous donne

$$\text{(E)} \qquad e = a\left(1 + k\frac{n}{4}\right)^2.$$

Telle est la formule dite : *de la solive d'enchevêtrure.*

(*e′*) **Exemple.** — Une solive d'enchevêtrure de 6^m,00 de longueur reçoit à 0,80 du mur un chevêtre dont la longueur répond à 5 entrevous de solives boiteuses ; calculer la largeur à lui donner.

On a $\quad n = 5, \quad 1/2l = 3^m,00$

$$K = \frac{0,80}{3,00} = 0,2666$$

$$\frac{Kn}{4} = 0,3333.$$

Par conséquent

$$e = (1,3333)^2 = 1,78a.$$

On pourrait aussi, pour ce calcul, se servir de l'abaque n° 1, comme nous l'avons indiqué plus haut (v. n° 216-*d*).

(*f*) **Nota.** — Il ne faut pas oublier que la mortaise d'assemblage du chevêtre dans la solive affaiblit celle-ci en un point qui est, en général, assez voisin de la section dangereuse. Aussi devra-t-on réduire au minimum les dimensions du tenon et par suite celles de la mortaise et soutenir le chevêtre par des étriers en fer comme celui qui est représenté ci-contre (fig. 202 *bis*).

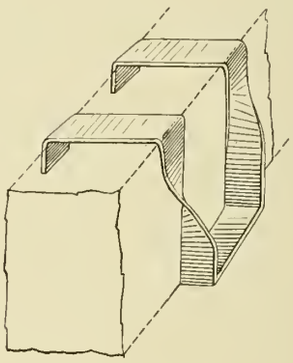


Fig. 202 bis

2e SECTION

PLANCHERS A TRAVURES COMPOSÉES

§ 5. — CONSTRUCTION ET CALCULS

230. Construction d'un plancher à poutres et solives. — Lorsque la portée du plancher, c'est-à-dire la distance entre les deux murs, est considérable et, surtout, lorsque les fenêtres et les portes sont réparties uniformément, on emploie la disposition suivante dans la construction du plancher.

Au-dessus des trumeaux M, M (fig. 203), on place, d'un mur à l'autre, de fortes pièces de bois nommées *poutres* sur lesquelles on fait ensuite reposer, perpendiculairement à leur direction, un solivage ordinaire.

Les solives peuvent reposer directement sur les poutres (fig. 204-I), mais cette disposition augmente beaucoup la hauteur du plancher ; on peut aussi à l'aide de tenons ren-

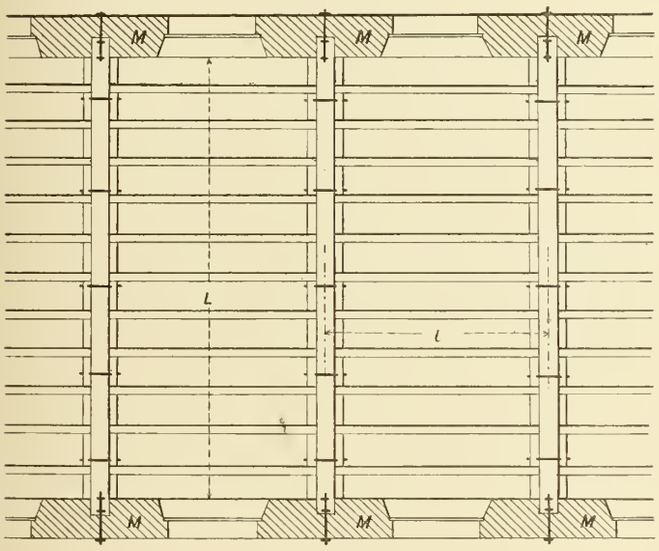


Fig 203

forcés (fig. 204-II) assembler les solives dans la poutre, mais alors on affaiblit celles-ci par des mortaises nombreuses, et, de plus, le montage est difficile. Une autre disposition (fig. 204-III) consiste à refendre la poutre par un trait de scie oblique, qui divise sa section droite en deux trapèzes égaux ; on retourne les deux moitiés, le cœur du bois en dehors et dans les faces latérales, qui sont alors obliques, on fait de légers *repos* pour recevoir les solives. De distance en distance on boulonne les deux moitiés de la poutre ainsi refendue.

Dans cette disposition la poutre présente une grande assiette et la résistance de ses deux parties est sensiblement la même que celle de la pièce entière.

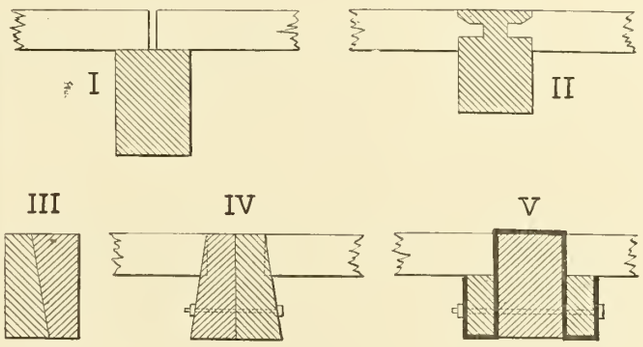


Fig. 204

Enfin, on peut adopter le système suivant que nous recommandons. On accole de chaque côté de la poutre, non refendue, ce que l'on nomme *des lambourdes* B, B (fig. 204-V), qui sont soutenues de distance en distance par des étriers en fer, boulonnés avec la poutre ; c'est alors sur ces lambourdes que viennent s'appuyer les extrémités des solives.

Dans tous les cas nous admettrons que les solives qui chargent la poutre sont suffisamment rapprochées pour que nous puissions regarder la charge totale, P, de la poutre comme uniformément répartie. Enfin nous admettrons, comme pour les solives, que les poutres entrent dans les murs, suivant une longueur égale, de chaque bout, au 1/20 de leur portée, sans que cette longueur puisse être moindre que $0^m,30$ en valeur absolue.

231. Calcul d'un poutrage. — (*a*) **Charges à adopter.** — Soit L la portée des poutres, l leur écartement (c'est ordinairement la distance d'axe en axe des trumeaux), Q le poids admis par mètre carré de plancher.

Cette valeur Q doit être plus forte dans le cas actuel que dans celui d'un solivage ordinaire puisque nous avons à ajouter le poids dû aux poutres.

Dans les avant-projets on admet généralement, ainsi que nous l'avons dit (v. n° 219-*b*-B),

$$Q' = 4^k,4 \times \frac{L^2}{l} \text{ pour les surcharges moyennes}$$

ou $$Q'' = 3^k,20 \times \frac{L^2}{\sqrt{l}} \text{ pour les fortes surcharges.}$$

Exemple. — Ainsi pour $L = 7^m,00$ et $l = 1/2L$, ce qui est une moyenne ordinaire, on aurait pour valeur du poids propre des poutres

$$\left.\begin{aligned} Q' &= 4,4 \times \frac{49}{35} = 61^k,6 \\ \text{ou} \quad Q'' &= 3,2 \times \frac{49}{\sqrt{35}} = 83^k,8 \end{aligned}\right\} \text{moyenne : } 72^k.$$

Ces valeurs Q′ et Q″ sont environ le sixième *des charges totales* (poids propre et surcharge) que nous avons admises pour les planchers sur solives simples ; par conséquent dans le calcul d'un plancher à travures composées nous pourrons, pour une première étude tout au moins, prendre pour charge totale Q les 7/6 de la charge totale que nous aurions adoptée pour un plancher à solives simples ; en d'autres termes le coefficient de majoration dû à la présence des poutres sera

$$\frac{7}{6} = 1,17.$$

(*b*) **Calcul d'une poutre. — Formule du poutrage.** — Soit A la largeur et B la hauteur d'équarrissage d'une poutre ; cette poutre supportera la charge d'une surface Ω de plancher égale à une grande travure, soit

$$\Omega = Ll$$

et la charge correspondante P_1 sera

$P_1 = 1,17Q \times L \times l$ (charge uniformément répartie).

Le moment fléchissant maximum développé dans la poutre sera

$$M = \frac{1,17QL^2l}{8}$$

et cette quantité, introduite dans la formule d'équarrissage, nous donnera en adoptant pour résistance de sécurité du bois $R = 600000^k$

(A) $$1,17QL^2l = 800000.AB^2$$

(formule dite : *du poutrage*).

Ici encore A et B sont indéterminés ; on pourra donc choisir arbitrairement l'une de ces quantités, et la formule du poutrage permettra, dès lors, de trouver la valeur de l'autre.

(*c*) **Volume de la poutre ; formule du cubage.** — La poutre sera, à chaque bout, encastrée de 1/20 de sa longueur (soit en tout 1/10) ; sa longueur effective L′ sera donc

$$L' = 1,10L.$$

Son volume total sera $1,10L \times A \times B$.

Pour le rapporter au mètre carré de plancher il faut le diviser par la surface de travure qui est $L \times l$; on aura donc pour le volume V de poutre, rapporté au m^2 de plancher,

$$V = \frac{1,10.L \times A \times B}{L \times l}.$$

De la formule du poutrage (A) tirons le produit $A \times B$ et substituons, il vient

(B) $$V = 1,10 \times 1,17 \frac{QL^2}{800000.B}$$

(formule dite : *du cubage des poutres*).

232. 1re **Application. — Calcul d'un plancher à travures composées.** — On demande de déterminer les dimensions des pièces d'un plancher dont les poutres sont espacées de $l = 3^m,75$ d'axe en axe, et ont une portée $L = 7^m,20$, sachant que la hauteur des solives est $0^m,22$, que celle des poutres est $0^m,60$ et que la charge du plancher est de 500^k (poutrage non compris).

A. *Solivage.* — Les solives auront $3^m,75$ de portée puisqu'elles iront d'une poutre à l'autre (1).

Si dans la formule

$$Q\delta l^2 = 800000ab^2$$

nous faisons

$$Q = 500^k$$
$$\delta = 0,40$$
$$l = 3,75$$
$$b = 0,22$$

nous aurons

$$a = \frac{500 \times 0,40 \times \overline{3,75}^2}{800000 \times \overline{0,22}^2} = 0^m,073.$$

B. *Poutres.*— Substituons dans la formule du poutrage (A) les valeurs indiquées ci-dessus, c'est-à-dire

$$Q = 500^k$$
$$l = 3^m,75$$
$$L = 7^m,20$$
$$B = 0^m,60$$

il vient

$$A = \frac{1,17 \times 500 \times 3,75 \times \overline{7,20}^2}{800000 \times \overline{0,60}^2} = 0,3949,$$

soit, en forçant, $A = 0.40$

233. 2e **Application. — Calcul de la plate-forme de fondation d'un mur de quai.** — (*a*) **Données.** — Un mur de quai, dont la section transversale est représentée fig. 205, doit être supporté par un plancher de fondation. Ce plancher composé d'un platelage parallèle à la direction du mur repose sur les *chapeaux* des pieux de fondation ; ces chapeaux, placés perpendiculairement à la longueur du mur, sont espacés de $1^m,60$ d'axe en axe et chacun d'eux est supporté par 3 pieux.

On demande de déterminer les dimensions à donner aux chapeaux et au plancher de fondation, sachant que le mur

(1) En réalité la portée des solives serait moindre, surtout si l'on adoptait (fig. 204-V) la disposition avec lambourdes. En admettant, comme nous le faisons, qu'elles vont d'axe en axe des poutres, cela conduit à leur donner un excès de résistance.

(1) Le mur de quai que nous donnons comme exemple est celui qui a été exécuté pour l'exposition universelle de 1889 aux abords du pont d'Iéna.

peut être destiné à supporter, sur son assise supérieure, une surcharge de 8000^k par mètre courant qui s'ajoutera, par conséquent, à son poids propre pour presser sur la fondation.

(*b*) **Calcul des chapeaux.** — Les pieux de fondation ayant 0,30 d'équarrissage, nous prendrons également 0,30 comme largeur des chapeaux ; il s'agit donc de déterminer leur épaisseur.

Cherchons d'abord les valeurs des efforts que ces chapeaux doivent supporter.

En premier lieu se place le poids du mur qui a pour valeur le produit du volume correspondant à l'intervalle entre deux chapeaux par le poids spécifique de la maçonnerie, que nous admettrons être de 2300^k par mètre cube.

A ce poids il faut ajouter celui des remblais placés au-dessus des retraites de 0,22 qui existent derrière le mur (nous prendrons 1200^k pour poids spécifique des remblais). Enfin, nous devrons tenir compte de la surcharge de 8000^k.

Les éléments de ces charges sont consignés aux tableaux ci-après ; nous les calculons d'abord pour 1 mètre courant.

Section du mur :

$1,35 \times \frac{0,05}{2}$	0,034
$1,42 \times \frac{1,35 + 1,52}{2}$	2,038
$\frac{1,74 + 1,888 + 2,108 + 2,256}{2} \times 1,23$	4,915
$\frac{2,476 + 2,617}{2} \times 1,18$	3,005
$2,617 \times \frac{0,05}{2}$	0,065
	10,057

Section des remblais au-dessus des retraites :

$1,22 \times 0,66$	0,805
$1,23 \times 0,44$	0,541
$1,23 \times 0,22$	0,271
	1,617

Charge par mètre courant de mur :

Maçonnerie	$10,05 \times 2300^k =$	23115^k
Remblais	$1,62 \times 1800^k =$	2916
Surcharge		8000
Total		34031
Soit, en nombre rond		34000^k

Cette charge 34000^k, par mètre courant de mur, correspond à un poids de

$$1,60 \times 34000 = 54400^k$$

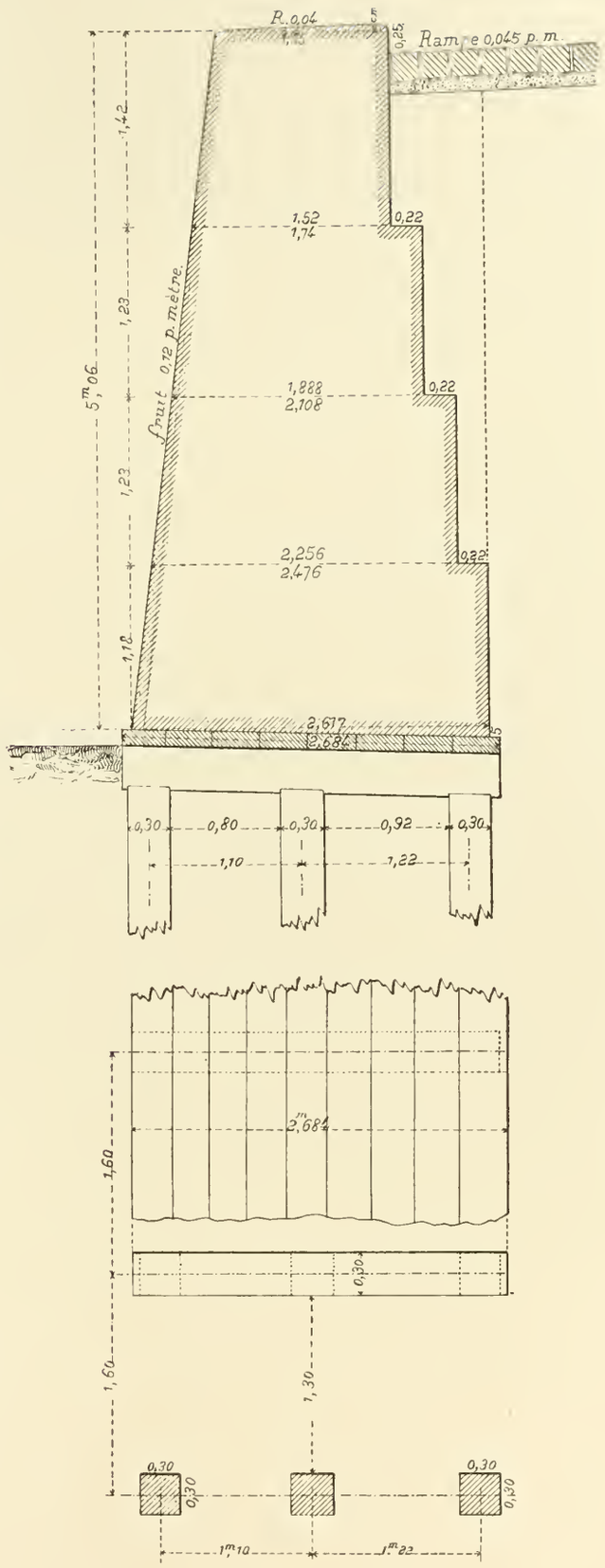


Fig. 205

par chapeau et à un poids

$$\frac{54400}{2,62} = 20763^{k}$$

par mètre courant de chapeau.

Considérons cette dernière pièce de charpente comme simplement posée sur deux appuis distants de $0^{m},92$ (cette distance est la plus grande de celles qui séparent 2 pieux d'une même palée), et appliquons la formule d'équarrissage.

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

dans laquelle nous remplacerons

$$M \text{ par } \frac{Pl^2}{8} = \frac{20763 \times \overline{0,92}^2}{8},$$

$$R \text{ par } 600000,$$

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6} \quad \text{par} \quad \frac{0,30}{6} \times b^2,$$

on obtiendra :

$$\frac{20763 \times \overline{0,92}^2}{800000 \times 0,30} = b^2 = 0,073224,$$

d'où $b = 0^{m},27$.

Les chapeaux devront donc avoir

$$0^{m},30 \times 0^{m},27 \quad \text{d'équarrissage.}$$

(*c*) **Calcul de l'épaisseur *h* du plancher.** — Le plancher est composé de pièces de bois jointives, parallèles au fil de l'eau, et dont la longueur est grande par rapport à l'intervalle entre les chapeaux. Les pièces du plancher reposent donc sur plusieurs appuis et, en raison de leur continuité, on peut admettre que, au-dessus de chaque chapeau, le plancher est encastré sur ses appuis. On peut d'ailleurs remarquer que la charge uniformément répartie que supporte le plancher ne le fait travailler à la flexion que dans les premiers temps de la construction du mur; lorsque les maçonneries ont fait prise, le poids du mur est transmis directement aux chapeaux et aux pieux, le travail de flexion est supporté par la maçonnerie. Dans ces conditions nous pourrons supposer que le moment fléchissant maximum imposé au plancher a pour valeur $\frac{Pl^2}{12}$ (v. tableau p. 134), P désignant la charge par mètre courant de plancher, l la distance des appuis.

Or, le poids du mètre courant de mur est 34000^{k} ainsi que nous l'avons établi ci-dessus ; la portée du plancher est

$$1^{m},60 - 0,30 = 1^{m},30.$$

Le moment fléchissant maximum imposé au plancher sera donc

$$\frac{Pl^2}{12} = \frac{34000^{k} \times \overline{1,30}^2}{12} = 4788^{km}.$$

Appliquons alors la formule d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{I}{v} = \frac{ah^2}{6}.$$

dans laquelle nous ferons $a = 2^{m},684$ (v. fig. 205), $R = 600000^{k}$ et $M = 4788^{km}$, il vient :

$$h^2 = \frac{4788 \times 6}{600000 \times 2,684} = 0,01784,$$

d'où l'on tire $h = 0,133$ soit $0^{m},13$. Le plancher devra donc avoir $0^{m},13$ d'épaisseur.

234. **Poutres à équarrissage normal.** — (*a*) **Considérations théoriques.** — Les poutres de planchers ayant toujours de forts équarrissages ne pourront être trouvées toutes faites dans le commerce; on devra les débiter à la demande, soit dans des pièces grossièrement équarries, soit dans des pièces en grume. Dans cette dernière hypothèse, si l'on considère l'arbre comme étant cylindrique et possédant un diamètre D (une fois l'aubier enlevé), nous pouvons nous proposer de trouver la manière dont il faudra débiter le cylindre de diamètre D pour obtenir une poutre à section rectangulaire dont le moment de résistance $I : v$ soit maximum.

Soient a et b les côtés du rectangle cherché; la quantité qu'il s'agit de rendre maxima est le produit $\frac{ab^2}{6}$ qui sera maximum en même temps que ab^2.

Or on a $\qquad a^2 + b^2 = D^2,$

D étant supposé constant pour un arbre donné. Le pro-

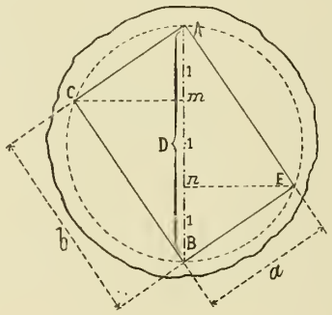


Fig. 206

duit ab^2 sera maximum en même temps que le double de son carré $2a^2b^4$, lequel peut encore s'écrire ainsi :

$$2a^2 \times b^2 \times b^2.$$

Mais la somme de ces trois facteurs est constante car

$$2a^2 + b^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2D^2.$$

Or on sait que, dans ce cas, le produit $2a^2 \times b^2 \times b^2$ sera maximum quand les trois facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand on aura

$$2a^2 = b^2,$$

d'où

$$b = a\sqrt{2} = a \times 1,414$$

en chiffre rond la hauteur b doit être les $\frac{3}{2}$ de la base a.

Projetons les sommets C et E sur le diamètre AB, nous aurons (fig.206)

$$\frac{Am}{mB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{2},$$

d'où le tracé suivant :

(*b*) **Tracé de l'équarrissage normal.** — 1° On divise le diamètre D en trois parties égales ; 2° par chacun des points de division on mène des perpendiculaires au diamètre et 3° la rencontre de ces perpendiculaires avec la circonférence de grume donne les sommets du rectangle d'équarrissage normal.

En fonction du diamètre on aura

$$a = D\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\,D,$$

$$b = D\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0{,}816\,D.$$

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6} = \frac{a^3}{3} = D^3\frac{\sqrt{3}}{27} = 1{,}732\left(\frac{D}{3}\right)^3 = 0{,}0641\,D^3.$$

(*c*) **Comparaison avec l'équarrissage carré.** — En comparant l'équarrissage normal à l'équarrissage carré inscrit dans le cercle de même diamètre D, on trouve pour l'équarrissage normal

$$\frac{I}{v} = \frac{D^3\sqrt{3}}{27} = 0{,}0641D^3,$$

et pour le carré

$$\frac{I'}{v'} = \frac{a'^3}{6} = \frac{D^3 \times 2\sqrt{2}}{8 \times 6} = \frac{D^3\sqrt{2}}{24} = 0{,}0589D^3.$$

Le rapport k des moments de résistance $I : v$ et $I' : v'$ est donc

$$k = \frac{0{,}0641}{0{,}0589} = 1{,}088.$$

Ainsi, au point de vue de la résistance, l'équarrissage normal l'emporte d'environ 1/10 sur l'équarrissage carré.

Au point de vue du bois employé, on a pour la section du carré (fig. 207)

$$\Omega' = a^2 = \frac{1}{2}D^2 = 0{,}5D^2$$

et pour la section de l'équarrissage normal

$$\Omega = ab = \frac{D^2\sqrt{2}}{3} = 0{,}471D^2.$$

Le rapport k' des deux surfaces est

$$k' = \frac{0{,}500}{0{,}471} = 1{,}062.$$

En résumé l'équarrissage normal, qui donne une poutre plus résistante que celle à section carrée, fournit au débit un déchet plus grand que celle-ci. Quoique les *dosses* que ce déchet produit n'aient qu'une faible valeur, il n'en est pas

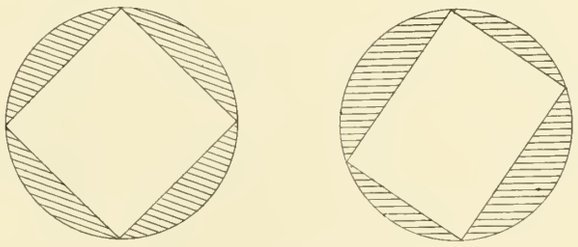


Fig. 207

moins vrai que l'équarrissage normal en donne plus que l'autre, ce qui, au point de vue pécunier, constitue un certain avantage. Toutes ces raisons réunies font qu'il pourra être avantageux d'employer l'équarrissage normal pour des poutres en bois de dimensions exceptionnelles qu'il est nécessaire de faire débiter spécialement dans du bois en grume.

§ 6. — Choix du système a adopter

235. **Equivalence économique d'un plancher à travures simples et d'un plancher à travures composées.** — (*a*) **Données.** — Il est intéressant, au point de vue de l'économie dans la dépense, de chercher dans quelles conditions il est préférable d'employer des travures composées (poutres et solives) plutôt que des travures simples (solives parallèles allant d'un mur à l'autre).

Les données et les notations seront les suivantes :

L Portée des poutres.

l Leur écartement d'axe en axe.

A Largeur } d'équarrissage des poutres.
B Hauteur }

a Largeur } d'équarrissage des solives.
b Hauteur }

δ Ecartement d'axe en axe des solives, lorsque ces solives iront d'un mur à l'autre.

a' Largeur } d'équarrissage des solives.
b' Hauteur }

δ' Ecartement d'axe en axe des solives, lorsque ces solives iront d'une poutre à l'autre.

Q Charge totale admise pour le plancher.

R Résistance de sécurité du bois.

V Volume du bois du solivage dans le cas de la travure simple.

V' Volume des bois dans le cas de la travure composée ; ce volume comprend :

v Volume des poutres seules.

v' Volume des solives qui relient les poutres.

Ces volumes seront rapportés au mètre carré de plancher.

(*b*) **Volume des bois.** — *Travure simple.* — La formule dite *du cubage* établie ci-dessus pour le solivage parallèle (v. n° 225, formule B) nous donne :

$$V = \frac{1,10QL^2}{800000b}.$$

On se souvient que le coefficient 1,10 provient de ce que les solives sont, à chaque bout, noyées dans les murs de 1/20, environ, de leur portée.

Travure composée. — Ce volume V′ comprend d'abord le volume v' du solivage qui s'étend de poutre à poutre, et ce volume exprimé d'après la même formule, sera

$$v' = \frac{1,10Ql^2}{800000b'}.$$

Il semble qu'ici, la distance l étant mesurée d'axe en axe des poutres, il n'y ait pas lieu d'employer le coefficient 1,10. Nous le faisons néanmoins, pour les raisons suivantes :

Ou bien les solives poseront directement sur le dessus des poutres (fig. 204-I) et alors il faudra, pour empêcher leur déversement, placer entre elles des cales dont le cube équivaudra sensiblement à la fraction 1/20 de la longueur des solives ;

Ou bien l'assemblage se fera par tenons et mortaises (fig. 204-II) et l'affaiblissement, dû aux mortaises de la poutre, nécessitera un renforcement de cette dernière, et par conséquent une augmentation de volume ;

Ou bien on emploiera la disposition par lambourdes (fig. 204-V) et le volume de ces lambourdes équivaudra aussi à cette fraction 1/20.

Le volume v de la poutre s'obtiendra par la formule dite du *cubage des poutres* (v. n° 232-*c*) et sera

$$v = \frac{1,10QL^2}{800000B}.$$

La formule du n° 232 introduit un second coefficient de majoration 1,17. Il provenait de ce que nous avions jugé que le poids propre de la poutre exigeait une majoration de la charge totale Q. Mais, ici, cette majoration de Q est-elle bien justifiée ? Nous ne le pensons pas.

En effet, nous employons surtout les poutres pour pouvoir réduire le cube de bois des solivages. Si le solivage porte d'une poutre à l'autre il sera moins lourd que s'il porte de mur à mur. Nous devons donc admettre que le poids *en plus*, dû aux poutres, est inférieur au poids *en moins*, économisé sur le solivage ; s'il en était autrement, l'étude que nous faisons en ce moment n'aurait pas de sens. C'est pourquoi nous avons supprimé ce coefficient 1,17.

(*c*) **Equation d'équivalence.** — Pour trouver les conditions d'équivalence des deux systèmes, il faut écrire que le volume V des bois, dans le cas des travures simples, est égal au volume $(V' = v + v')$ dans celui de la travure composée, ce qui donne après simplifications et suppression des facteurs communs

$$\text{(A)} \quad \frac{L^2}{b} = \frac{l^2}{b'} + \frac{L^2}{B}.$$

Telle est *l'équation d'équivalence.*

Il est à remarquer qu'il n'entre dans cette formule que les portées L et l et les épaisseurs de plancher (b et b') ou de poutre (B). Le premier membre est proportionnel au volume des bois dans le système simple et le second est proportionnel à celui des bois dans le système à poutres ; par conséquent si le premier membre est plus grand que le second c'est le système à poutres qu'il faudra choisir, ou inversement.

236. **Applications de la formule d'équivalence.** — Les conséquences à tirer de cette équation varieront avec les conventions faites relativement aux dimensions des éléments du plancher. Nous allons faire diverses hypothèses.

(*a*) **1re Hypothèse. — Plancher à épaisseurs données.** — On s'impose les épaisseurs b, b' et B, ou du moins les rapports dans lesquels ces épaisseurs seront entre elles. On demande pour quelle valeur du rapport l : L il y aura avantage à employer des travures composées.

L'équation d'équivalence donne pour ce rapport :

$$\text{(1)} \qquad \frac{l^2}{L^2} = \frac{b'(B - b)}{Bb}.$$

Exemple. — On se donne les conditions suivantes : Si un plancher de portée L était construit par travures simples, le solivage aurait 0,30 d'épaisseur, ou une épaisseur proportionnelle ; s'il était construit par travures composées, les poutres auraient $0^m,65$ d'épaisseur ou une épaisseur proportionnelle, et le solivage qu'elles supporteraient aurait $0^m,22$ ou une épaisseur proportionnelle. On demande pour quelle largeur de trumeaux, l, il y aura intérêt à préférer un système à l'autre.

L'équation (1) nous donne, en y faisant : $B = 0,65$, $b = 0,30$, $b' = 0,22$,

$$\frac{l}{L} = \sqrt[2]{\frac{0,22(0,65 - 0,30)}{0,65 \times 0,30}} = 0,624.$$

Ainsi donc, si les circonstances permettent de placer les poutres à des intervalles l qui soient égaux ou inférieurs aux 0,624 de la portée L du plancher, il y aura économie à adopter le système par travures composées.

Quant aux dimensions ci-dessus

$$b = 0,30, \qquad B = 0,65, \qquad b' = 0,22,$$

elles ne sont pas définitives ; il reste à déterminer leurs valeurs absolues en fonction de la charge adoptée Q et de la valeur absolue L de la portée, et comme on doit les laisser proportionnelles aux nombres ci-dessus, il suffira de déterminer une seule d'entre elles.

(*b*) **Autres hypothèses.** — On pourrait faire d'autres hypothèses ; admettre, par exemple, que les épaisseurs b, b' et B sont des fonctions connues des portées L et l. Si l'on posait

$$b = m\sqrt[2]{L}, \qquad b' = m'\sqrt[2]{l}, \qquad B = M\sqrt[2]{L},$$

on en déduirait, en substituant dans la formule d'équivalence et en simplifiant :

$$x^3 = \frac{l^3}{L^3} = \left[\frac{m'(M - m)}{Mm}\right]^2$$

Parmi les hypothèses que l'on peut faire, nous choisirons celle des planchers *à éléments modulés*, qui fera l'objet d'une étude complète de notre part.

237. **Plancher à éléments modulés.** — (*a*) **Données.** — On peut s'imposer, avec assez de vraisemblance, les conditions suivantes :

(*a*) Tous les bois (solives ou poutres) seront débités à équarrissage modulé, c'est-à-dire que l'on aura

$$a = \lambda b, \qquad a' = \lambda b', \qquad A = \lambda B,$$

λ étant un module fixe.

Si, par exemple, le module était celui de l'équarrissage normal on aurait

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots$$

(*b*) Les intervalles δ et δ' d'axe en axe des solives seront une fraction donnée, toujours la même, de leur portée; on aura par exemple :

$$\delta = \frac{1}{n}L \quad \text{pour les solives de mur à mur, et}$$

$$\delta' = \frac{1}{n'}l \quad \text{pour les solives de poutre à poutre.}$$

Il conviendra, l étant plus petit que L, de prendre n' plus petit que n afin que les largeurs d'entrevous restent toujours comprises entre $0^m,17$ et $0^m,40$ (v. n° 218-*b*).

On demande quel sera le rapport $x = l : L$ pour lequel il sera équivalent d'employer un quelconque des deux systèmes.

(*b*) **Équation du problème.** — Calculons les expressions

$$\frac{L^2}{B}, \qquad \frac{L^2}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{l^2}{b'},$$

qui entrent dans l'équation d'équivalence (A).

La formule du poutrage (v. n° 231-*b*),

$$QL^2l = 800000AB^2$$

nous donne, en faisant : $A = \lambda B$,

$$L^2l = \frac{800000\lambda}{Q}B^3,$$

d'où l'on tire en posant pour simplifier

$$S = \sqrt[3]{\frac{800000\lambda}{Q}},$$

$$\frac{1}{B} = \frac{S}{\sqrt[3]{L^2l}}, \qquad \text{et par suite :}$$

$$(1) \qquad \frac{L^2}{B} = S\sqrt[3]{\frac{L^4}{l}} = SL\sqrt[3]{\frac{L}{l}}.$$

La formule du solivage (v. n° 223-*a*), appliquée aux solives de mur à mur,

$$Q\delta L^2 = 800000ab^2,$$

donne, en faisant $a = \lambda b$, et $\delta = \frac{1}{n}L$,

$$(2) \qquad \frac{L^2}{b} = SL\sqrt[3]{n}.$$

La même formule, appliquée au solivage de poutre à poutre, donne en faisant $\delta' = \frac{1}{n'}l$

$$(3) \qquad \frac{l^2}{b'} = Sl\sqrt[3]{n'}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation d'équivalence, elle devient, en supprimant le facteur commun S :

$$L\sqrt[3]{n} = l\sqrt[3]{n'} + L\sqrt[3]{\frac{L}{l}}.$$

Divisons les deux membres par L et posons

$$x = \frac{l}{L}.$$

Cette relation devient :

$$(B) \qquad \sqrt[3]{n} = x\sqrt[3]{n'} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}.$$

Telle est l'équation du problème.

(*c*) **Abaque n° 4.** — Nous résoudrons graphiquement cette équation en construisant un abaque applicable pour toutes les valeurs de n et de n'.

Posons les deux équations.

$$(a) \qquad y = \sqrt[3]{n} \qquad \text{et}$$

$$(b) \qquad y = x\sqrt[3]{n'} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}.$$

L'équation (*a*) représente une série de droites parallèles à l'axe des x dont les hauteurs sont données par les valeurs de $\sqrt{n}$.

L'équation (*b*) représente la courbe fixe $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, ajoutée analytiquement à la droite variable $y = x\sqrt[3]{n'}$.

Cette droite est asymptote à la courbe (*b*), laquelle est, ce que l'on nomme, une hyperbole du 4e degré.

La table des nombres donnée à la fin de l'ouvrage a permis de calculer très rapidement autant d'ordonnées que l'on a voulu de la courbe (*b*).

L'abaque n° 4 représente les courbes (*b*) et les horizontales (*a*) dans les limites où elles seront utilisables.

L'axe des x est gradué par dixièmes, car le rapport inconnu $l : L$ sera toujours plus petit que l'unité.

On entre dans l'abaque par les nombres n et n'.

n, c'est-à-dire le nombre de fois que l'intervalle δ des solives de mur à mur sera compris dans la portée L du plancher, répond aux horizontales ;

n', c'est-à-dire le nombre de fois que l'intervalle δ' des solives de poutre à poutre sera compris dans la distance l d'axe en axe des poutres, répond aux hyperboles.

Les abscisses des points de croisement donnent les rapports d'équivalence $x = l : L$.

Le lieu des points les plus bas m, m... de toutes les hyperboles est une courbe qui a pour équation

$$y = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}.$$

Nous l'avons construite en calculant ses ordonnées (1) et nous l'avons tracée en pointillé sur l'abaque.

ABAQUE N° 4

Servant à la résolution du problème de l'**équivalence économique** d'un plancher à travures simples et d'un plancher, de même portée, à travures composées.

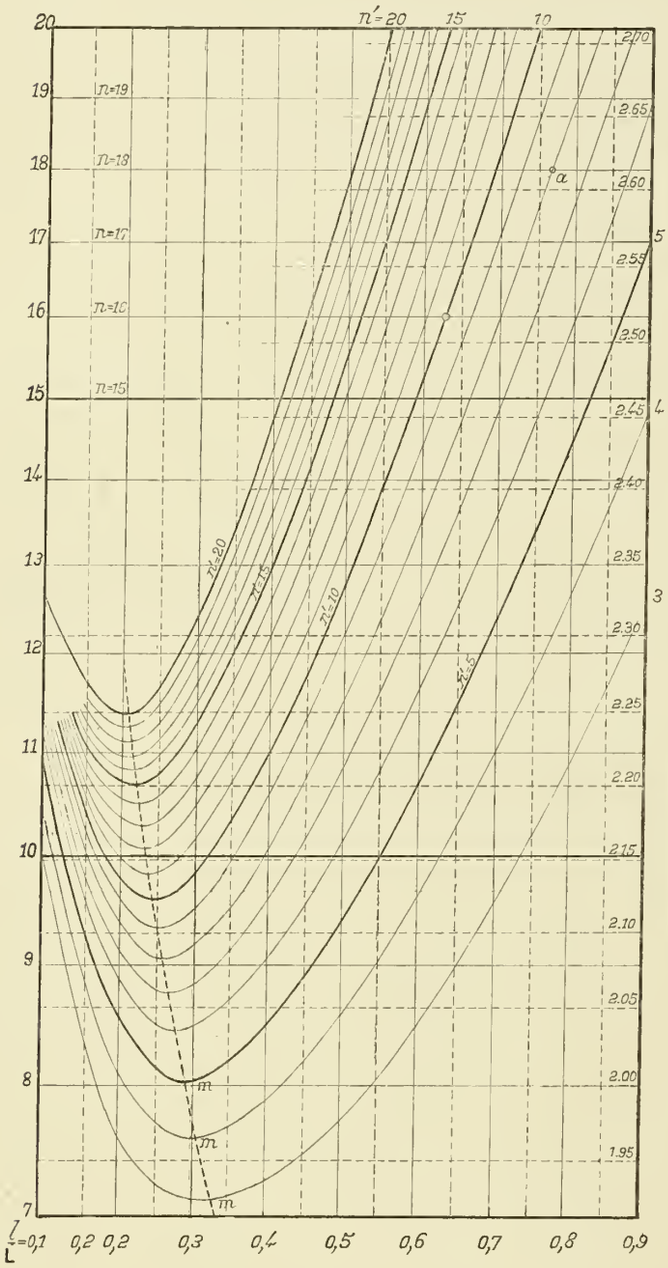


Fig. 208

(1) En effet, une quelconque des hyperboles a pour équation, en adoptant la notation par exposants négatifs et fractionnaires,

$$y = x\sqrt[3]{n} + x^{-\frac{1}{3}}. \tag{1}$$

La dérivée de y égalée à zéro donne

$$y' = \sqrt[3]{n} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = 0, \qquad \text{qui s'écrit}$$

(*d*) **Application.** — Une salle de $7^m,50$ de portée présente sur ses murs principaux des fenêtres (et, par conséquent, des trumeaux) espacées de $4^m,20$ d'axe en axe.

On demande s'il faut adopter le système par travures composées.

On a : $L = 7,50$ et $l = 4,20$.

Adoptons $n = 16$, cela nous donnera pour l'intervalle δ des solives sur murs

$$\delta = 7,50 : 16 = 0^m,468,$$

ce qui sera raisonnable pour la construction des augets, et faisons $n' = 10$, ce qui donnera pour l'intervalle δ' des solives sur poutre

$$\delta' = 4,20 : 10 = 0^m,420.$$

Sur l'abaque l'hyperbole $n' = 10$ recoupe l horizontale n° 16 en un point dont l'abscisse est 0,63 environ.

Or dans l'exemple choisi on a :

$$\frac{l}{L} = \frac{4,20}{7,50} = 0,56.$$

Le point de l'horizontale n° 16 qui a pour abscisse 0,56 est situé au-dessus du point de même abscisse de l'hyperbole n° 10, et comme ce sont les ordonnées des hyperboles qui sont proportionnelles aux volumes des bois dans le système à travures composées, tandis que les ordonnées des horizontales le sont au volume des bois de la travure simple, nous adopterons le système avec poutres.

238. **Solution la plus économique pour un plancher en bois à éléments modulés.** — (*a*) **Données.** — Étant donné une salle de largeur L et étant admis que l'on peut placer des poutres aux points des murs que l'on voudra, on demande quel sera l'intervalle l qu'il faudra choisir, d'axe en axe des poutres, pour employer le cube de bois minimum.

(*b*) **Solution théorique.** — L'abaque n° 4 nous montre que, théoriquement du moins, pour une valeur donnée de n', le rapport $l : L$ à adopter pour réaliser le minimum de dépense est donné par l'abscisse du point le plus bas m de l'hyperbole répondant à ce rapport n'.

Nous serions donc conduits à prendre le plus bas de ces points m, c'est-à-dire à adopter le plus petit nombre possible pour n'.

$$\frac{1}{3x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{n}, \qquad \text{d'où}$$

$$x\sqrt[3]{n} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}. \tag{2}$$

Cette équation (2) donnerait l'abscisse x_1 du point le plus bas de celle des hyperboles qui répond au paramètre n ; cette abscisse x_1 est

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{27n}}.$$

Entre les équations (1) et (2) éliminons n, nous obtenons

$$y = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}},$$

qui est l'équation du lieu des points les plus bas. C. Q. F. D.

Mais pratiquement, une très petite valeur de n' répondrait à un très grand intervalle δ' et par conséquent à un trop large entrevous pour les solives sur poutres ; on est donc obligé de tenir compte de ce fait que l'intervalle δ' doit être compris entre $0^m,25$ et $0^m,50$.

(*c*) **Tableau numérique des volumes minima.** — Le tableau numérique ci-dessous fait connaître, dans la colonne n° 2, les abscisses $x_1 = l : L$ des points les plus bas des hyperboles de l'abaque. Il donne, sur une même ligne horizontale, pour des intervalles δ' variant de 0,25 à 0,50, les valeurs de l (on a $l = n'\delta'$), et aussi les valeurs de L qui, pour le minimum de dépense de bois, se correspondraient l'une l'autre. On a :

$$L = \frac{n'\delta'}{x_1}.$$

On se servira de ce tableau, comme suit :

TABLEAU

servant au calcul des volumes de bois minima pour les

Planchers à travures composées

n'	$x_1 = \frac{l}{L}$	$\delta' = 0,50$		$\delta' = 0,45$		$\delta' = 0,40$		$\delta' = 0,35$		$\delta' = 0,30$		$\delta' = 0,25$	
		L	l	L	l	L	l	L	l	L	l	L	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	0,333	4,50	1,50	4,05	1,35	3,60	1,20	3,15	1,05	2,70	0,90	2,25	0,75
4	0,309	6,48	2,00	5,83	1,80	5,18	1,60	4,53	1,40	3,88	1,20	3,24	1,00
5	0,293	8 52	2,50	7,67	2,25	6,82	2,00	5,96	1,75	5,11	1,50	4.26	1,25
6	0,279	10,74	3,00	9,66	2,70	8,59	2,40	7,52	2,10	6,44	1,80	5.37	1,50
7	0,268	13,05	3,50	11,75	3,15	10,44	2,80	9,14	2,45	7,83	2,10	6,52	1,75
8	0,260	15,40	4,00	13,86	3,60	12,32	3,20	10,78	2,80	9,24	2,40	7,70	2,00
9	0,253	17,77	4,50	16,00	4,05	14,22	3,60	12,44	3,15	10,65	2,70	8,88	2,25
10	0,246	. .	. . .	18,31	4,50	16,28	4,00	14,24	3,50	12,21	3,00	10,17	2,50
11	0,239	. .	. .	. . .	. . .	18,39	4,40	16,10	3,85	13,79	3,30	11,49	2,75
12	0,235	. . .	. . .	. . . .	. .	. . . .	. . .	17,89	4,20	15,33	3,60	12,78	3,00
13	0,230	. . . .	. . .	. .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	16,96	3,90	14,13	3,25
14	0,225	. . . .	.	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	18,65	4,20	15,54	3,50
15	0,221	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	17,05	3,75
16	0,218	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. .	18,36	4,00

Exemple : Étant donné une salle de $8^m,25$ de portée, on demande quel sera, pour employer le minimum de volume de bois, la distance l à donner aux poutres. On admet que les solives sur poutres seront placées à des distances δ', d'axe en axe, qui seront égales à $0^m,30$.

Dans la double colonne $\delta' = 0,30$, on trouve que la portée donnée $L = 8,25$ est comprise entre les nombres 7,83 et 9,24 (différence 1,41), auxquels répondent pour l les valeurs $2^m,10$ et $2^m,40$ (différence 0,30), et pour n' les valeurs 7 et 8.

En interpolant comme à l'ordinaire, c'est-à-dire en posant

$$z = (8,25 - 7,83)\frac{0,30}{1,41} = \frac{0,42 \times 0,30}{1,41} = 0,08$$

on aura donc :

$$l = 2,40 + 0,08 = 2^m,48.$$

Nota. — Il est à remarquer que cette solution, *à minima*, donnerait toujours pour le rapport $l : L$ une faible valeur, ce qui entraînerait à adopter des travées très peu larges, produisant peut-être un effet peu satisfaisant. Mais considérons, d'une part, que la grande portée $L = 8,25$ entraînerait pour le plancher à travures simples (même en adoptant pour δ une assez grande valeur, 0,45 par exemple), un nombre n assez grand puisque l'on aurait :

$$n = 8,25 : 0,45 = 18,$$

tandis que l'on aurait $n' = 8$.

Remarquons d'autre part que l'horizontale $n = 18$ rencontre l'hyperbole $n' = 8$ en un point a dont l'abscisse est 0,77 environ, tandis que l'abscisse du point le plus bas de cette hyperbole est d'après le tableau : $x_1 = 0,26$.

Entre ces deux rapports 0, 26 et 0,77, nous disposons d'une marge assez grande pour que, tout en gardant leur avantage économique, les poutres aient un espacement compatible soit avec les exigences de la construction, soit avec celles de l'esthétique.

(*d*) **Coefficient d'économie.** — L'abaque n° 4 permet d'apprécier le tant pour cent de l'économie. A cet effet on a figuré (en pointillé) des horizontales cotées par le côté droit, 1,95, 2,00, 2,05... etc. ; ces cotes indiquent des hau-

teurs au-dessus de l'axe des x par rapport auquel les hyperboles ont été construites (cet axe des x serait très en dehors du cadre ; il n'a pas été conservé).

Dès lors, pour l'exemple actuel, le point le plus bas de la courbe n° 8 est à la cote 2,080 environ, tandis que l'horizontale n° 18 est à la cote 2,615 environ ; par conséquent les volumes de bois, et par suite les dépenses, seront entre eux dans les rapports

$$\frac{V'}{V} = \frac{2,080}{2,615} = 0,79.$$

Le système dans lequel on aurait des poutres espacées de $2^m,80$, d'axe en axe, économiserait donc environ 21 0/0 sur le système à travures simples.

Si l'on voulait des travées plus larges, ayant par exemple 3,60 d'axe en axe, alors on chercherait le rapport $l : L$

$$\frac{l}{L} = \frac{3,60}{8,25} = 0,43.$$

Sur l'abaque on prendrait l'abscisse $x = 0,43$; et on chercherait le point correspondant de la courbe $n' = 8$; son ordonnée serait ici égale à 2,19 et le rapport des volumes de bois serait

$$\frac{V'}{V} = \frac{2,19}{2,615} = 0,82 ;$$

l'économie ne serait plus que de 18 0/0.

CHAPITRE IV

PLANCHERS EN FER A TRAVURES SIMPLES

§ 1. — Etude des fers en double Té

239. Généralités. -- (*a*) **Résistance de sécurité.** — Nous adopterons pour résistance de sécurité du fer $R = 6^k$ par millimètre carré ou 6000000^k par mètre carré, c'est-à-dire 10 fois la résistance admise pour le bois ; mais, dans la pratique, on va souvent au-delà, et, suivant la qualité du métal employé, on adopte pour résistance de sécurité 8^k et même 10^k quand il s'agit du fer, 12^k quand les solives sont en acier.

Les calculs que nous établirons dans ce chapitre seront faits en partant de $R = 6^k$ afin d'éviter les confusions ; mais il restera entendu qu'on pourra augmenter les charges admissibles de un tiers ou des deux tiers suivant que l'on prendra pour valeur de R, 8^k ou 10^k.

(*b*) **Profils divers des fers du commerce.** — Les fers généralement employés pour solives ont la forme dite en double **T** (fig. 209-A et B) comprenant une partie centrale

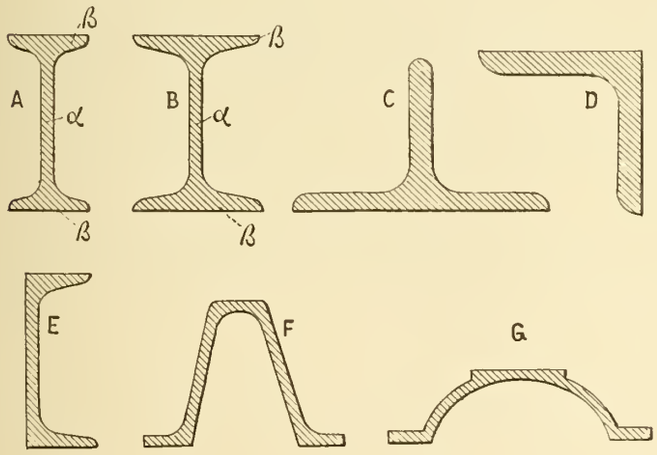


Fig. 209

ou *âme* α et deux parties épanouies β et β, nommées *ailes*, aux extrémités de l'âme.

Les fers de cette catégorie se distinguent en fers ordinaires ou à *petites ailes* (fig. A) et en fers à *larges ailes* (fig. B). Ils sont dits *à maximum* quand leur âme est épaisse. On obtient cette surépaisseur de l'âme, au laminage, en écartant un peu les cylindres du laminoir.

Indépendamment des fers à double **T** le constructeur emploie encore des fers spéciaux tels que les fers à simple **T** (fig. C), les cornières (fig. D), les fers en **U** (fig. E).

Ces dernières formes, C, D, E, sont surtout utiles pour la construction des poutres *composites* dont nous nous occuperons plus loin, en parlant des pièces d'égale résistance.

Enfin on constitue quelquefois les planchers au moyen de fers *Zorès*, du nom de leur inventeur, dont les profils sont analogues à ceux indiqués ci-contre (fig. F et G), mais peuvent varier considérablement.

240. Moment d'inertie et moment de résistance d'un fer en double T. — (*a*) **Expressions exactes.** — On peut

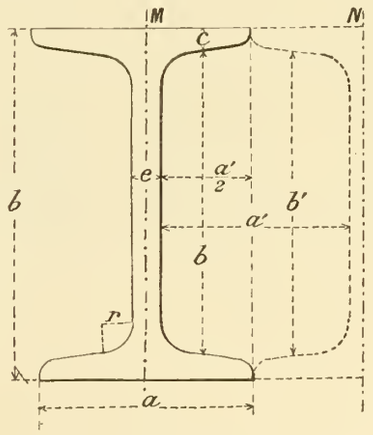


Fig. 210

trouver le moment d'inertie d'une section à double **T** en l'assimilant à celle d'un tube rectangulaire, qui irait de M en N (fig. 210).

Si l'on désigne par

a la largeur des ailes;

a' la même largeur, déduction faite de l'âme ;

b la hauteur totale extérieure ;

b' la hauteur intérieure, prise au quart de la largeur des ailes.

Le moment d'inertie du tube est la différence entre le moment d'inertie du rectangle extérieur, dont les dimensions sont a et b, et le moment d'inertie du rectangle intérieur, dont les dimensions sont a' et b'.

On sait que les moments d'inertie de ces rectangles sont (v. n° 84) :

$$\frac{ab^3}{12} \quad \text{et} \quad \frac{a'b'^3}{12}; \quad \text{on aura donc :}$$

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3}{12}$$

et comme $v = 1/2\,b$, celle du moment de résistance est

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^3 - a'b'^3}{6b}$$

En réalité, l'épaisseur des ailes n'est pas constante parce qu'alors le laminage serait impossible; pour la même raison les angles intérieurs sont remplacés par un congé ; mais lorsqu'on a soin de mesurer la hauteur b' comme nous l'avons indiqué, c'est-à-dire au quart de la largeur de la semelle, les formules précédentes sont suffisamment exactes. D'ailleurs, ainsi que nous le verrons bientôt, le constructeur n'a presque jamais à appliquer ces formules au calcul des solives.

Il est facile de voir que les trois profils représentés en A, B et C (fig. 211), qui sont équivalents comme surface, ont le

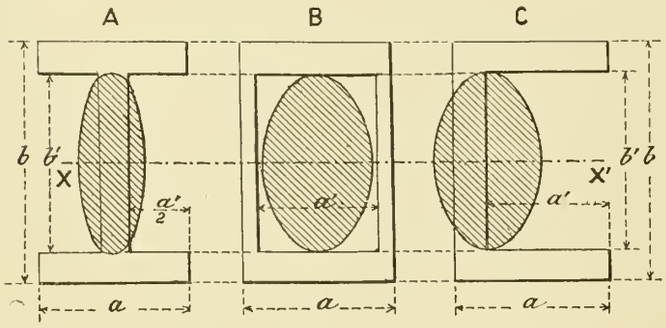


Fig. 211

même moment de résistance par rapport à l'axe XX', mais perpendiculairement à cette direction leurs ellipses centrales d'inertie n'ont plus leurs petits axes égaux. Le petit axe correspondant au fer en tube, B, est le plus grand; celui répondant au fer à double T, A, est le plus petit.

Aussi ces trois fers posés à plat ne sont-ils plus équivalents et ainsi placés c'est le fer en double T qui résiste le moins bien. Ce sera donc toujours suivant le grand axe du fer à double T que devront agir les forces.

(*b*) **Valeur approchée du moment de résistance.** — En considérant le fer à double T comme composé uniquement de ses deux ailes et en supposant que la surface de celles-ci soit condensée tout entière sur le côté extrême de l'aile, c'est-à-dire à une distance de l'axe neutre égale à $1/2\,b$, le moment d'inertie approché I' de la section considérée sera

$$I' = 2 \times ac \times \frac{b^2}{4} = \frac{ab^2c}{2}$$

et le moment de résistance correspondant I' : v sera

$$\frac{I'}{v} = abc.$$

Cette formule très simple peut surtout rendre des services sur un chantier, lorsque l'on n'a pas besoin d'une grande approximation ; il conviendra cependant de mesurer l'épaisseur c des ailes avec une approximation aussi grande que possible en se servant soit d'un pied à coulisse soit, mieux encore, de la vis micrométrique connue sous le nom de *Palmer*.

Les autres dimensions pourront être évaluées avec les instruments ordinaires de mesure, tels que le mètre de poche.

(*c*) **Nota.** — 1° On ne devra pas oublier, si a, b et c sont évalués en millimètres et si l'on veut que I : v soit donné en prenant le mètre pour unité, de diviser le produit abc par le cube de 1 000, c'est-à-dire par 1 000 000 000, ce qui revient à reculer la virgule de neuf rangs vers la gauche.

Exemple. — Soit

$$a = 200^{mm}, \qquad b = 111^{mm}, \qquad c = 12^{mm},$$

$$abc = 200 \times 111 \times 12 = 266\,400$$

$$\frac{I}{v} = 0{,}000266\,400\,;$$

ce fer est donné par l'album du Creusot (planche 30, fig. 5). Son moment de résistance calculé rigoureusement est

$$\frac{I}{v} = 0{,}000\,288\,033.$$

2° Cette formule approchée donne une valeur en général trop faible pour I : v ; surtout pour les fers *à maximum*, c'est-à-dire à âme épaisse.

241. Albums de forges. — Les principales forges mettent à la disposition du public des albums dans lesquels se trouvent indiqués les profils de tous les fers qu'elles fabriquent. On y trouve notamment pour chaque profil fabriqué :

1° Les dimensions du fer;

2° Son poids par mètre courant ;

3° La valeur de I : v correspondante ;

4° Les charges maxima, *uniformément réparties*, que ces fers peuvent supporter lorsqu'ils reposent librement par

leurs extrémités sur des appuis espacés depuis 2^m jusqu'à 8 ou 10^m, en adoptant pour résistance de sécurité 6, 8 ou 10^k par millimètre carré de section. Ces tableaux facilitent singulièrement les calculs, ainsi que nous allons le montrer.

En voici d'ailleurs un extrait (v. p. 172 et 173) :

Nous avons indiqué dans le tableau ci-après tous les fers à planchers fabriqués par les forges du *Creusot*, de *Maubeuge* et de la *Providence*. Les profils sont classés par valeurs croissantes de b (hauteur totale du fer) et dans chaque groupe de solives, ayant même hauteur b, par valeurs croissantes du moment de résistance $I : v$ (1).

Nous avons d'ailleurs indiqué dans des colonnes spéciales les dimensions des profils, le poids par mètre courant du fer et enfin la forge où la fabrication en est faite.

Nota. — Pour les calculs de résistance, il suffit de connaître les valeurs de $I : v$. Mais pour le calcul des flèches il faut connaître le moment d'inertie, I.

Pour obtenir I on multipliera le $I : v$ donné dans la quatrième colonne par la moitié de la hauteur b donnée dans la première colonne. Pour obtenir la surface de section Ω on divisera le poids, au mètre courant, donné dans la cinquième colonne par 7.800 qui est le poids de un mètre cube de fer, et cela donnera la surface de section, Ω, *rapportée au mètre carré*.

242. **Résistance d'une solive. — Formule dite « de la solive en fer ».** — Soit P la charge uniformément répartie sur la solive, l la distance des appuis; en appliquant la formule d'équarrissage dans laquelle on fait

$$R = 6000000^k \qquad \text{et} \qquad M = \frac{Pl}{8},$$

(1) Ces valeurs sont souvent désignées dans les albums de forges par $1 : n$ ou $1 : N$. En général, ces albums désignent donc par n ou N ce que nous avons appelé v.

on a

$$(1) \qquad Pl = 48000000\,\frac{I}{v}.$$

Telle est la formule « *de la solive en fer* ».

$I : v$ sera donné soit par un album de forges, soit par la formule approchée précédente, $I : v = abc$. Dans ce dernier cas l'expression (1) peut être simplifiée :

En effet, exprimons en *centimètres* les dimensions a, b et c, leur produit sera un million de fois plus grand, de sorte que pour conserver l'égalité (1) il faudra diviser par 1.000.000 le coefficient de a,b,c, nous pouvons donc écrire

$$Pl = 48abc,$$

ou bien en forçant (v. n° 240-*c*. Nota 2°)

$$Pl = 50abc,$$

d'où

$$(2) \qquad P = \frac{50abc}{l}.$$

Exemple : Quel est le poids P, uniformément réparti, que peut supporter une solive en fer de $4^m,50$ de portée et dont les dimensions transversales sont :

$$a = 0^m,12, \qquad b = 0^m,26, \qquad c = 0^m,0135.$$

En appliquant la formule approchée (2) on trouve

$$P = \frac{50 \times 12 \times 26 \times 1,35}{4,5} = 4680^k,$$

tandis que l'application de la formule exacte (1), dans laquelle on aurait remplacé $I : v$ par la valeur donnée dans l'album du Creusot, d'où provient la solive proposée, nous aurait donné

$$P = \frac{48000000 \times 0,000454069}{4,50} = 4843^k.$$

Cet exemple nous montre que la formule approchée (2) peut être adoptée avec sécurité dans un calcul rapide.

§ 2. — Solivages parallèles, en fer

243. **Détails de construction d'un plancher en fer.** — (*a*) *Paillasse des augets.* — Dans les planchers en fer, l'espa-

Fig. 212

cement δ, entre les solives est ordinairement de $0^m,70$, mais il peut aller jusqu'à un mètre. Il est bon de ne pas dépasser et même de ne pas atteindre cette largeur d'espacement.

Entre deux solives voisines, on place, de mètre en mètre, des fers carrés de 0,014 à 0,018 de côté, recourbés comme l'indique la fig. 212 et que l'on nomme *entretoises*. Ces entretoises maintiennent les solives à la distance voulue et s'opposent à leur déversement. Au-dessus des entretoises, et perpendiculairement à leur direction (fig. 213), on place en d, d, d'autres fers carrés de $0^m,01$ de côté nommés *fentons* ou *côtes de vache* ; on en place ainsi deux ou trois par intervalle, ce qui les met à $0^m,20$ ou $0^m,25$ d'axe en axe. Il faut les prendre d'une seule pièce et sceller, autant que possible, leurs extrémités dans les murs.

L'ensemble des entretoises f et des fentons d, d, sert surtout à constituer ce que l'on nomme *la paillasse des augets*.

DIMENSIONS en millimètres			VALEURS DE $\frac{I}{v}$ (le mètre étant l'unité)	POIDS par mètre courant	FORGES d'où proviennent les fers	DIMENSIONS en millimètres			VALEURS DE $\frac{I}{v}$ (le mètre étant l'unité)	POIDS par mètre courant	FORGES d'où proviennent les fers
b	*a*	*e*		kil.		*b*	*a*	*e*		kil.	
80	41	4	0,000 020 550	6,5	Providence.	140	84	10	0,000 124 520	22,3	Maubeuge.
80	39	4,5	0,000 021 087	7,0	Creusot.	140	85	11	0,000 125 438	23,5	Providence.
80	41	4	0,000 021 570	6,5	Maubeuge.	160	47	6	0,000 078 153	13,5	Maubeuge.
80	45	7	0,000 024 304	8,5	Maubeuge.	160	48	6	0,000 084 750	14,0	Providence.
80	45	8	0,000 024 816	8,75	Providence.	160	52,5	6,5	0,000 088 727	15,0	Creusot.
80	55	3,5	0,000 026 771	7,4	Creusot.	160	51	10	0,000 095 313	18,5	Maubeuge.
80	44,5	10	0,000 026 864	10,5	Creusot.	160	54	12	0,000 110 350	21,6	Providence.
80	55	3,5	0,000 028 054	7,5	Maubeuge.	160	58	12	0,000 112 193	23,0	Creusot.
80	57	6	0,000 030 253	10,0	Maubeuge.	160	80	7	0,000 132 600	22,0	Maubeuge
80	60	8,5	0,000 032 132	10,65	Creusot.	160	84	11	0,000 149 700	27,0	Maubeuge.
100	42	5	0,000 032 144	9,0	Creusot.	160	80	6,5	0,000 150 861	22,5	Providence.
100	45	4,5	0,000 034 004	8,5	Maubeuge.	160	90	6,5	0,000 151 993	22,0	Creusot.
100	43	4,5	0,000 034 977	8,70	Providence.	160	95	11,5	0,000 173 326	28,25	Creusot.
100	46	7	0,000 039 143	10,6	Providence.	160	86	12	0,000 175 162	29,5	Providence
100	48,5	8	0,000 040 825	11,5	Maubeuge.	175	80	7	0,000 141 840	19,5	Maubeuge.
100	60	4	0,000 041 479	9,5	Creusot.	175	80	6,5	0,000 142 584	20,0	Providence.
100	47,5	10,5	0,000 041 956	13,0	Creusot.	175	84	11	0,000 162 260	25,0	Maubeuge.
100	60	4,5	0,000 043 200	10,0	Providence.	175	85	11	0,000 168 105	26,0	Providence.
100	60	4	0,000 045 550	10,0	Maubeuge.	180	55	6,5	0,000 119 871	18,0	Providence
100	65	9	0,000 049 812	13,4	Creusot.	180	56,5	7	0,000 121 787	19,5	Creusot.
100	64	7	0,000 049 860	12,5	Providence.	180	55	7	0,000 128 280	18,5	Maubeuge.
100	64	8	0,000 052 200	13,1	Maubeuge.	180	59	11	0,000 149 870	24,0	Maubeuge.
120	45	5	0,000 045 507	9,75	Maubeuge.	180	64,5	15	0,000 159 587	30,0	Creusot.
120	44	5,5	0,000 046 975	10,5	Creusot.	180	64	15	0,000 166 644	29,5	Providence.
120	45	5	0,000 049 044	10,5	Providence.	180	95	7	0,000 198 764	26,0	Creusot.
120	45	8	0,000 052 429	13,0	Maubeuge.	180	100	7	0,000 217 880	27,10	Maubeuge.
120	49,5	11	0,000 060 573	16,0	Creusot.	180	100	9	0,000 220 177	30,0	Providence.
120	50	10	0,000 061 044	15,0	Providence.	180	100	12	0,000 222 977	33,0	Creusot.
120	70	5	0,000 067 328	13,0	Creusot.	180	105	12	0,000 244 880	33,9	Maubeuge.
120	70	5	0,000 074 280	14,0	Maubeuge.	180	107	16	0,000 257 933	40,0	Providence.
120	75	10	0,000 078 450	17,5	Providence.	200	58,5	7,5	0,000 153 765	22,0	Creusot.
120	75	10	0,000 079 328	17,7	Creusot.	200	65	7	0,000 153 800	20,5	Providence.
120	74	9	0,000 083 970	17,7	Maubeuge.	200	64	7,5	0,000 169 980	20,5	Maubeuge.
125	70	5,5	0,000 067 231	13,5	Providence.	200	67,5	11	0,000 193 300	26,0	Maubeuge.
140	47,75	6	0,000 064 808	13,0	Creusot.	200	66	15	0,000 199 880	33,0	Creusot.
140	47	6	0,000 064 902	12,5	Maubeuge.	200	73	15	0,000 207 122	33,0	Providence.
140	47	5	0,000 067 133	12,5	Providence.	200	90	7	0,000 222 910	26,0	Maubeuge.
140	51	10	0,000 077 970	17,0	Maubeuge.	200	100	8	0,000 241 530	29,0	Maubeuge.
140	53,75	12	0,000 084 408	19,0	Creusot.	200	100	7	0,000 244 491	29,0	Creusot.
140	54	12	0,000 090 000	19,8	Providence.	200	94	11	0,000 249 530	34,0	Maubeuge.
140	80	6	0,000 100 349	17,2	Creusot.	200	103	13	0,000 274 860	37,0	Maubeuge.
140	80	6	0,000 109 105	18,0	Providence.	200	105	12	0,000 277 824	36,8	Creusot.
140	80	6	0,000 111 460	18,0	Maubeuge.	200	110	8	0,000 308 330	36,0	Providence.
140	85	11	0,000 116 698	22,7	Creusot.	200	117	15	0,000 354 982	46,5	Providence.

DIMENSIONS en millimètres			VALEURS DE $\frac{I}{v}$ (le mètre étant l'unité)	POIDS par mètre courant	FORGES d'où proviennent les fers	DIMENSIONS en millimètres			VALEURS DE $\frac{I}{v}$ (le mètre étant l'unité)	POIDS par mètre courant	FORGES d'où proviennent les fers
b	*a*	*e*		kil.		*b*	*a*	*e*		kil.	
200	140	15	0,000 421 560	55,0	Maubeuge.	260	120	9	0,000 486 27	43,35	Maubeuge.
200	145	20	0,000 454 890	63,0	Maubeuge.	260	118	9	0,000 501 346	45,5	Providence.
220	64	7,5	0,000 184 013	23,0	Providence.	260	126	15	0,000 517 838	55,2	Creusot.
220	62,5	8	0,000 195 659	25,5	Creusot.	260	125	14	0,000 542 600	55,5	Maubeuge.
220	64	8	0,000 196 800	24,0	Maubeuge.	260	130	9,5	0,000 573 030	51,5	Providence.
220	68	12	0,000 229 090	31,0	Maubeuge.	260	127	18	0,000 602 721	64,0	Providence.
220	72	15	0,000 248 546	36,0	Providence.	260	130	18	0,000 670 746	71,0	Providence.
220	70	15,5	0,000 260 838	38,0	Creusot.	270	80	9	0,000 358 528	35,0	Providence.
220	100	8	0,000 281 880	31,0	Providence.	270	84	13	0,000 407 128	44,0	Providence
220	100	10	0,000 290 700	33,0	Maubeuge.	280	100	10	0,000 479 610	42,0	Maubeuge.
220	95	8	0,000 299 836	33,0	Providence.	280	100	9,5	0,000 485 002	43,5	Providence.
220	105	7,5	0,000 309 637	33,9	Creusot.	280	105	15	0,000 544 950	53,0	Maubeuge.
220	103	13	0,000 314 990	38,0	Maubeuge.	280	108	17	0,000 584 994	60,0	Providence.
220	107	15	0,000 338 347	43,0	Providence.	300	120	11	0,000 608 090	55,0	Maubeuge.
220	100	13	0,000 340 169	41,5	Providence	300	130	10	0,000 652 320	50,2	Maubeuge.
220	110	12,5	0,000 350 046	42,5	Creusot.	300	130	10	0,000 659 935	55,0	Creusot.
						300	138	10	0,000 685 814	54,5	Providence.
235	95	10	0,000 324 046	36,0	Providence et Maubeuge.	300	125	10	0,000 712 768	56,0	Providence
						300	127	18	0,000 713 080	71,0	Maubeuge.
235	100	15	0,000 370 067	45,0	Providence et Maubeuge.	300	135	15	0,000 727 320	62,9	Maubeuge.
						300	136	16	0,000 749 356	69,10	Creusot.
240	66	10	0,000 241 690	28,5	Maubeuge.	300	148	20	0,000 835 814	78,0	Providence.
240	72	16	0,000 299 280	39,0	Maubeuge.	300	135	20	0,000 862 768	80,0	Providence.
240	115	8,5	0,000 370 272	37,6	Creusot.	350	140	12	0,000 979 760	70,0	Maubeuge.
240	121	14,5	0,000 427 872	48,85	Creusot.	350	140	12	0,001 042 500	73,0	Providence.
250	70	8,5	0,000 255 896	28,5	Providence.	350	145	17	0,001 091 350	84,5	Maubeuge.
250	75	13	0,000 304 136	37,0	Providence.	350	146	18	0,001 165 000	89,0	Providence.
250	100	9	0,000 350 635	35,5	Providence.	355	152	12	0,001 157 760	78,0	Providence.
250	100	10	0,000 358 200	36,5	Maubeuge.	355	158	18	0,001 283 785	95,0	Providence.
250	115	10	0,000 377 530	39,5	Maubeuge.	400	140	14	0,001 242 840	82,0	Maubeuge.
250	110	8	0,000 385 070	37,0	Maubeuge.	400	140	14	0,001 283 893	83,0	Providence.
250	120	9	0,000 387 480	39,0	Maubeuge.	400	145	19	0,001 376 170	98,0	Maubeuge.
250	106	15	0,000 413 135	47,0	Providence.	400	145	19	0,001 417 226	99,0	Providence.
250	107	17	0,000 424 470	49,0	Maubeuge.	406	152	13	0,001 423 888	87,0	Providence.
250	116	14	0,000 454 240	48,4	Maubeuge.	406	159	20	0,001 616 196	109,0	Providence.
250	115	9	0,000 455 672	43,5	Providence.	457	185	15	0,002 038 600	111,0	Providence.
250	122	16	0,000 528 589	57,0	Providence.	457	178	22	0,002 282 207	136,0	Providence.
260	68	10	0,000 283 622	32,0	Providence	500	228	20	0,004 064 076	195,0	Providence.
260	68	10	0,000 301 800	32,0	Maubeuge.	500	238	30	0,004 480 800	234,0	Providence.
260	74	16	0,000 351 225	44,0	Providence.	508	203	19	0,003 007 200	150,0	Providence.
260	74	16	0,000 369 470	44,0	Maubeuge.	508	209	25	0,003 265 258	174,0	Providence.
260	100	10	0,000 377 940	40,0	Maubeuge.	515	200	25	0,004 179 110	210,0	Providence.
260	105	15	0,000 434 270	50,0	Maubeuge.	515	210	35	0,004 621 128	250,0	Providence.
260	120	9	0,000 454 069	43,0	Creusot.						

(*b*) *Hourdis*. — Au-dessous des solives on place un plancher provisoire formé de planches d'échafaud maintenues par des *boulins*; puis, au-dessus, on construit des augets entre les solives. Lorsque le plâtre a fait prise, il maintient en

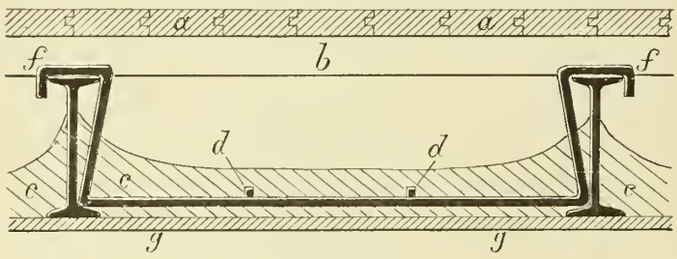


Fig. 213

place les fentons et les entretoises ; on termine alors en plafonnant le dessous et en exécutant l'aire supérieure, comme dans le cas de solives en bois.

On exécute quelquefois le hourdis en moellons et mortier ou bien en briques pleines (A, fig. 214) ou creuses (BCD). Ce dernier mode de construction, surtout celui dans lequel le plâtre est remplacé par le mortier, nous paraît préférable au point de vue de la conservation du métal. En

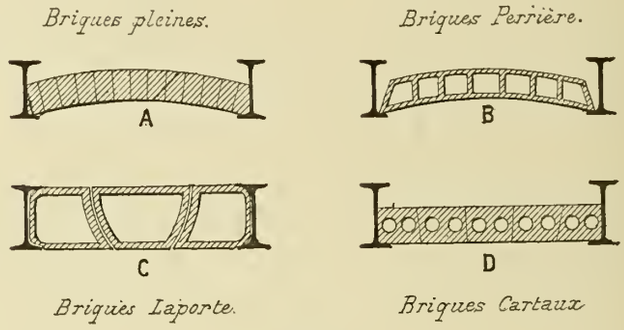


Fig. 214

effet le fer peut s'oxyder complètement lorsqu'il est noyé dans la maçonnerie de plâtre, tandis que placé de la même manière dans la maçonnerie de chaux ou de ciment il se conserve à peu près indéfiniment.

244. **Poids et charges des planchers en fer.** — Le tableau ci-dessous donne le poids mort et le poids utile d'un plancher en fer pour les cas les plus ordinaires.

DÉSIGNATION DES PIÈCES		Epaisseur ordinaire du plancher (*Tout compris*)	PLANCHERS HOURDÉS EN PLATRAS			PLANCHERS HOURDÉS EN BRIQUES CREUSES		
			Poids du plancher	Surcharge	**Charge totale**	Poids du plancher	Surcharge	**Charge totale**
		Mètres	k.	k.	k.	k.	k.	k.
Maisons ordinaires, où les réunions sont peu nombreuses		0,30	275	75	**350**	225	75	**300**
Grandes maisons	Etages lambrissés sous comble	id.	id.	id.	id.	id.	id.	id.
	Chambres à coucher de tous les étages	id.	id	id.	id.	id.	id.	id.
	Cabinets	id.	id.	id.	id.	id.	id.	id.
	Salons et pièces de réception (plus spécialement les 3e et 4e étages)	0,35	300	100	**400**	245	105	**350**
	Grands salons et pièces de réception (plus spécialement les 1er et 2e étages)	0.35	320	130	**450**	260	140	**400**
	Magasins ou boutiques du rez-de-chaussée, pour marchandises d'un faible poids	0,35	300	200	**500**	245	205	**450**
Edifices publics	Bureaux, salles ordinaires	0,30	275	175	**450**	225	175	**400**
	Salles pour les assemblées ordinaires	0,35	300	200	**500**	245	205	**450**
	Salles pour les grandes réunions	0,40	320	280	**600**	260	290	**550**

En résumé, la charge totale varie entre 300 et 600k par mètre carré. Pour les magasins et pour les entrepôts très lourdement chargés on devra chaque fois calculer la charge totale.

245. **Marche à suivre pour le calcul d'un solivage en fer.** — (*a*) **Calcul des charges.** — En général, on établit l'avant-projet en prenant l'un des poids totaux inscrits au

tableau ci-dessus ; cela permet de calculer les dimensions à donner aux solives et d'arrêter leur espacement.

De ce premier projet on déduit le poids réel des solives ainsi que celui des garnissages, et on y ajoute le poids utile, c'est-à-dire la surcharge. Si l'on obtient ainsi une charge peu différente de celle admise tout d'abord, on s'en tient à cette première étude. Si, au contraire, le poids propre du plancher ajouté à la surcharge donne un nombre P′, sensiblement différent du nombre P qui a servi de base, on recommence un nouveau calcul dans lequel on admet comme charge totale ce nouveau nombre P′. En général, ce second projet donne un résultat tout à fait acceptable.

Pour terminer ces considérations relatives à la construction et au calcul d'un plancher, disons que les fers à double T sont en général livrés avec une légère courbure répondant à une flèche d'environ 1/300 ; au moment de la pose on place la convexité tournée en dessus de sorte que, lorsque le plancher est terminé, le poids des garnissages, en détruisant cette flèche, suffit pour donner un parquet sensiblement horizontal.

(*b*) **Emploi des fers à larges ailes.** — On peut faire les planchers avec des fers à larges ailes ou avec des fers ordinaires. Les premiers présentent un moment de résistance $I : v$ relativement fort, bien que leur moment d'inertie I soit plus petit, à égalité de résistance, que celui des fers ordinaires ; cela est dû, pour les fers à larges ailes, à la faible valeur relative de v.

Il en résulte : 1° qu'à égalité de métal, les fers à larges ailes donnent plus de résistance ;

2° Qu'ils exigent moins de hauteur ; mais, par contre,

3° Ils prennent des flèches plus considérables, car dans l'expression des flèches il n'entre au dénominateur que I et non pas $I : v$.

Dans les calculs que nous ferons sur les planchers nous supposerons toujours $R = 6.000.000^k$; mais il est entendu qu'on pourra admettre pour charge de sécurité 8^k et même 10^k par millimètre carré lorsqu'il s'agira de solives. Cependant, pour un poitrail ou une maîtresse poutre, il faudra s'en tenir à 6^k.

246. **1re Application. — Plancher d'une salle de réunion.** — (*a*) **Données.** — Déterminer les dimensions à donner aux solives en fer du plancher d'une pièce pour réceptions ordinaires, sachant que la longueur de cette pièce est $10^m,00$, sa largeur $7^m,00$ et que toutes les solives reposent sur les murs d'appui.

(*b*) **Hauteur des solives ; leur écartement.** — En consultant le tableau de la page 174 on voit que le poids total supporté par le plancher sera de 400^k et que sa hauteur devra être d'environ $0^m,35$. Si de ce dernier chiffre on retranche

l'épaisseur du parquet et des lambourdes	$0^m,09$
puis celle de l'enduit du plafond	$0^m,02$
Total.	$0^m,11$

il reste pour hauteur des solives

$$0,35 - 0,11 = 0,24.$$

C'est ce nombre que nous adopterons.

Pour la répartition des solives, nous diviserons la longueur

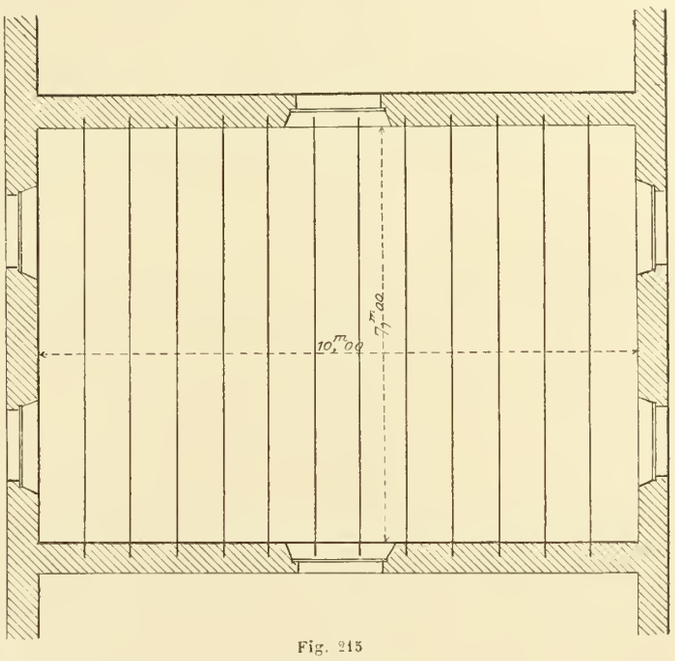


Fig. 215

10^m en 13 parties égales de manière à obtenir, pour écartement d'axe en axe des solives, une distance un peu supérieure à 0,70 ($\delta = 10 : 13 = 0,769$).

(*c*) **Moment de résistance à fournir.** — Du choix de cet intervalle il résulte que le moment fléchissant maximum qui sera développé dans les solives sera

$$M = \frac{Ql^2\delta}{8} = \frac{400 \times 49 \times 0,769}{8} = 1884^{km},05.$$

Appliquons maintenant la formule d'équarrissage, en y remplaçant M par la valeur que nous venons de trouver ; il viendra :

$$\frac{1884,05}{6000000} = \frac{I}{v} = 0,000314010.$$

(*d*) **Choix des solives.** — Dès lors le profil des solives à employer est facile à déterminer. Cherchons dans les albums de forge (v. p. 172) quel est le fer de 0,24 de hauteur dont le moment de résistance $I : v$ est le plus voisin de celui que nous venons de trouver ; nous voyons que l'usine du Creusot livre au commerce un fer de $0,24 \times 0,115 \times 0,0085$ dont le poids est $37^k,6$ par mètre courant et dont le moment

de résistance est

$$\frac{I}{v} = 0{,}000\,370\,272,$$

c'est-à-dire un peu plus que ce qui nous est nécessaire.

C'est ce fer que nous prendrons.

(*e*) **Autres solutions.** — Lorsqu'on n'est pas absolument lié par la hauteur à donner aux solives, on peut faire varier cette hauteur de $0^m,01$ ou $0^m,02$ de manière à se rapprocher autant que possible du moment de résistance nécessaire, tout en réduisant le poids de fer par mètre courant.

Ainsi, dans l'exemple que nous avons choisi, on pourrait adopter des solives de $0{,}235 \times 0{,}95 \times 0{,}01$ livrées par les forges de la Providence et les forges de Maubeuge. Le moment de résistance de ces profils est

$$\frac{I}{v} = 0{,}000\,324\,046$$

et le poids du mètre courant est de 36^k.

Enfin en prenant aux forges de la Providence le fer dont le profil est

$$0{,}250 \times 0{,}100 \times 0{,}009$$

on obtient un moment de résistance

$$\frac{I}{v} = 0{,}000\,350\,635$$

et le poids du mètre courant de solive est alors $35^k,5$.

247. **2e Application — Plancher d'un magasin sous route charretière.** — (*a*) **Données.** — Un magasin de $6^m,12$ de longueur sur $2^m,70$ de largeur (fig. 216) établi sous une voie charretière de $7^m,00$ de large doit être couvert par des voûtes en briques reposant sur des fers en double **T**. Déterminer les dimensions de ces fers sachant 1° que le poids des voûtes en briques, du béton et du pavage qu'elles supportent est de 1400^k par mètre carré ; 2° que la longueur du magasin ($6^m,12$) doit correspondre à trois voûtes en briques ; 3° que les voitures qui passeront au-dessus du magasin pourront peser 4000^k par essieu, soit 2000^k par roue.

On prendra pour résistance de sécurité

$$R = 8\,000\,000^k.$$

Nota. — Des magasins sont construits, dans ces conditions, sous les quais de Paris.

(*b*) **Charges et moments.** — D'après les données du problème, on voit que chacun des fers dont il s'agit de déterminer les dimensions devra résister :

1° A une charge uniformément répartie égale à

$$\frac{6{,}12 \times 2{,}70 \times 1400^k}{3} = 7711^k ;$$

2° A deux charges concentrées égales à 2000^k et appliquées aux points où passeront les roues des voitures circulant au-dessus du magasin. En admettant, comme écartement des roues, $1^m,70$, on voit facilement que le cas le plus défavorable, pour la résistance des fers, sera celui où l'une des roues passera au-dessus du milieu de la poutre, l'autre se trouvant hors de la portée ; la charge concentrée P_1, agissant alors, sera 2000^k et le moment fléchissant M_1 développé par cette force aura pour valeur

$$M_1 = \frac{P_1}{2} \times \frac{l}{2} = 1000 \times 1{,}35 = 1350^{km} ;$$

d'ailleurs le moment fléchissant M_2 dû à la charge P_2 uniformément répartie a pour expression :

$$M_2 = \frac{P_2}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{7711}{4} \times 1{,}35 = 2602^{km}.$$

Le moment total sera donc

$$M = 1350 + 2602 = 3952^{km}.$$

Cette valeur obtenue, introduisons-la dans l'équation d'équarrissage dans laquelle nous ferons aussi $R = 8\,000\,000$; il viendra

$$\frac{3952}{8000000} = \frac{I}{v} = 0{,}000\,494\,000.$$

Telle est la valeur du moment de résistance que devra présenter la poutre choisie.

(*c*) **Choix des solives.** — Il ne nous reste plus qu'à rechercher, dans les albums de forge, l'échantillon dont le moment de résistance $I : v$ se rapproche le plus, *en excès*, de celui qui nous est nécessaire ; nous aurons soin, si plusieurs d'entre eux sont admissibles, de donner la préférence au fer dont le poids par mètre courant est le moindre.

En consultant les tableaux de la page 172, on trouve un fer de

$$0{,}26 \times 0{,}118 \times 0{,}009$$

provenant des forges de la Providence dont le moment de résistance est

$$\frac{I}{v} = 0{,}000\,501\,346$$

et dont le poids par mètre est $45^k,5$.

C'est cet échantillon que nous adopterons.

(*d*) **Poids des fers.** — En remarquant que chaque poutre a comme longueur, en comptant 0,20 d'encastrement,

$$2{,}70 + (2 \times 0{,}20) = 3^m,10,$$

le poids du fer à employer sera donc

$$2 \times 3{,}10 \times 55{,}6 = 282^k.$$

248. **Solution graphique du problème du solivage parallèle en fer.** — Toutes les questions relatives aux planchers en fer, avec solives parallèles, reviennent, en somme, à la résolution de l'équation

$$\frac{I}{v} = \frac{Ql^2\delta}{48000000}$$

L'abaque n° 5, dessiné page 178, les résout pour les solivages parallèles en fer, comme l'abaque n° 3 le faisait pour les solivages parallèles en bois. Voici les principales questions qu'il résout (on suppose $R = 6\,000\,000^k$) :

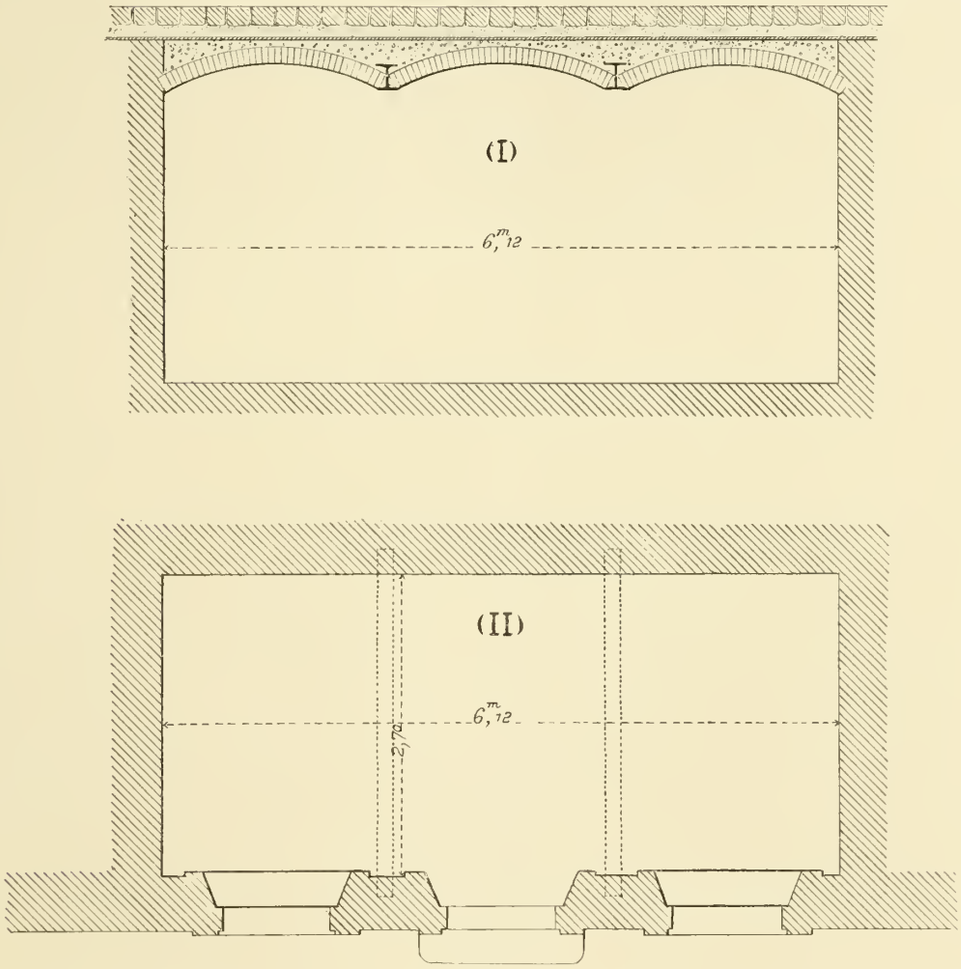


Fig. 216

1re Question. — Construire un plancher en fer, de 5,00 de portée, dont la charge totale est 500^k par mètre carré et dans lequel les solives sont espacées de $0^m,70$ d'axe en axe.

Il faut déterminer le moment de résistance. Nous en obtiendrons la valeur en évaluant l'abscisse du point de l'oblique, $\delta = 0,70$, qui a la même ordonnée que le point d'intersection de la verticale $Q = 500$ avec la droite $l = 5^m,00$.

Prenons (fig. 217) en m le point de la droite $l = 5^m,00$ dont l'abscisse est $Q = 500$; puis, menons l'horizontale mn jusqu'à la rencontre de la droite $\delta = 0,70$; l'abscisse du point n nous donne la valeur cherchée

$$\frac{I}{v} = \frac{182}{1000000} = 0,000182000$$

Il ne reste plus qu'à choisir dans le tableau de la page 172 le fer qui convient le mieux au point de vue de la résistance et du poids par mètre courant.

2e Question. — Avec un fer donné, pour lequel $I : v = 0,000154$, construire un plancher de 5,50 de portée

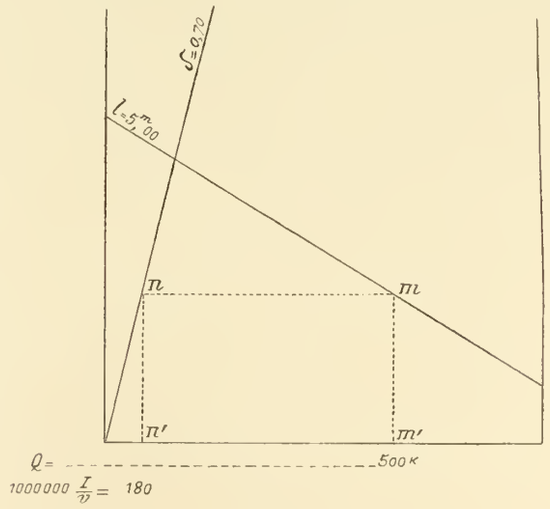


Fig. 217

dont la charge totale soit 350^k par mètre carré.

ABAQUE N° 5 (fig. 220)
Servant à calculer un
plancher, à solivage parallèle, en fer.

L'inconnue est l'écartement δ et la droite δ qui répond à la question doit passer par le point dont l'abscisse est

$$1\,000\,000\,\frac{I}{v} = 154$$

et dont l'ordonnée est égale à celle du point d'intersection de la droite $l = 5{,}50$ avec la verticale $Q = 350$.

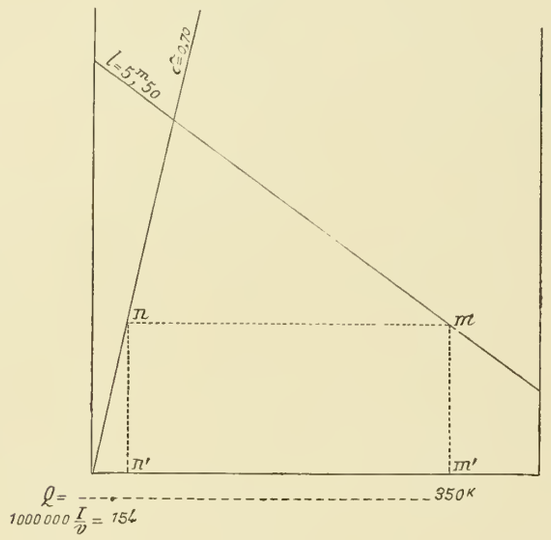


Fig. 218

Prenons en m (fig. 218) le point de la droite $l = 5{,}50$ dont l'ordonnée est $Q = 350^k$; puis menons l'horizontale mn jusqu'à sa rencontre avec la verticale du point $1000000\,\frac{I}{v} = 154$.

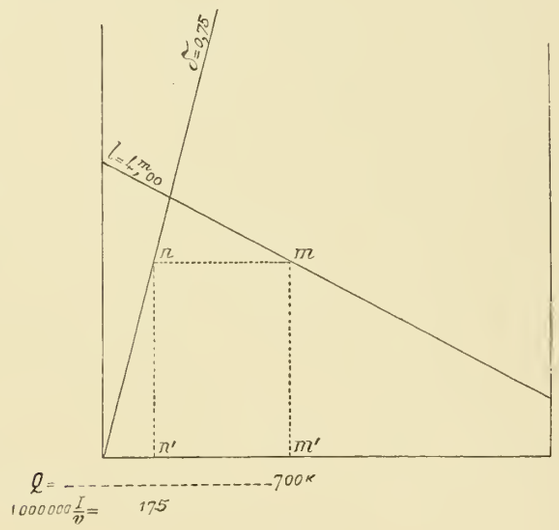
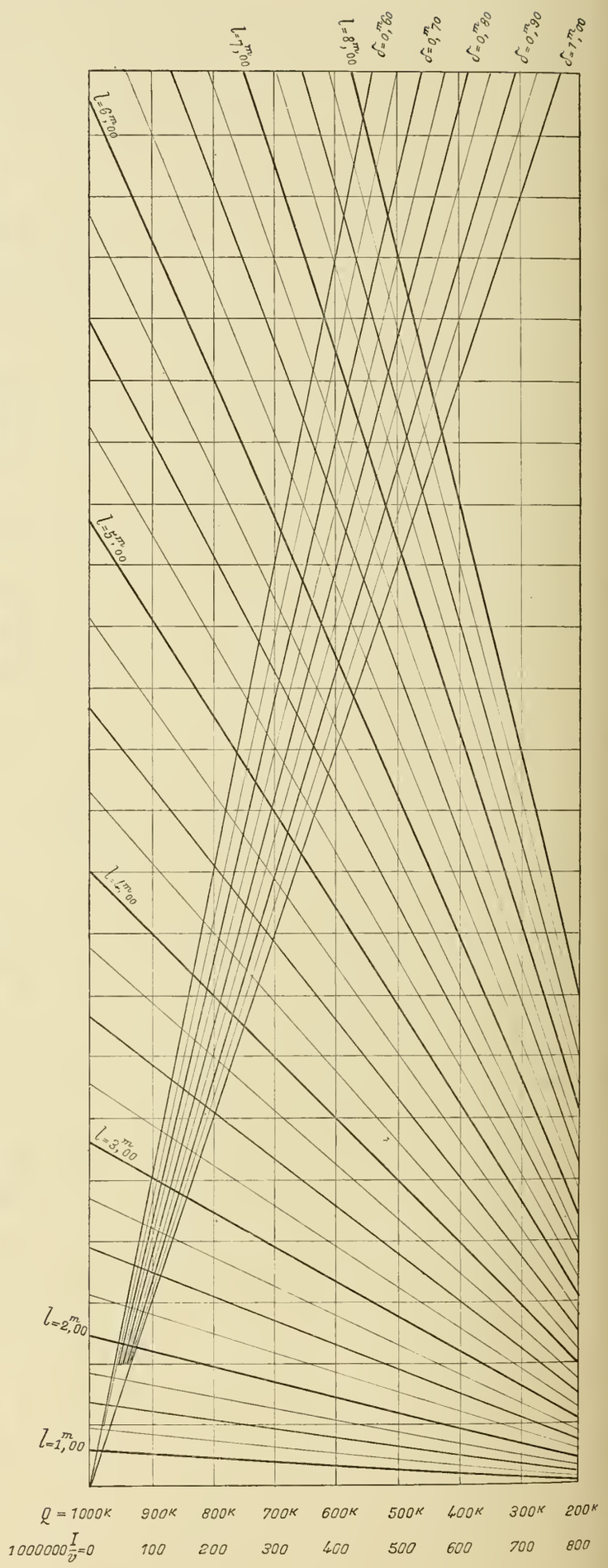


Fig. 219

Le point n ainsi obtenu se trouve sur la droite $\delta = 0{,}70$. Tel devra être l'écartement d'axe en axe des solives.



3e Question. — Un plancher de $4^m,00$ de portée est construit avec des solives espacées de 0,75 d'axe en axe et dont le moment de résistance $I : v = 0,000175$; quelle charge pourra-t-on lui faire supporter?

La charge Q sera donnée par l'abscisse du point de la droite $l = 4,00$ dont l'ordonnée est égale à celle du point de la droite $\delta = 0,75$ dont l'abscisse est

$$1\,000\,000 \frac{I}{v} = 175.$$

Prenons en n (fig. 219) le point d'intersection de la droite $\delta = 0,75$ avec la verticale $1000000 \frac{I}{v} = 175$; puis, menons par ce point une horizontale jusqu'à la rencontre de la droite $l = 4^m,00$; l'abscisse du point m ainsi obtenu nous fait connaître la valeur de Q. On a ainsi

$$Q = 700^k.$$

Telle pourra être la charge totale à imposer au plancher. Le poids mort de ce plancher pouvant être évalué approximativement à 350^k, il restera donc, comme charge utile, 350^k par mètre carré.

§ 3. — Solivages, en fer, surchargés et enchevêtrés

249. Solives supportant des cloisons longitudinales. — (*a*) **Poids ordinaires des cloisons.** — Lorsqu'une *cloison légère* doit être placée dans le sens des solives, on répartit ces dernières de telle sorte que l'une d'elles soit sous la cloison.

Cette solive aura donc à supporter, comme toutes les autres, le poids P du plancher et en outre le poids P′ de la cloison, ces poids P et P′ étant uniformément répartis.

Voici les poids qu'on pourra adopter pour les cloisons légères :

Cloisons en briques creuses, Cloisons légères en carreaux de plâtre et menuiserie.	10^k par mètre carré de cloison et par centimètre d'épaisseur.

Il faut ajouter à ce poids celui de l'enduit en plâtre, pour lequel on adopte 14^k par mètre carré et par centimètre d'épaisseur. En général l'enduit en plâtre a 0,01 d'épaisseur sur chaque face.

(*b*) **Exemple.** — Calculer le poids d'une cloison en briques creuses de $5^m,00$ de longueur, de 4,10 de hauteur et de 0,08 d'épaisseur, enduits compris.

Pour 1 mètre carré de cette cloison, on a :

Enduits 2×14^k	28^k
Cloison $(8 - 2) \times 10^k$	60^k
Poids par mètre carré de cloison	88^k

La cloison entière pèsera donc

$$5,00 \times 4,10 \times 88^k = 1804^k, \text{ soit } 1800^k.$$

Le poids du mètre linéaire de cloison sera donc

$$\frac{1800}{5} = 360^k.$$

On peut en effet, dans un avant-projet, estimer entre 75 et 100^k le poids d'un mètre carré de cloison légère et, avec les hauteurs habituelles d'étages, entre 250 et 400^k le poids d'un mètre linéaire de même cloison.

Les fortes cloisons en briques pleines, que l'on place en général aux rez-de-chaussée, pèsent beaucoup plus et ne devront être établies en porte à faux qu'en calculant tout spécialement la poutre, nommée *poitrail* ou *filet*, sur laquelle on devra les supporter.

Dans ces calculs on devrait tenir compte du vide des portes, mais il est plus prudent de ne pas le faire.

Comparons la charge que nous avons ainsi trouvée ci-dessus à la charge du plancher.

Si nous admettons, pour intervalle entre les solives, $\delta = 0^m,75$ et une charge moyenne de plancher $Q = 450^k$ par mètre carré, cette charge répondra à un poids de $450 \times 0,75$ par mètre linéaire de solive, soit 337^k, nombre à peu près égal au précédent. Nous pourrons donc énoncer la règle suivante.

(*c*) **Règle** (*usuelle à Paris*). — Une cloison légère (briques creuses ou carreaux de plâtre logés dans un bâti en menuiserie) équivaut à peu près comme poids, *dans un plancher en fer*, à la charge que supporte naturellement la solive.

Cela justifie la pratique ordinaire des constructeurs parisiens qui consiste, lorsqu'ils ont une cloison longitudinale à supporter, à placer deux solives courantes, au lieu d'une, au-dessous de la cloison.

(*d*) **Observations.** — 1° Cette pratique ne se justifierait pas pour un plancher en bois dans lequel l'espacement δ

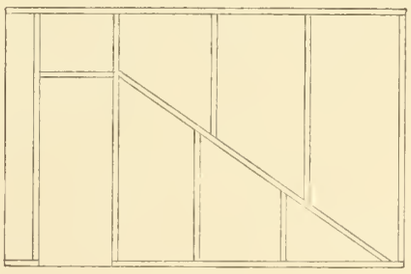


Fig. 221

est moindre que dans les planchers en fer. Ainsi en supposant dans un plancher en bois $\delta = 0,35$ ou 0,40, la charge,

due au plancher correspondant à chaque solive, sera la moitié de ce qu'elle est avec l'écartement $\delta = 0,75$; elle sera donc aussi la moitié du poids de la cloison légère; d'où il résulte que sous celle-ci il faudrait tripler la largeur de la solive en bois.

2° Si la cloison est construite avec bâti en menuiserie, il sera bon de le faire *en décharge*, c'est-à-dire de reporter le plus possible, au moyen d'écharpes, une partie de son poids près des murs d'appui, comme l'indique la fig. 221.

250. **Solives supportant des cloisons transversales.** — (*a*) **Formules de majoration.** — Dans ce cas, chaque solive prend pour son compte une bande verticale de cloison dont la longueur est δ et dont la hauteur est H (H étant la hauteur de l'étage). Nous sommes donc dans les mêmes conditions que lorsque nous avons étudié les solives d'enchevêtrure.

Soient Q la charge normale du plancher par m^2; Q′ le poids de la cloison par m^2.

La solive recevra une charge uniformément répartie $P = Q\delta l$, provenant du plancher, et une charge concentrée en un point $P' = Q'\delta H$, qui est le poids dû à la cloison.

C'est le problème de la poutre surchargée et nous savons (v. n° 214 et suivants) que si K′ est le rapport dans lequel la surcharge P′ divise la *demi-longueur* de la solive on a, pour le moment fléchissant M′, un choix à faire entre deux formules qui sont

$$M' = \frac{Pl}{8}\left(1 + K\frac{P'}{P}\right)^2;$$

c'est la formule du *maximum tangentiel*; ou

$$M'' = \frac{Pl}{8}\left[K(2 - K)\left(2\frac{P'}{P} + 1\right)\right];$$

c'est la formule du *maximum anguleux*.

Dans chaque formule on aura : $m = \frac{P'}{P} = \frac{Q'H}{Ql}$.

Nous avons vu aussi que l'abaque n° 1 (page 144) résolvait plus simplement le problème en faisant, lui-même, le choix entre les deux formules.

(*b*) **Exemple.** — Dans un plancher en fer de 5,00 de portée, dont le solivage a été calculé à raison de 450^k par mètre carré, on place à $1^m,20$ du mur une cloison de $4^m,10$ de hauteur pesant 88^k par mètre carré. On demande quelle sera, dans ce cas, le coefficient de renforcement.

On fera dans les formules de majoration :

$$Q = 450^k, \quad Q' = 88^k, \quad l = 5^m,00, \quad H = 4^m,10.$$

$$m = \frac{P'}{P} = \frac{Q'H}{Ql} = \frac{88^k \times 4,10}{450 \times 5,00} = 0,16$$

$$K = \frac{1,20}{2,50} = 0,48\,; \qquad Km = 0,0768.$$

La formule du maximum tangentiel donne

$$M' = \frac{Pl}{8}(1 + 0,0768)^2 = \frac{Pl}{8} \times 1,16.$$

La formule du maximum anguleux donne

$$M'' = \frac{Pl}{8} \times 0,48 \times 1,52 \times 1,32 = \frac{Pl}{8} \times 0,973.$$

C'est donc la première qu'il faut employer : autrement dit, il faut renforcer chaque solive dans la proportion de 1,16 à 1,00, c'est-à-dire de 16 0/0.

L'abaque de la page 144 nous conduit plus vite au même résultat de la manière suivante :

1° On prend l'abscisse $Km = 0,0768$.

2° L'ordonnée correspondante de la parabole est 1,16, ce qui donne bien pour M′ la valeur ci-dessus.

3° Il n'y a pas lieu de considérer les tangentes à la parabole, car la tangente répondant à $K = 0,48$ se sépare de la parabole bien au-delà du point qui vient d'être trouvé.

Nota. — Il nous serait facile de montrer que, comme dans l'exemple précédent, avec les données usuelles des constructions ordinaires, surtout en France, ce sera toujours la formule du maximum tangentiel qu'il faudra employer pour les solives qui supportent des cloisons transversales.

251. **Chevêtres et solives d'enchevêtrure.** — (*a*) **Analogie avec les planchers en bois.** — Tout ce que nous avons dit au sujet des coefficients de majoration qui conviennent aux chevêtres et aux solives d'enchevêtrure pour les planchers en bois (v. n° 228) s'applique encore aux planchers en fer; seulement, comme ici l'intervalle entre les solives est plus grand que dans les planchers en bois, les valeurs des coefficients de majoration ne seront pas les mêmes dans les deux cas. Pour les planchers en fer ils sont environ moitié moindres. Nous ne referons pas les calculs.

(*b*) **Choix des solives renforcées.** — Connaissant la force à donner aux solives courantes et le moment de résistance qui leur convient, comme en général la hauteur totale du plancher est une des données de la construction, en en retranchant la somme des hauteurs du parquet, des lambourdes et du plafond, soit en tout $0^m,11$, la différence donnera la hauteur des solives.

On prendra alors, dans un album de forges ou dans notre tableau de la page 172, le fer dont la hauteur et le moment de résistance répondent aux conditions imposées. Ce fer sera le type du solivage.

Pour les solives renforcées on choisira, dans les mêmes albums ou dans notre même tableau, parmi les fers de même hauteur mais de résistance plus grande. On aura en général à sa disposition soit des fers à *maximum*, soit des fers à larges ailes.

(*c*) **Résumé de la marche à suivre.** — Pratiquement, la marche à suivre consistera :

1° A calculer la *solive type*, c'est-à-dire celle que l'on emploierait si le solivage était parallèle et sans aucune surcharge ;

2° A déterminer pour chaque pièce renforcée (solive d'enchevêtrure, chevêtre, linçoir, solive sous cloison, etc.), le coefficient de majoration ;

3° A multiplier le moment de résistance de la *solive type* par les divers coefficients de majoration, ainsi trouvés, ce qui donnera le moment de résistance des solives renforcées ;

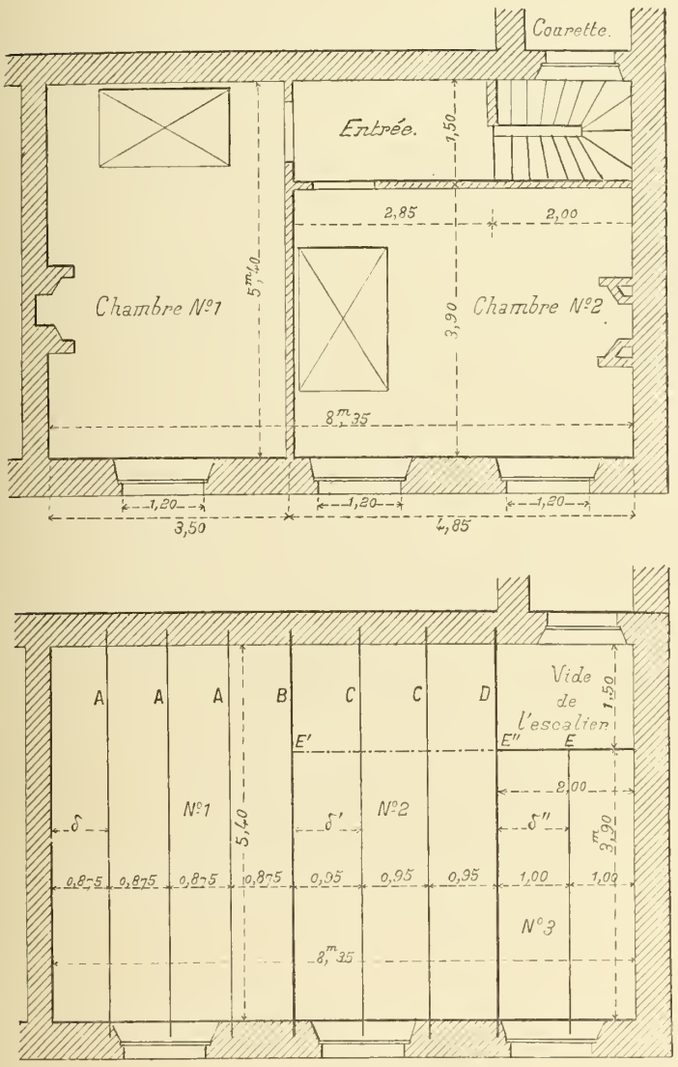


Fig. 222

4° A choisir dans les albums de forges, parmi les échantillons de la hauteur voulue, ceux dont le moment de résistance se rapproche le plus, *par excès*, des moments de résistance calculés. Nous fixerons les idées par l'application suivante.

252. **Application : plancher d'un petit logement.** — (*a*) **Problème à résoudre.** — On veut couvrir, par un plancher en fer, le dessus d'une boutique située au rez-de-chaussée et ménager, à l'entresol, une distribution composée d'une entrée et de deux chambres à coucher avec petit escalier de $0^m,75$ d'emmarchement.

La hauteur H de l'entresol est, sous plafond, $H = 2^m,80$.

La charge par mètre carré de plancher sera $Q = 300^k$ et la résistance de sécurité du fer sera de 10^k pour les solives ordinaires. Enfin, les cloisons légères seront en briques creuses et pèseront 88^k par mètre superficiel $Q' = 88$.

Pour les dimensions des pièces voir la fig. 222.

En principe, les solives porteront sur le mur de face et sur les murs de refends. Nous supposerons que les linteaux des fenêtres sont assez solides pour supporter, en un point quelconque, les abouts des solives. On obtient ce résultat en consolidant, si cela est nécessaire, les linteaux par des solives en fer noyées dans la maçonnerie.

(*b*) **Projet de distribution des solives.** — 1° En B, au-dessous de la cloison qui sépare les chambres 1 et 2, nous placerons une *solive renforcée* que nous aurons à calculer.

2° En D, une solive d'enchevêtrure qui recevra en E'' l'extrémité d'un chevêtre E''E, destiné à ménager dans le plancher un vide pour le passage de l'escalier. Cela fait : au point de vue du solivage courant, nous aurons à considérer séparément les espaces n° 1, n° 2 et n° 3.

Déterminons d'abord les intervalles δ, δ' et δ'' des solives de chacun de ces espaces.

Prenant comme point de départ un intervalle δ de $0^m,90$, nous essaierons, au compas, d'inscrire cet écartement dans les largeurs des espaces à couvrir et en forçant dans un sens ou dans l'autre nous déduirons les intervalles définitifs.

On conçoit qu'il peut y avoir plusieurs solutions : nous étudierons celle choisie sur la fig. 222. Nous engageons le lecteur à en étudier d'autres et à comparer.

Dans l'espace	n° 1	l'intervalle	$\delta = 0.875$
—	n° 2	Id.	$\delta' = 0.950$
—	n° 3	Id.	$\delta'' = 1.000$.

(*c*) **Marche des calculs.** — Nous calculerons le moment de résistance $I : v$ que chaque solive devra présenter et nous en dresserons un tableau.

2° Nous choisirons ensuite dans le tableau de la page 172, les fers dont les moments de résistance se rapprochent le plus des $I : v$ calculés. Nous éviterons, surtout pour les solives surchargées, l'emploi des fers dont le moment de résistance serait approché par défaut.

3° Nous terminerons par une évaluation du poids des fers employés et nous pourrons en déduire le prix de revient.

(*d*) **Données numériques et formules.** — Nos données et nos formules sont résumées comme suit :

Charge du plancher. . . . . $Q = 300^k$ par m^2.

Poids des cloisons : $Q' = (88^k \times 2{,}80)$. . . . } $Q' = 246^k{,}4$ par mètre linéaire.

Portée du plancher. . . . . $l = 5{,}40$, $1/2\ l = 2{,}70$.

Rapport de division par le chevêtre de la solive d'enchevêtrure. . . . . } $K = \frac{1{,}50}{2{,}70} = 0{,}554$ soit $0{,}56$.

Intervalle entre les solives. } dans l'espace N° 1 $\delta = 0{,}875$.
» » N° 2 $\delta' = 0{,}950$.
» » N° 3 $\delta'' = 1{,}000$.

Résistance de sécurité du fer : $R = 10.000.000^k$.

Les formules usuelles sont :

$$\text{(A)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{M}{R} = \frac{Pl}{80\,000\,000},$$

P étant la charge totale uniformément répartie sur la solive. Pour les solives surchargées on a :

$$\text{(B)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{Pl}{80\,000\,000}\left(1 + K\frac{P'}{P}\right)^2,$$

P′ étant la surcharge ajoutée à P.

(*e*) **Solivages**. — *Solivage n° 1*. — En appliquant les données ci-dessus dans la formule (A), on a

$$\text{(1)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{300 \times \overline{5{,}40}^2 \times 0.875}{80\,000\,000} = 0{,}000\,095\,681.$$

Solivage n° 2. — Dans l'espace n° 2 nous aurons à tenir compte de la cloison transversale EE″. Si donc nous introduisons dans la formule (B) les données du problème, nous obtenons

$$\text{(2)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{300 \times \overline{5{,}40}^2 \times 0{,}95}{80\,000\,000}\left(1 + 0{,}554\,\frac{246{,}4}{300 \times 5{,}40}\right)^2$$
$$= 0{,}000\,122\,315.$$

Solivage n° 3. — En appliquant la formule (A) dans laquelle on fera $l = 3.90$, on aura :

$$\text{(3)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{300 \times \overline{3{,}90}^2 \times 1{,}00}{80\,000\,000} = 0{,}000\,057\,037.$$

(*f*) **Pièces surchargées.** — 1° *Chevêtre*. — Sa longueur est $l = 2.00$; il supporte le poids uniformément réparti dû à la cloison qui sépare l'escalier et la chambre n° 2

$$P = 246^k{,}4 \times 2.00 = 492^k{,}8$$

et, en outre, il supporte en son milieu la moitié de la charge supportée par la solive boiteuse

$$P' = \frac{1}{2} \times 300 \times 3{,}90 = 585^k.$$

Le moment fléchissant maximum M_1 développé par la première charge est

$$M_1 = \frac{492^k{,}8 \times 2{,}00}{8} = 123^{km}{,}2.$$

Celui M_2, dû à la charge concentrée, est

$$M_2 = \frac{585 \times 2{,}00}{4} = 292^{km}{,}5.$$

Le moment fléchissant définitif M sera donc

$$M = M_1 + M_2 = 415^{km}{,}7.$$

En introduisant cette valeur dans l'équation

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{v},$$

on en déduit

$$\text{(4)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{415{,}7}{10\,000\,000} = 0{,}000\,041\,570.$$

2° *Solive sous la cloison longitudinale* B. — Nous ne tiendrons pas compte de la cloison transversale qui vient s'y buter, à cause de la présence de la porte qui ne pèse presque pas. Nous considérerons donc la solive comme chargée de deux poids uniformément répartis et dus, le 1er à la largeur du plancher égale à $1/2(0.875 + 0.950) = 0.9125$, le 2e à la cloison.

La première charge est $P = 0.9125 \times 300^k \times 5.40 = 1478^k$

la 2e $P' = 246.^k4 \times 5.40 = 1.331^k$.

On a donc

$$P + P' = 1478 + 1331 = 2809^k.$$

En appliquant la formule A il vient

$$\text{(5)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{2809 \times 5{,}40}{80\,000\,000} = 0{,}000\,189\,607.$$

3° *Solive d'enchevêtrure*. — Considérons-la comme une solive courante du type n° 2 qui recevrait au point E″ ($K = 0.56$) le poids que lui transmet le chevêtre auquel on ajoutera la surcharge de la cloison ; nous ne déduirons pas la décharge due au vide de l'escalier ; nous aurons ainsi un excès de sécurité.

Le poids P du plancher est

$$P = 300 \times 5.40 \times 0\ 95 = 1539^k.$$

Quant au poids de surcharge P′ il se compose :

1° De la charge transmise par le chevêtre qui est

$$\frac{1}{2}(585 + 492{,}8) = 538^k{,}9\,;$$

2° Du poids de la cloison correspondant au demi-intervalle de gauche, c'est-à-dire

$$246{,}4 \times \frac{0{,}95}{2} = 117^k.$$

On aura donc

$$P' = 538.9 + 117 = 655{,}9, \quad \text{soit } 656^k.$$

En appliquant la formule (B) on obtient

$$\text{(6)} \qquad \frac{I}{v} = \frac{1539 \times 5{,}40}{80\,000\,000}\left(1 + 0{,}56 \times \frac{656}{1539}\right)^2 = 0{,}000\,159\,470.$$

Nous pouvons maintenant dresser le résumé suivant à l'aide du tableau des fers de la page 172.

(*g*) Tableau des fers employés

Nos d'ordre	Désignation des pièces	Moments de résistance $\frac{I}{v}$ calculés	Solives employées : Moments de résistance $\frac{I}{v}$ réels	Dimensions en millimètres : *b*	*a*	*e*	Poids par mètre courant	Provenance
1	Solivage n° 1	0,000 095 681	0,000 095 313	160	51	10	18k,5	Forges de Maubeuge
2	Solivage n° 2	0,000 122 315	0,000 132 600	160	80	7	22 ,0	— de Maubeuge
3	Solivage n° 3	0,000 057 037	0,000 078 153	160	47	6	13 ,5	— de Maubeuge
4	Chevêtre (E).	0,000 041 570	0,000 078 153	160	47	6	13 ,5	— de Maubeuge
5	Solive sous cloison (B) .	0,000 189 607	0,000 198 764	180	95	7	26 ,0	— du Creusot
6	Solive d'enchevêtrure (D).	0,000 159 470	0,000 198 764	180	95	7	26 ,0	— du Creusot

(*h*) **Détails de construction et poids des fers.** — Les solives nos 1, 2, 3 et le chevêtre ont comme hauteur 0m,16 tandis que les solives B et D ont 0,18. Cette différence obligera à entailler les lambourdes en bois, du parquet, de 0,02 au-dessus de ces dernières solives.

Pour terminer notre étude il ne nous reste plus qu'à évaluer le poids de métal nécessaire au solivage.

Le tableau ci-après nous fait connaître ce renseignement dont on pourra déduire le prix de revient.

Poids totaux des fers

Nos d'ordre	Désignation des pièces.	Longueurs réelles	Poids par mètre courant	Poids d'une solive	Nombre de solives semblables	Poids total (en kilog.)
1	Solivage N° 1	5,80	18k,5	107,30	3	321,90
2	» N° 2	5,80	22k,0	127,60	2	255,20
3	» N° 3	4,10	13k,5	55,35	1	55,35
4	Chevêtre (E)	2,20	13k,5	29,70	1	29,70
5	Solive sous cloisons (B)	5,80	26k,0	150,80	1	150,80
6	Solive d'enchevêtrure (D) . . .	5.80	26k,0	150,80	1	150,80
			Total			963k,75

(*i*) **Nota.** — 1° Les planchers en fer à travures composées, c'est-à-dire formés de poutres et de solives, seront étudiés au chapitre suivant à propos des **poutres** *composites* construites en fers assemblés et rivés.

2° Les écartements

$$\delta = 0^m,875, \qquad \delta' = 0^m,950, \qquad \delta'' = 1^m,000,$$

que nous avons adoptés, sont un peu trop grands. Il ne faudrait guère, à Paris surtout, dépasser 0m70 pour une construction ordinaire. Dans ce cas, il faudrait mettre une solive de plus dans chacun des espaces 1, 2 et 3, ce qui donnerait :

$$\delta = 0,700, \qquad \delta' = 0,712, \qquad \delta'' = 0,633.$$

Nous engageons le lecteur à refaire les calculs avec ces données nouvelles et à comparer. Des intervalles trop grands feraient supporter aux entretoises (v. n° 243) des poids d'augets trop considérables.

CHAPITRE V

PIÈCES D'ÉGALE RÉSISTANCE

§ 253. **Introduction.** — Dans les exemples de poutres étudiés précédemment nous avons vu : 1° que le moment fléchissant variait d'une section à une autre ; 2° que, dans une même section, travaillant à la flexion, les fibres étaient soumises à des efforts unitaires d'autant plus grands qu'elles étaient à une distance plus considérable de l'axe neutre, et 3° qu'il était nécessaire que la fibre extrême de chaque section supportât un effort unitaire inférieur ou, *au plus*, égal à la résistance de sécurité.

Si dans la plupart des sections la fibre extrême subissait un effort unitaire moindre que la résistance de sécurité, nous serions dans des conditions qui nous donneraient, il est vrai, toute sécurité ; mais, au point de vue de l'économie, nous aurions mal employé la matière; la poutre ne serait pas une pièce d'égale résistance. Nous pouvons donc dire :

Une pièce est dite d'égale résistance lorsque l'effort unitaire maximum que ses fibres supportent est le même dans toutes les sections.

Il est évident que telle pièce qui serait d'égale résistance pour des efforts déterminés de flexion ne le sera probablement pas pour les efforts tranchants correspondants ; c'est pourquoi il y aurait lieu d'étudier quatre genres de pièces d'égale résistance correspondant à la traction (ou à la compression), à la flexion, au cisaillement et à la torsion.

Les effets de flexion étant, en général, les plus dangereux, les pièces d'égale résistance à la flexion sont les plus importantes à connaître. Ce sont elles que nous allons étudier.

Ce chapitre comportera deux sections. La première sera consacrée aux poutres d'égale résistance en tôle ; on pourrait donc la considérer comme faisant partie du chapitre précédent où elle aurait pu figurer sous le titre de : *Planchers à travures composées.*

Nous verrons que pour ces poutres les excès de matière à fournir, pour leur permettre de résister également bien partout, s'obtiendront par des additions de feuilles de tôle qui, à première vue tout au moins, n'en modifieront pas sensiblement la forme ; ces poutres paraîtront droites.

La seconde section sera consacrée aux solides *à figure d'égale résistance*, c'est-à-dire aux pièces en bois, en fonte ou en pierre dont la figure, souvent assez compliquée, sera calculée pour leur assurer une résistance également bien distribuée partout.

1re SECTION

POUTRES D'ÉGALE RÉSISTANCE, EN TOLE

§ 1. — POUTRES COMPOSITES A AME PLEINE

254. **Descriptions et définitions.** — (*a*) **Poutres composites en double T.** — Les poutres *laminées* sont celles que nous avons étudiées au chapitre précédent ; elles sortent du laminoir avec la forme définitive qu'elles doivent avoir. On ne peut exécuter ainsi que des fers ayant des dimensions, en section droite, peu considérables.

Si l'on veut des poutres ayant un très grand moment de résistance il faut les constituer, de toutes pièces, en réunissant et en rivant entre eux des fers à profils spéciaux tels que : fers plats, fers cornières, fers en Té, fers en U. On obtient alors des *poutres composites.*

La figure 223 en donne différents spécimens que nous allons décrire.

Une lame de tôle placée verticalement constitue ce que

l'on nomme l'*âme* de la poutre; elle reçoit à ses extrémités, supérieure et inférieure, des *cornières* rivées avec elles (fig. 223-A). Cet ensemble constitue déjà un grand fer à double **T** susceptible d'une résistance plus ou moins grande. Nous lui donnerons le nom de *corps de la poutre*, parce que celle-ci ne peut être réduite à une plus simple expression.

Si l'on veut donner à la poutre une plus grande résistance on ajoute, en dessus et en dessous, des feuilles de tôle nommées *plates-bandes*, ou quelquefois *semelles*, qui sont rivées

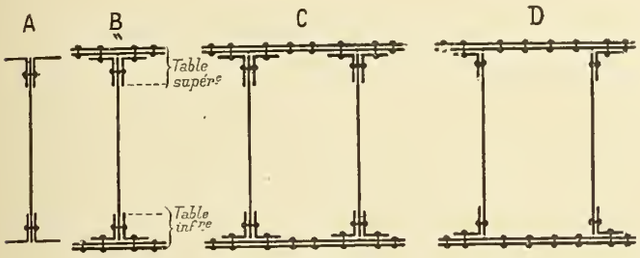


Fig. 223

sur les cornières et dont le nombre varie suivant que l'on veut avoir plus ou moins de résistance. Nous les numéroterons 1, 2, 3 .. à partir des cornières.

L'ensemble des plates-bandes, des cornières sur lesquelles elles sont fixées et de la portion d'âme comprise entre ces cornières est désigné sous le nom de *tables* (v. *abcd* et *a'b'c'd'* fig. 224-A). Dans une poutre composite, à âme pleine, nous aurons donc à considérer la table supérieure *abcd*, fig. 224, et la table inférieure *a'b'c'd'*.

L'*âme entière* comprend non seulement la partie vue, telle que *cd-c'd'* (fig. 224-A), mais encore les deux portions comprises entre les cornières des tables; autrement dit elle existe entre les semelles n° 1 de chaque table.

L'*âme vue* a une longueur moindre; elle se comptera de *cd* en *c'd'*, c'est-à-dire entre les cornières des tables.

(*b*) **Poutres composites à deux âmes, dites en caissons.** — Il est quelquefois avantageux de donner aux poutres la forme de tubes (fig. C et D, fig. 223); elles ont alors moins de tendance à *se voiler*, c'est-à-dire à voir leurs âmes fléchir, et les tables sont moins en porte-à-faux. Mais cela suppose que les dimensions de la poutre sont assez grandes pour permettre à un ouvrier de passer dans le tube afin de présenter les rivets. Cependant, en ne plaçant les cornières qu'à l'extérieur (fig. D), on peut construire des poutres en caissons de dimensions quelconques.

255. **Conventions.** — (*a*) **Dessin.** — Les fers du commerce ayant, en section droite, des dimensions très réduites, il serait difficile de les dessiner exactement et d'en coter, d'une manière claire, les dimensions. Il est cependant nécessaire de reconnaître, à la première inspection d'un dessin, quel genre de fer on a devant les yeux, quelles sont ses dimensions et, par suite, à quel échantillon du commerce il faut se rapporter. C'est pourquoi on fait les conventions suivantes :

1° En coupe (fig. 224-A) les fers ne seront représentés que par les axes de leurs sections droites, axes figurés par un trait noir très renforcé, mais sans chercher à rendre exactement les arrondis de la pièce.

2° Lorsque deux fers seront rivés entre eux et, par conséquent, seront en contact intime, on dessinera, en coupe, leurs axes comme ci-dessus, mais en laissant un petit intervalle blanc entre eux (v. fig. 224-A).

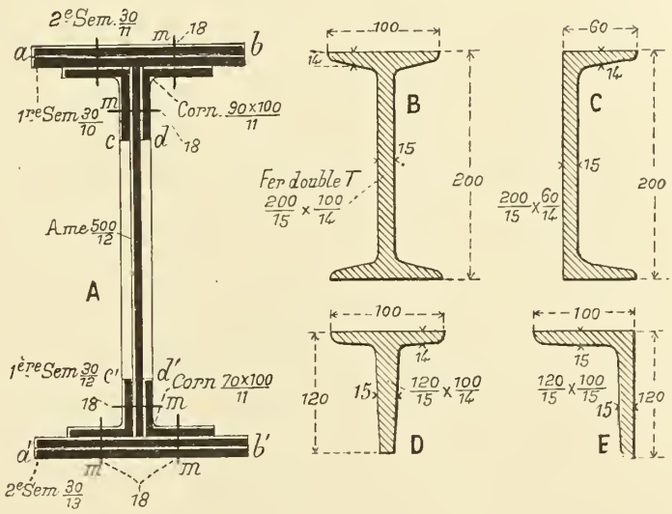


Fig. 224

3° Si, en arrière de la coupe, existent des pièces dont les faces aient leurs plans dans le prolongement des faces des pièces coupées, alors les faces de ces pièces apparaîtront, en raccourci complet, suivant des lignes que l'on dessinera d'un trait fin et qui seront placées entre les traits renforcés qui figurent les axes des sections droites des pièces coupées.

1° **Cotes de mesure.** — Voici comment on cote les dimensions de la section droite d'un fer du commerce.

1° On trace une attache qui va de la pièce à une partie libre de la feuille. 2° On inscrit en numérateur la hauteur ou la largeur de la section droite et, en dénominateur, son épaisseur.

Exemples. — 1° Une âme se cotera : $\frac{500}{12}$ (fig. A), ce qui veut dire que sa section droite est un rectangle qui possède 500^{mm} de hauteur sur 12^{mm} d'épaisseur.

2° Si une cornière est cotée $\frac{120}{15} \times \frac{100}{15}$ ou plus simplement $\frac{120 \times 100}{15}$ (fig. E), cela veut dire que les branches ont une même épaisseur moyenne égale à 15^{mm}; que l'une des branches a une hauteur, *comptée extérieurement*,

égale à 120^{mm}, tandis que la largeur de l'autre est de 100^{mm}. Ces explications suffisent pour faire comprendre la manière conventionnelle dont sont cotés les fers qui entrent dans la poutre composite de la fig. 224.

Les rivets s'indiquent par leurs axes *mm*... et une cote indique leur diamètre ; sur la fig. A ce diamètre est 18^{mm}.

256. **Moment d'inertie et moment de résistance d'une poutre composite.** — (*a*) **Poutre primitive.** — Soit ABCD (fig. 225) la section transversale d'une poutre composée d'une âme, de 4 cornières et de 2 semelles, dont nous voulons trouver le moment d'inertie. Nous supposerons qu'une section XX′ faite par le milieu de l'âme divise en deux parties l'aire donnée et que la moitié de gauche a été reportée à droite de l'autre moitié ainsi que cela est représenté fig. 225.

La poutre en double **T** est transformée en poutre à caisson. Dans ces conditions, en remplaçant les profils courbes des cornières par des lignes droites, on voit que la section donnée est la différence entre le rectangle total et les rec-

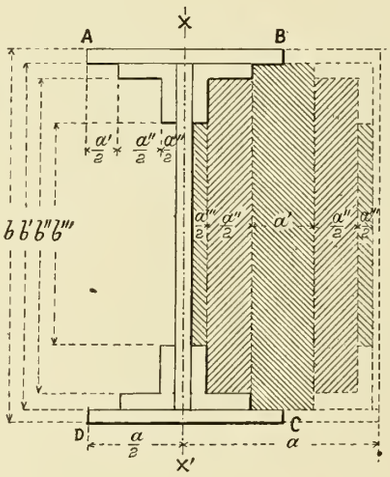


Fig. 225

tangles partiels intérieurs qui, dans la figure, sont couverts de hachures. Le moment d'inertie cherché sera donc aussi la différence entre le moment d'inertie du rectangle total et ceux des rectangles partiels ; nous pourrons donc écrire, en nous conformant aux notations de la figure :

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3}{12};$$

et puisque la distance de la fibre extrême à l'axe neutre est $v = \frac{b}{2}$ on aura pour le moment de résistance de la poutre

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^3 - ab'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3}{6b}.$$

(*b*) **Semelles additionnelles.** — En général, les *plates-bandes*, ou *semelles* additionnelles, sont découpées dans des feuilles de tôle d'épaisseur uniforme.

Soit *e* cette épaisseur, *a* la largeur des semelles.

Lorsque la pièce est haute, comme c'est généralement le cas pour les poutres composites, on peut, avec une approximation presque suffisante pour une première étude, supposer que la matière de chaque semelle additionnelle est condensée suivant son côté extrême, de sorte que si l'on désigne par *b* la hauteur totale de la poutre et par *e* l'épaisseur de la plate-bande, le moment d'inertie de celle-ci sera

$$i = \frac{aeb^2}{2},$$

et son moment de résistance sera obtenu en divisant par $b/2$, ce qui donnera :

$$\frac{I}{v} = aeb.$$

Dans cette dernière expression *a* et *b* restent constants pour une même poutre, *e* varie avec le nombre des semelles.

D'ailleurs l'équation d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

montre que les moments de résistance $I : v$ sont proportionnels aux moments fléchissants, d'où il résulte que :

« Dans les poutres composites un peu hautes (au-delà « de 0^m,40) les épaisseurs des semelles additionnelles, une « fois le corps de la poutre constitué, doivent être propor- « tionnelles aux moments fléchissants. »

Ces considérations vont nous permettre de faire la répartition des épaisseurs de semelle de manière à obtenir une poutre se rapprochant, autant que possible, d'un solide d'égale résistance.

§ 3. — Méthode approchée de répartition des toles de semelles

257. **Principe de la méthode.** — Soit (fig. 226) une poutre pour laquelle nous avons construit en ADB, par un des procédés indiqués précédemment, la représentative des moments fléchissants.

Déterminons la valeur du moment de résistance $I : v$ de cette poutre en la supposant réduite à son corps, c'est-à-dire à l'âme et aux quatre cornières comme l'indique la fig. 223-A ; nous aurons ainsi le $I : v$ minimum. D'autre part, la formule d'équarrissage appliquée au moment fléchissant maximum D nous fera connaître quel devrait être

le $I : v$ maximum ; alors deux cas vont se présenter.

1er Cas. — Le $\frac{I}{v}$ (min.) sera égal ou supérieur au $\frac{I}{v}$(max.), alors la poutre réduite à son corps dans toute son étendue sera partout assez résistante.

2e Cas. — Le $\frac{I}{v}$ (min.) est plus petit que $\frac{I}{v}$ (max.) ; dans ce cas il faudra ajouter des semelles d'épaisseur croissante.

L'épaisseur maxima e de la semelle qu'il faudra ajouter

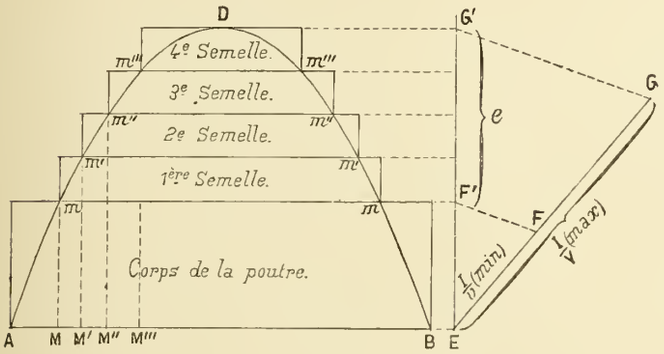


Fig. 226

à la section minima, c'est-à-dire au corps de poutre, pour avoir la section maxima dépendra de sa largeur et, si la largeur a de la semelle est déterminée, l'épaisseur e nous sera donnée par la formule approchée :

$$(1) \qquad aeb = \frac{I}{v}(\text{max.}) - \frac{I}{v}(\text{min.}).$$

La valeur de e étant ainsi connue le problème de la répartition des tôles pourra se traiter de la manière suivante :

1° Menons à la représentative des moments fléchissants, fig. 226, une tangente horizontale et, sur une transversale quelconque EG, portons deux longueurs EF et EG *proportionnelles* aux valeurs numériques de $\frac{I}{v}$ (min) et de $\frac{I}{v}$ (max.)

Par exemple si l'on avait trouvé

$$\frac{I}{v}(\text{max.}) = 0{,}004207333 \text{ et } \frac{I}{v}(\text{min.}) = 0{,}001\,783\,505,$$

on pourrait prendre, en négligeant des décimales

$$EG = 420^{mm} \qquad \text{et} \qquad EF = 178^{mm}.$$

2° Reportons proportionnellement, au moyen de parallèles, sur la verticale du point E, cette division en EF'G'. La hauteur F'G' nous représentera, à une certaine échelle, l'épaisseur maxima e des semelles à ajouter. Pour fixer les idées supposons que nous ayons trouvé par l'équation (1) $e = 32^{mm}$.

Nous pouvons alors convenir de procéder par additions successives de tôles d'épaisseur connue, par exemple, 8^{mm} ; nous serons conduits dans ce cas à ajouter 4 épaisseurs de tôle. On prend, bien entendu, pour épaisseur commune des tôles, un sous-multiple de l'épaisseur maxima, e, de semelle.

Dès lors, divisons F'G' en 4 parties égales et menons par les points de division des parallèles à AB ; les points m, m', m'', m''' où ces parallèles rencontreront la représentative des moments nous donneront, à l'échelle des longueurs, les abscisses des points M, M', M'' où les épaisseurs doivent changer.

Nota. — Au lieu de laisser les extrémités de la pièce réduite au corps de la poutre, il sera peut-être préférable de prolonger la première semelle d'un bout à l'autre de la poutre, mais ce n'est pas indispensable.

258. Application à une poutre de magasin (fig. 227). — (*a*) *Données.* — Un magasin situé au 1er étage est contigu à une galerie, établie en porte à faux, sur $2^m,75$ de portée hors mur.

Cette galerie, ou balcon, doit servir à la circulation, sur rails, d'un chariot destiné aux manutentions et pouvant peser 1000^k par essieu, c'est-à-dire 500^k par chaque roue d'essieu ; elle est couverte par un appentis dont le poids propre peut atteindre, avec une surcharge de neige, 200^k par mètre carré de surface couverte.

Le plancher du magasin doit pouvoir supporter une charge maxima de 1100^k par mètre carré (poids mort,

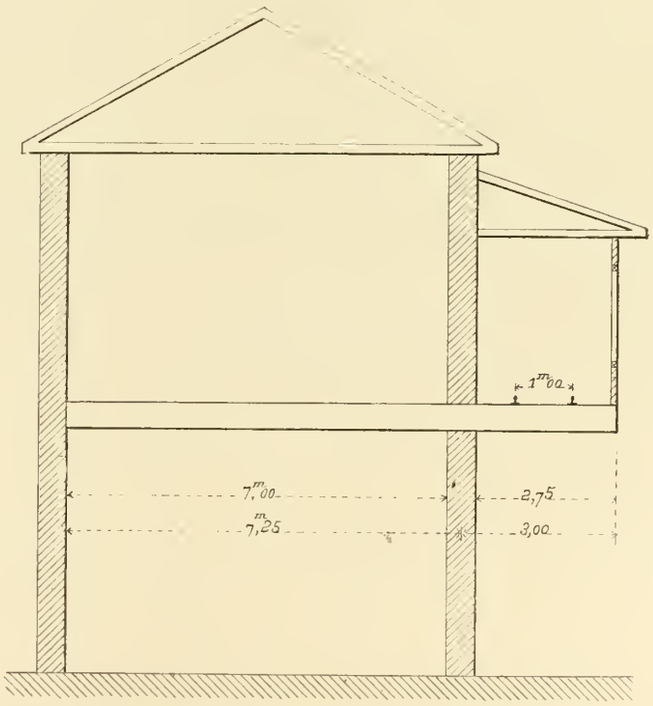


Fig. 227

350^k : poids utile, 750^k). Il est construit sur des poutres espacées de 4^m. Ces poutres posées, d'un côté, sur l'un des murs

traversent l'autre et forment corbeau de $2^m,75$ de saillie hors mur, soit 3^m à partir de l'axe du mur.

On demande de calculer les dimensions à donner à ces poutres.

Nous traiterons la question par la statique graphique (fig. 228).

(*b*) **Choix des échelles.** — Pour les longueurs nous adopterons l'échelle de $16^{mm},5$ par mètre, afin d'obtenir une épure d'une grandeur convenable. Pour les forces nous prendrons 10^{mm} pour représenter 1000^k. Enfin l'échelle des moments est une conséquence des deux précédentes : je dis qu'elle sera 3,625 fois plus petite que l'échelle des forces.

En effet, nous savons que les ordonnées du funiculaire, mesurées à l'échelle des forces, doivent être multipliées par la distance polaire adoptée lorsqu'on veut obtenir la valeur des moments correspondants. Si, opérant par la méthode Collignon, nous convenons de prendre pour distance polaire la demi-portée AB, soit $7,25 : 2 = 3^m,625$, nous voyons qu'une ordonnée de $10^{mm} : 3,625$ qui, à l'échelle des forces, représente $1000^k : 3,625$, correspondra à un moment de

$$\frac{1000}{3,625} \times 3,625 = 1000^{km}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Ces trois échelles étant tracées, nous commençons la discussion du problème.

(*c*) **Détermination et condition des charges.** — Le tronçon AB sera dans les conditions d'une poutre uniformément chargée de $7^m,25$ de portée, la charge totale étant :

$$P = 1100 \times 7,25 \times 4,00 = 31900^k.$$

Au-dessus de l'appui B la poutre sera considérée comme encastrée par suite de sa continuité.

De B en C elle supporte les efforts suivants : 1° une charge uniformément répartie due au poids du plancher (350^k par mètre carré), ce qui donne pour toute la longueur du corbeau

$$P' = 350 \times 3,00 \times 4,00 = 4200^k.$$

2° De plus, l'appentis dont le poids peut être de

$$2,75 \times 4,00 \times 200^k = 2200^k$$

charge également le mur et l'extrémité de la poutre. Celle-ci en reçoit donc la moitié en C, soit une charge concentrée de 1100^k.

3° Enfin, la charge roulante peut développer sur chaque rail de la voie, dont l'écartement est $1^m,00$, un effort de 500^k.

Le premier rail est à $1^m,00$ de l'appui, le deuxième est à $2^m,00$.

(*d*) **Epure.** — Cherchons séparément, pour chaque tronçon, la représentative des moments fléchissants.

1° *Grande travée.* — Sur la travée AB, ce sera une parabole tracée par la méthode Collignon, c'est-à-dire avec une distance polaire

$$d = \frac{l}{2} = \frac{7,25}{2} = 3,625.$$

L'ordonnée maxima de cette parabole est mesurée à l'échelle des forces (v. n° 51) par

$$\frac{P}{4} \quad \text{soit} \quad \frac{31900}{4} = 7975.$$

Traçons cette parabole ADB (fig. 228) en traits pointillés. Elle représente les moments fléchissants d'une poutre qui serait simplement appuyée en A et en B.

2° *Partie en encorbellement.* — Nous avons tracé en traits pointillés la représentative des moments dus à la charge uniformément répartie sur le corbeau. Nous avons vu (n° 209) que cette représentative est une parabole (b_1C, fig. II) tangente, en son sommet C, à l'extrémité du corbeau ; il nous suffit donc, pour tracer cette courbe, d'en déterminer un point, par exemple le point b, qui correspond à l'appui, ainsi que la tangente en ce point. Nous avons obtenu la tangente cherchée en construisant, par la méthode indiquée au n° 200, un funiculaire sur une force concentrée au milieu du corbeau et qui aurait même valeur que la charge uniformément répartie (4200 k). Rappelons le tracé :

On a pris (fig. II) BO égale à la distance polaire $1/2\ \overline{AB}$; la force P a été projetée en BP′ sur la verticale du point B ; on a joint OP′, ce qui a donné un segment extérieur marqué en trait fort sur la force P. Ce segment a été reporté de B en b_1. Enfin b_1 a été joint au pied P de la force P, ce qui a donné la tangente b_1P à la parabole.

En ce qui concerne les forces agissant à l'extrémité du corbeau et suivant les verticales des rails, nous en avons tracé (fig. III) le funiculaire en lignes pleines au-dessus du précédent afin d'éviter la confusion dans notre épure (pour le tracé, v. n° 200-*b*).

Tous ces funiculaires sont établis en prenant pour distance polaire

$$d = 3^m,625.$$

Le funiculaire définitif des charges qui agissent sur le corbeau s'obtiendra en ajoutant analytiquement les ordonnées des funiculaires partiels.

Dans la fig. II, cette représentative bFEC est une succession de trois arcs de parabole ; les moments fléchissants développés par les charges dans le corbeau sont négatifs. Le maximum de ces moments correspond à l'appui B et il a pour valeur 11100^{km}.

On a : $\quad Bb = Bb_1 + B'b'_1 \quad$ (de la fig. III).

(*e*) **Représentative des moments.** — Joignons Ab par une droite et, ainsi que nous l'avons déjà fait, descendons la parabole ADB de la fig. I, de manière que ses extrémités viennent en A et en b ; nous aurons en AGbC la représentative définitive des moments dans toute la poutre.

Remarque. — On voit que l'encorbellement extérieur a

amélioré la poutre ; cet effet aurait été plus sensible encore si le corbeau avait été chargé davantage.

Néanmoins, prenons la poutre telle qu'elle est et calculons maintenant les éléments de sa construction.

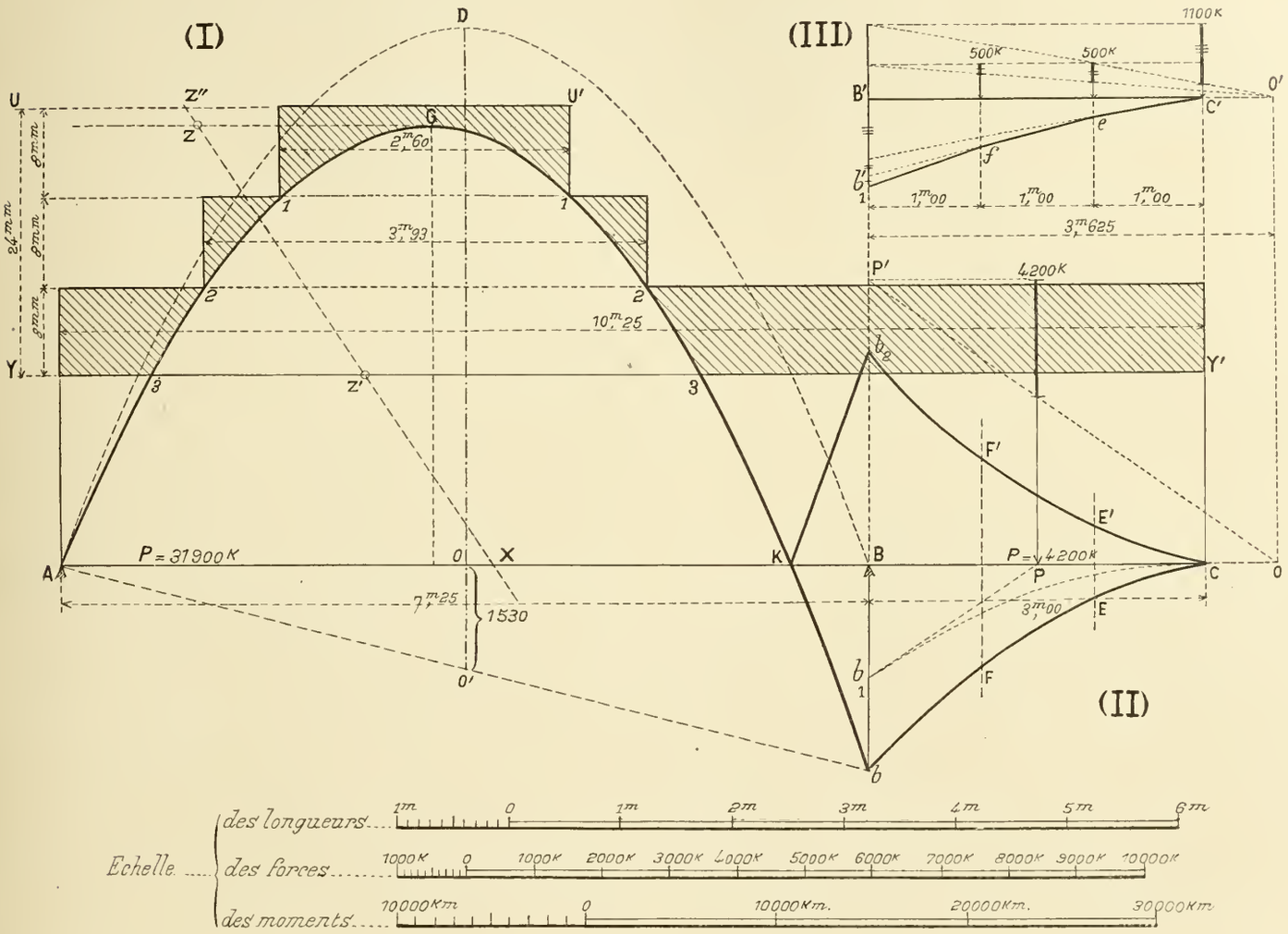


Fig. 228

259. **Construction de la poutre.** — (*a*) **Moment maximum.** — Le moment maximum est donné par l'ordonnée positive G*g* qui, mesurée à l'échelle des moments, nous donne 23300 k^{m}.

En appliquant à ce nombre l'équation d'équarrissage dans laquelle nous prendrons, pour résistance de sécurité, R = 6000000, on obtient :

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R} = \frac{23\,300}{6\,000\,000} = 0{,}003\,883\,333.$$

Tel sera le I : *v* (max.) de la poutre.

(*b*) **Corps de poutre ; son moment de résistance.** — Comme nous avons une certaine latitude pour constituer le corps de la poutre, nous prendrons sa hauteur égale à 0^{m},50 (1), nous adopterons 10^{mm} pour l'épaisseur de l'âme et nous formerons les tables au moyen de cornières de $\frac{80^{mm} \times 80^{mm}}{10^{mm}}$ (fig. 229).

En appliquant au corps de la poutre ainsi composé la formule

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3}{6b}$$

dans laquelle on a fait

$$a = 0{,}17 \qquad a' = 0{,}14 \qquad a'' = 0{,}02$$
$$b = 0{,}50 \qquad b' = 0{,}48 \qquad b'' = 0{,}34$$

(1) Dans la construction des ponts on prend généralement des hauteurs de poutres comprises entre le 1/8 et le 1/12 de la portée. Pour les autres constructions civiles on peut adopter la formule $h = 0^{m},20 + 0{,}05l$, dans laquelle h désigne la hauteur de la poutre et l sa portée.

il vient pour le $I : v$ du corps de poutre :

$$\frac{I}{v} = \frac{0{,}021\,25 - 0{,}015\,482\,88 - 0{,}000\,186\,08}{3}$$

$$\frac{I}{v} = 0{,}001\,660\,346.$$

Nota. — Les cubes des nombres b, b', b'',... se calculent facilement à l'aide de la table des nombres qui se trouve à la fin du volume.

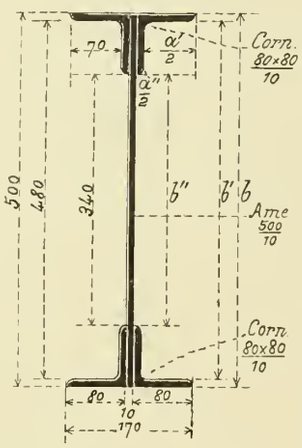


Fig. 229

(c) Moment de résistance à fournir par les semelles. — Ainsi : le moment de résistance $\frac{I}{v}$(max.) $= 0{,}003\,883\,333$.

$\frac{I}{v}$(min.) $= 0{,}001\,660\,346$.

la différence $\frac{I'}{v'} = 0{,}002\,222\,987$.

s'obtiendra par l'adjonction de semelles. Pour ces semelles, nous sommes maîtres de leur donner telle largeur que nous voudrons; cependant elle ne doit pas être inférieure à 170^{mm}; prenons cette largeur égale à 200^{mm}; nous allons en déduire l'épaisseur maxima e des semelles en appliquant la formule approchée

$$\frac{I'}{v'} = abe \qquad \text{(v. n° 256).}$$

Remplaçons dans cette équation

$$\frac{I'}{v'} \quad \text{par} \quad 0{,}002\,222\,987$$

a par 0,20, b par 0,50 et remarquons qu'il faut prendre pour unité le mètre, sous peine d'avoir des erreurs dans la position de la virgule, il viendra, en effectuant les calculs,

$$e = 0^{m},022\,229\,87.$$

(*d*) **Répartition des tôles.** — Supposons que l'épaisseur des tôles qui constitueront les semelles soit de 8^{mm} ; nous voyons que pour obtenir une surépaisseur de $0^{m},02223$, il nous faudra 3 tôles de 8^{mm} formant en tout 24^{mm}, c'est-à-dire un peu plus que les $22^{mm},23$... qui sont demandés.

Remarquons aussi, qu'au point de vue de la résistance, il importe peu que les moments fléchissants soient négatifs ou positifs ; leurs valeurs absolues sont seules à considérer. Dès lors nous prendrons en Kb_2C (fig. 228-II) le symétrique de la partie négative de la courbe des moments et nous n'aurons plus à considérer, pour répartir les tôles, que des moments tous positifs.

Ceci posé : inscrivons en XZ (fig. 228-I) entre la base AB et la tangente horizontale à la parabole, une longueur représentant, à une échelle quelconque, le $I : v$ (max.).

Prenons ensuite, à la même échelle, et sur la même droite, en XZ' une longueur égale au $I : v$ (min.).

Pour l'exemple actuel les $I : v$ maximum et minimum étaient proportionnels aux nombres 38.83 et 16,60, tandis que leur différence l'était à 22,23 ; c'est pourquoi, doublant ces nombres, nous avons pris immédiatement, avec le décimètre divisé :

$$XZ = 77^{mm},6 \quad XZ'' = 33^{mm},2 \quad \text{et} \quad ZZ' = 44{,}4.$$

En menant ensuite par le point Z' une droite horizontale, YY', celle-ci sera distante de la tangente à la parabole d'une longueur qui doit être proportionnelle à $22^{mm},23$, c'est-à-dire à l'épaisseur maxima, e, des semelles.

Dès lors nous nous posons la question suivante :

Sur l'épure une épaisseur théorique de semelle $e = 22^{mm},23$ est représentée par la longueur $ZZ' = 44{,}4$ (qui en est ici le double) ; par quelle longueur Z'Z'' une épaisseur réelle de 24^{mm}, répondant à trois tôles de 8^{mm} chacune, sera-t-elle représentée? C'est une règle de trois et l'on aura :

$$\frac{Z'Z''}{24} = \frac{ZZ'}{22{,}3}, \quad \text{d'où en faisant } ZZ' = 44{,}4$$

$$Z'Z'' = 48^{mm}.$$

On peut opérer graphiquement sans faire de calcul en se servant du décimètre divisé comme suit :

1° Entre l'horizontale GZ, qui est la tangente à la ligne des moments, et l'horizontale YY' trouvée ci-dessus, on place le décimètre en biais jusqu'à pouvoir inscrire soit la longueur 22,23 (qui est l'épaisseur e de semelle), soit un multiple de cette longueur ; ici l'inscription faite en Z'Z a donné le *double* de 22,23, soit 44,4.

2° Sans changer de place le décimètre on y porte de Z' en Z'' le même multiple de l'épaisseur maxima réelle des semelles : ici cette épaisseur réelle était $24 = 3 \times 8$; nous avons donc pris $Z'Z'' = 2 \times 24 = 48^{mm}$.

Bref, le point Z'' une fois obtenu on mène, par lui, une horizontale UU'.

Cette droite UU' représentera le dessus de la semelle supérieure et l'intervalle UU' — YY' divisé en 3 parties égales nous représentera les points de séparation des semelles que nous devrons ajouter au corps de la poutre.

Nous ferons régner la semelle n° 1 sur toute la longueur de la poutre ; la semelle n° 2, qui n'est utile que jusqu'aux points où elle coupe la parabole des moments, aura

$3^m,93$ de longueur. Enfin la semelle n° 3 s'étendra sur une longueur de $2^m,60$.

Nous avons couvert de hachures, sur la fig. 228, les extrémités des semelles extérieures à la courbe des moments fléchissants.

260. **Efforts tranchants.** — (*a*) **Préliminaires.** — Afin d'étudier complètement la poutre qui nous occupe, nous allons examiner les efforts tranchants aux différents points de sa longueur et nous rendre compte des réactions développées par les murs afin d'en déduire, au besoin, l'épaisseur à donner à ces murs.

L'effort tranchant en un point est, ainsi que nous l'avons vu, la résultante de translation, en ce point, de toutes les forces appliquées à la poutre et situées d'un même côté de la section considérée. Nous avons dit également que l'effort

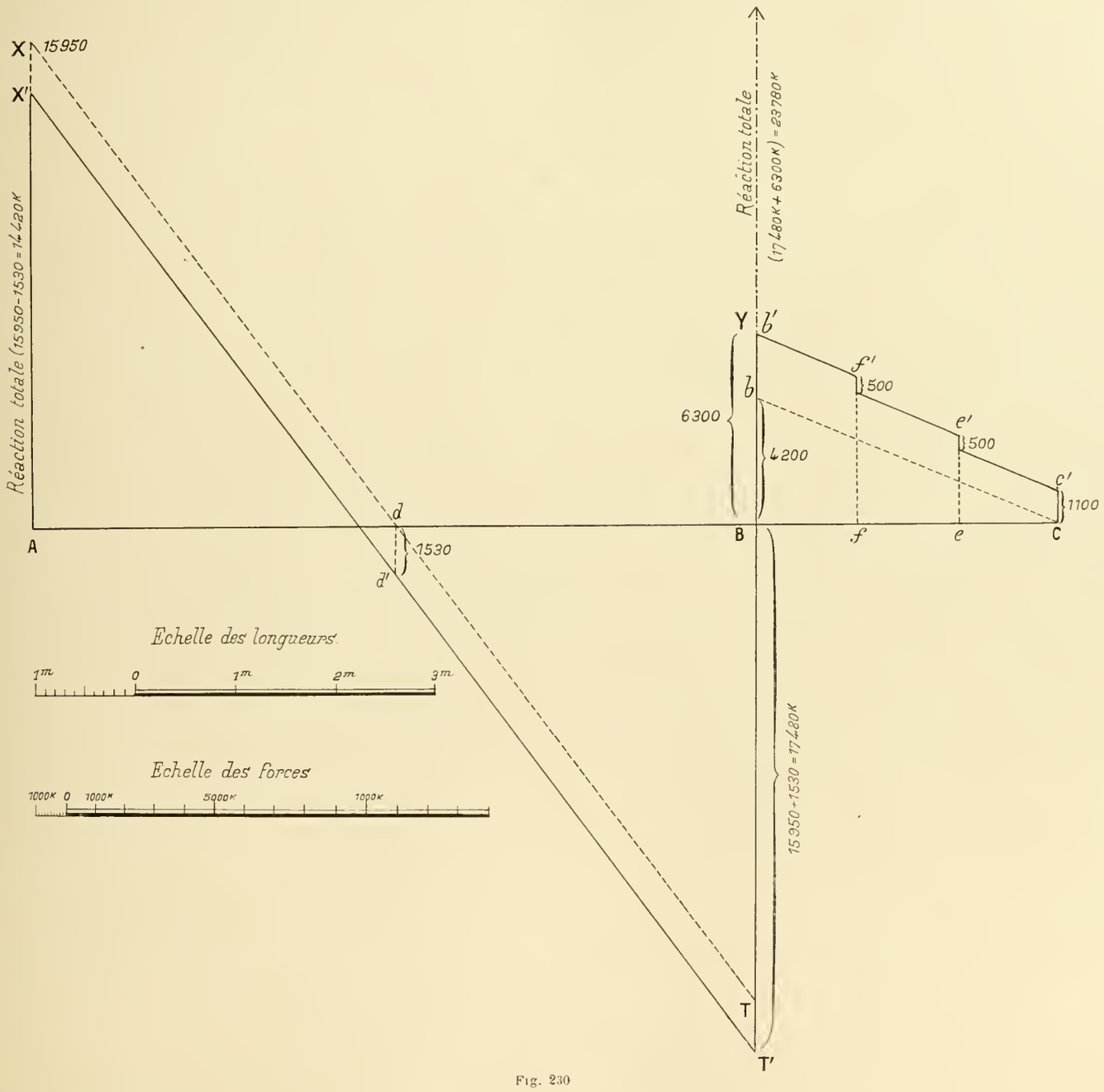


Fig. 230

tranchant était représenté par la pente *vraie* des côtés du funiculaire des charges.

(*b*) **Echelles.** — Afin d'avoir une épure qui ne sorte pas du cadre nous avons adopté pour les longueurs la même

échelle que pour la figure 228 ; mais pour les forces nous avons pris une échelle moitié plus petite, c'est-à-dire de $0^m,005$ pour $1\,000^k$.

(*c*) **Grande travée.** — Si, dans la grande travée AB, la poutre était libre sur ses appuis, la représentative des efforts tranchants (v. n° 49 et 50) serait la droite oblique XT (fig. 230), tracée de telle sorte que l'on ait : AX = 15 950 = —BT, (15 950 est, ici, la moitié de la charge totale : $31\,900^k$) ; mais le corbeau extérieur, en développant un encastrement sur l'appui B, a fait descendre la parabole primitive ADB des moments fléchissants (fig. 228), dans la position AG*b*, ce qui veut dire que les pentes de la parabole primitive ont toutes été diminuées d'une quantité constante qui est la pente vraie de la droite AB, cette dernière étant considérée comme la représentative des moments dus à l'encastrement en B ; évaluons cette pente.

Sur la fig. 228, en mesurant à l'échelle des forces la verticale milieu OO′ de l'oblique A*b*, on trouve OO′ = $1\,530^k$; je dis que $1\,530^k$ est précisément la pente vraie de la ligne A*b*, c'est-à-dire que 1530^k est la quantité dont il faut descendre, parallèlement à elle-même, la représentative XT (fig. 230) des efforts tranchants primitifs pour avoir, en X′T′, la représentative définitive.

En effet le moment fléchissant que représente OO′ de la fig. 228 s'obtient en multipliant OO′, mesurée à l'échelle des forces (ici, $1\,530^k$) par la distance polaire (ici, 1/2 *l*) ; pour avoir la pente vraie il faut diviser de nouveau OO′ par AO, c'est-à-dire par 1/2 *l*, ce qui détruira le facteur 1/2 *l* et reproduira $1\,530^k$. C.Q F.D.

Nota. — C'est à titre d'exercice que nous avons fait cette démonstration ; nous aurions pu la supprimer en nous reportant au n° 47.

Finalement, l'effort tranchant, pour la grande travée, est représenté par la droite inclinée X′T′. Comme réactions cette grande travée donne lieu en A à une réaction

$$X' = 15\,950 - 1\,530 = +14\,420^k.$$

Sur l'appui B elle fournit une réaction

$$T' = 15\,950 + 1\,530 = +17\,480^k.$$

(*d*) **Corbeau.** — Du côté du corbeau l'effort tranchant sur l'appui B est la somme des charges appliquées au corbeau, savoir :

$$4\,200^k + 1\,100^k + 500^k + 500^k = 6\,300^k.$$

Au point B l'effort tranchant passe donc brusquement de $-17\,480^k$ à $+6\,300^k$.

Si le corbeau ne supportait que la charge uniformément répartie de $4\,200^k$ en prenant B*b* (fig. 230) égal à $4\,200^k$, et en joignant *bc* on aurait en *bc* la représentative des efforts tranchants dus à cette charge uniforme. Mais il faut commencer par la remonter parallèlement à elle-même jusqu'au point *b′* où elle atteint les $6\,300^k$ ci-dessus ; en *ff′* au droit du premier rail elle s'abaisse de 500^k, en *ec′*, au droit du second essieu, elle s'abaisse encore de 500^k et elle doit arriver en C*e′* à avoir pour ordonnée $1\,100^k$, poids de la moitié de l'appentis.

La représentative définitive des efforts tranchants sur le corbeau sera donc formée par une série de trois droites *b′f′e′c′* parallèles à *b*C dont les distances à cette dernière, mesurées normalement à BC, diminuent brusquement au point d'application de chaque force concentrée, de toute la valeur de cette force.

(*e*) **Résistance au cisaillement.** — Au point de vue du cisaillement, la partie dangereuse de la poutre est voisine de B puisque l'effort tranchant y atteint 17480^k.

On admet, en général, que l'âme seule doit résister au cisaillement. Si l'on adopte pour résistance S de sécurité au cisaillement (voir n° 154-*b*)

$$S = 0{,}8\,R = 0{,}8 \times 0{,}6^k = 4^k{,}8,$$

la section de l'âme de notre poutre devra être supérieure à

$$\frac{17\,480}{4{,}8} = 3\,642^{mm^2}.$$

Or, la section que nous avons admise a comme surface $500 \times 10 = 5\,000^{mm^2}$; elle est donc très suffisamment résistante.

(*f*) **Réaction des appuis.** — Sur l'appui A la réaction est égale à

$$15\,950 - 1\,530 = 14\,420^k.$$

Sur l'appui B la réaction est

$$15\,950 + 1\,530 + 6\,300 = 23\,780,$$

c'est-à-dire près du double de la première ; le mur le plus fatigué sera donc le mur B qui supportera de la part de la poutre une charge de $23\,780^k$.

Pour qu'il ne s'écrase pas sous ce poids, ajouté d'ailleurs

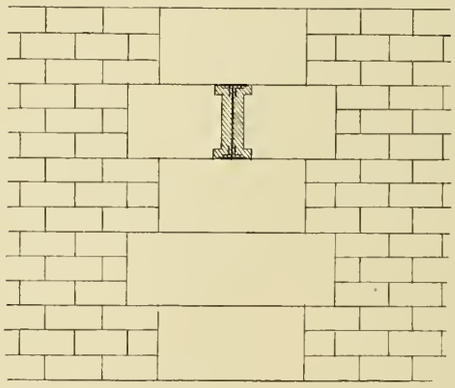


Fig. 231

à celui des étages supérieurs, on placera sous la poutre un *sommier* formé, soit d'une pierre dure soit d'une plaque de fonte dont le but est de répartir la pression sur une large étendue de surface ; on ménagera dans ce sommier des logements pour les têtes de rivets et, même, on placera entre

la poutre et le sommier une feuille de plomb épaisse formant matelas.

Au-dessous du sommier, il sera bon de prévoir une chaîne en pierres de taille (fig. 231), dont les dimensions horizontales soient suffisantes pour que la pression par centimètre carré vers les fondations soit compatible avec la résistance de la pierre employée ; ce dernier problème sera d'ailleurs étudié dans une autre partie du cours.

§ 3. — Méthode exacte de répartition des toles de semelles.

261. Équation fondamentale du problème. — (*a*) Équation du 3e degré. — Le moyen que nous avons indiqué et appliqué à l'exemple précédent pour répartir les tôles de semelles dans les poutres composées n'est pas rigoureusement exact, parce que nous avons pris pour déterminer l'épaisseur maxima e des semelles une valeur approchée du moment de

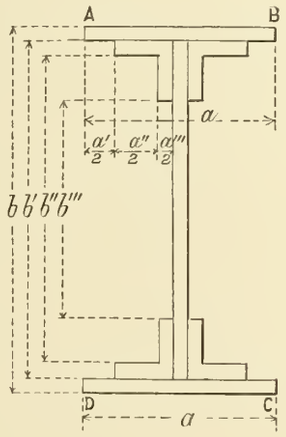


Fig. 232

résistance $I:v$ de ces semelles. Bien que, dans la pratique, cette manière de procéder soit très admissible, nous allons nous proposer maintenant de traiter le même problème en employant la vraie valeur du moment de résistance de la poutre.

Nous avons vu (n° 256) que si l'on a une poutre composite dont le profil est ABCD (fig. 232), son moment de résistance $\frac{I}{v}$ sera

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3}{6b},$$

formule dans laquelle les seules inconnues sont la largeur, a, des semelles et la hauteur totale, b, de la poutre ; et comme a peut être pris arbitrairement, il en résulte que la seule inconnue sera b.

Dès lors, en appliquant la formule d'équarrissage on aura

$$(1) \qquad \frac{M}{R} = \frac{ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3}{b6}$$

ou bien en développant

$$(2) \qquad b^3 - \frac{6M}{aR}b - \frac{(a'b'^3 + a''b''^3 + a'''b'''^3)}{a} = 0.$$

Cette équation (2) qui est du troisième degré, permet, pour chaque valeur de M, de trouver la valeur de b correspondante et comme $b = b' + 2e$, e désignant l'épaisseur totale des semelles, on en déduira e.

On n'aura à résoudre qu'une seule fois cette équation du 3e degré, ainsi que nous allons l'indiquer.

Remarquons d'abord que b' est la hauteur du *corps de poutre* ; c'est donc une quantité connue. Cela posé, voici comment l'on procédera :

(*b*) **Moments correspondant aux tôles.** — 1° On calculera par l'équation (2) la valeur maxima b_n correspondant au moment fléchissant maximum M_n.

2° On divisera la différence $b_n - b'$ en $2n$ parties égales, si n désigne le nombre de feuilles de tôle dont on veut composer chaque semelle ; l'épaisseur α d'une de ces feuilles sera donc :

$$\alpha = \frac{b_n - b'}{2n}$$

Le facteur 2 s'introduit en dénominateur par ce fait qu'il faut n feuilles pour la semelle du haut et n pour celle du bas. Dès lors on calculera les hauteurs successives

$$b_1 = b' + 2\alpha$$
$$b_2 = b' + 4\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n = b' + 2n\alpha,$$

cette dernière hauteur est celle que nous venons de calculer.

3° En substituant ces valeurs b_1, b_2, b_3, b_n, dans l'équation (1) à la place de b, on en déduira les valeurs des moments M_1, M_2, M_3, qui leur correspondent.

4° Recoupant la représentative des moments par des horizontales situées aux hauteurs M_1, M_2, M_3, mesurées à l'échelle des moments, on en déduira les longueurs de poutre auxquelles s'appliqueront les épaisseurs α, 2α, 3α. Cette méthode est exacte, mais elle est plus longue que la précédente ; elle nécessite la résolution d'une équation du 3e degré.

262. Résolution graphique de l'équation du 3e degré. — L'abaque n° 6 (fig. 233), construit d'après la méthode imaginée par M. M. d'Ocagne (1), Ingénieur des ponts et chaus-

(1) **Nomographie**, calculs usuels effectués au moyen des *abaques*, par M. d'Ocagne. — Gauthier-Villars et fils, éditeurs.

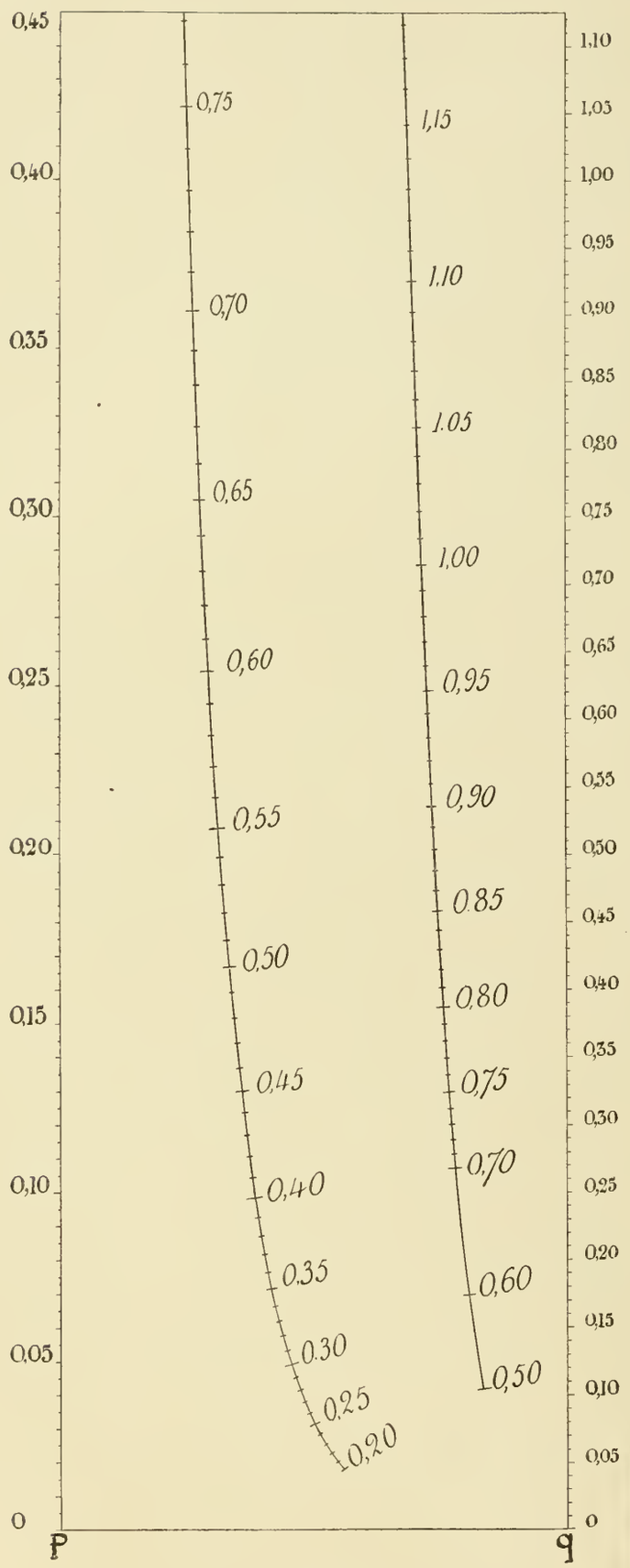


Fig. 233

ABAQUE N° 6

résolvant l'équation du troisième degré

$x^3 = px + q$.

sées, donne à un millimètre près les valeurs de b, qui satisfont à l'équation (2).

En posant dans cette équation

$$p = \frac{6M}{aR} \qquad \text{et}$$

$$q = \frac{a'b'^3 + a''b''^3 + a'''b'''^3}{a},$$

cette équation se met sous la forme

(2') $$b^3 = pb + q.$$

Cet abaque se compose de deux axes gradués, parallèles entre eux, AA' et BB (fig. 233 *bis*) et de deux lignes courbes graduées que nous nommerons, avec M. *Lalanne*, des *solutives*.

Sur le premier axe, on prend, de A en a, la longueur p, ce qui donne un point a; sur le second axe on prend de B en b, la longueur q, ce qui donne un second point b; on joint a et b par une droite qui rencontre la *solutive* (celle de droite ou celle de gauche, suivant les cas), en un point dont il suffit de lire le numéro de graduation pour avoir la racine cherchée.

1er **Nota.** — Afin de ne pas dessiner de lignes sur l'abaque, ce qui le mettrait vite hors de service, on se sert d'une bande de papier transparent sur laquelle on a tracé, à l'encre de Chine, une ligne droite aussi fine que possible ; c'est cette

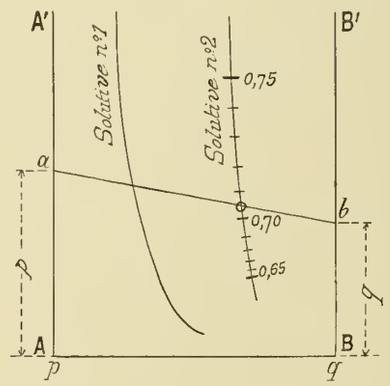


Fig. 233 bis

ligne que l'on fait passer par les points a et b, et on lit au travers du papier le nombre correspondant de la *solutive*.

1er *Exemple.* — Soit à résoudre l'équation

$$b^3 = 0{,}225\,b + 0{,}071.$$

C'est la solutive de gauche qui servira parce que le terme $q = 0{,}071$ est plus petit que 0,1.

Dans ce cas, les nombres inscrits sur l'axe de droite BB', doivent avoir la virgule reculée de un rang vers la gau-

che ; autrement dit, au lieu de lire 0,20, 0,30, etc., comme cela est écrit, on lira : 0,020, 0,030, etc. Dès lors, le trait sur transparent appliqué à gauche au point $p = 0,225$ et à droite au point $q = 0,071$ recoupe la solutive gauche au point marqué $b = 0,587$; c'est la racine de l'équation donnée (faire l'expérience sur l'abaque).

2e Exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$b^3 = 0,177\,b + 0,952.$$

On se sert de la solutive de droite et on lit les nombres de l'axe BB′ tels qu'ils sont écrits : dès lors en faisant passer le trait sur transparent par les points $p = 0,177$ et $q = 0,952$, ce trait rencontre la solutive de droite au point $b = 1,044$, ce qui donne la racine cherchée.

2° Nota. — Cet abaque ne permet de résoudre directement que les équations du 3e degré pour lesquelles la racine b est inférieure à 1,18 et pour lesquelles on a, au maximum,

$$p < 0,45 \qquad \text{et} \qquad q < 1,12.$$

Si la racine devait être supérieure à 1,18, alors on poserait :

$$b' = \frac{b}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad b = 2b'.$$

En remplaçant dans l'équation (2)

$$b^3 = pb + q,$$

elle devient après simplification

$$b'^3 = \frac{p}{4}b' + \frac{q}{8}.$$

Remarquer que $4 = 2^2$ et que $8 = 2^3$.

On résoudra cette équation, et l'on doublera sa racine pour avoir b.

Exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$b^3 = 1,2\,b + 4,32\,;$$

prenons le quart de 1,2 et le huitième de 4,32, on obtient la nouvelle équation

$$b'^3 = 0,3b' + 0,54$$

dont la racine trouvée avec l'abaque est

$$b' = 0,936.$$

On doublera, ce qui donnera

$$b = 1,872.$$

Pour des coefficients p et q encore plus grands on poserait $b = 3b'$, ce qui reviendrait à écrire une nouvelle équation en b' dans laquelle p serait divisé par 3^2, c'est-à-dire par 9, et q le serait par 3^3, c'est-à-dire par 27.

On chercherait la racine de cette équation en b' et, en la triplant, on aurait la racine de l'équation donnée.

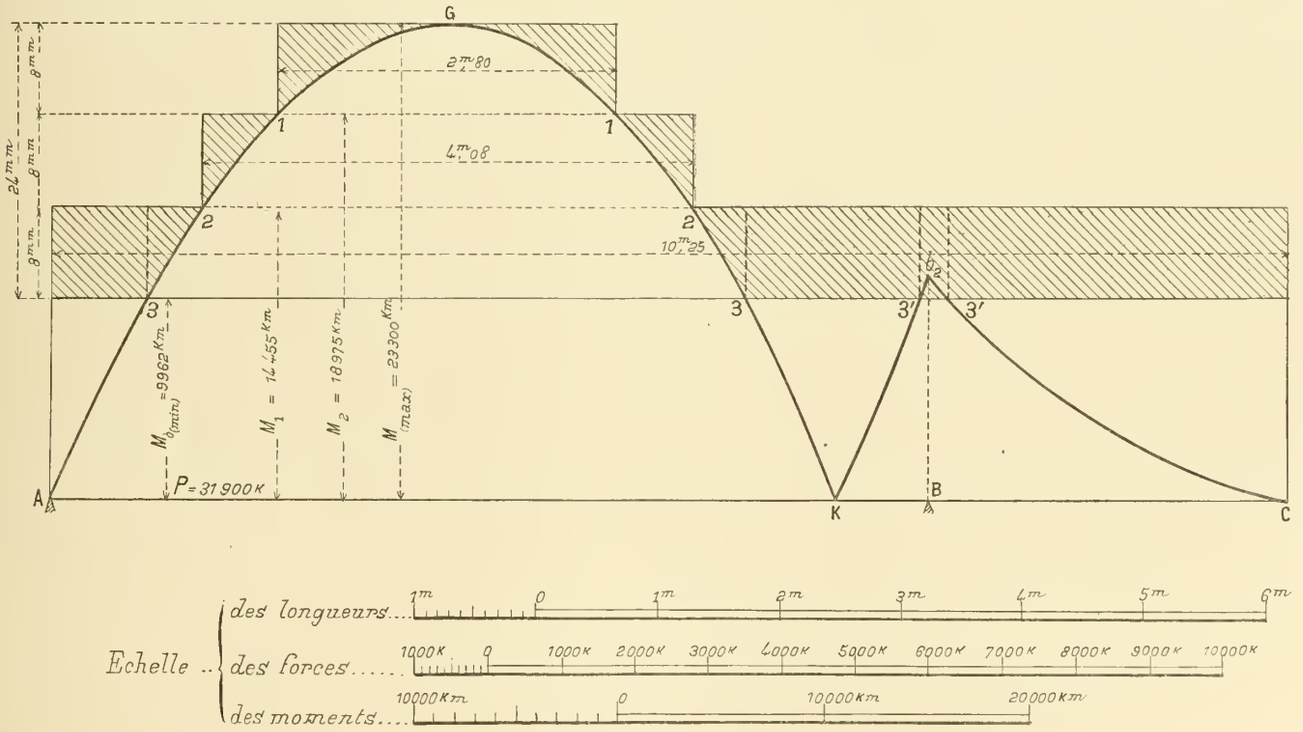


Fig. 234

263. **Application à la poutre du n° 258.** — Proposons-nous de déterminer par la méthode exacte quelle devra être la répartition des tôles dans la poutre que nous avons étudiée au n° 258. Reprenons la représentative des moments telle que nous l'avons obtenue (fig. 228) ; nous avons vu que le moment fléchissant maximum avait pour valeur 23300km. Si nous désignons par b' la hauteur totale, encore inconnue, de la poutre, nous pourrons écrire, puisque $a = 0,20$,

$$\frac{I}{v} = \frac{0,20 \times b'^3 - 0,03 \times \overline{0,50}^3 - 0,14 \times \overline{0,48}^3 - 0,02 \times \overline{0,34}^3}{6\,b'}$$

ou bien, en effectuant les calculs

$$\frac{I}{v} = \frac{0{,}20\,b'^3 - 0{,}02001896}{6b'},$$

Introduisons cette valeur dans la formule d'équarrissage, il viendra

$$(1) \qquad \frac{M}{R} = \frac{0{,}20\,b'^3 - 0{,}02001896}{6b'},$$

ou bien en ordonnant par rapport à b' et remarquant que

$$M = 23300 \qquad \text{et} \qquad R = 6000000$$

$$b'^3 - \frac{23\,300}{200000}\,b' - 0{,}1000948 = 0$$

ou encore, en effectuant les calculs :

$$(2) \qquad b'^3 = 0{,}1165\,b' + 0{,}1000948.$$

On se sert de l'abaque et on utilise la solutive de gauche. En faisant passer le trait sur transparent par le point $p = 0{,}1165$ et $q = 0{,}1001$, on le voit recouper la solutive de gauche au point $b' = 0{,}548$.

Telle est la hauteur maxima b' à donner à la poutre.

La hauteur, b, du corps de poutre (v. fig. 229) était $b = 0{,}500$; la différence est donc

$$b' - b = 0{,}548 - 0{,}500 = 0{,}048^{mm},$$

ce qui représente 6 feuilles de tôle de chacune 8^{mm} d'épaisseur, savoir 3 sur chaque semelle. Les hauteurs partielles seront donc :

(1re tôle) $b_1 = 0{,}500 + 0{,}016 = 0{,}516,$

(2e tôle) $b_2 = 0{,}500 + 0{,}032 = 0{,}532.$

Dans l'équation (1) d'équarrissage substituons ces valeurs de b_1 et de b_2, nous en déduisons pour les moments, en faisant $R = 6000000^k$,

(1re tôle) $M_1 = 14455^{km},$

(2e tôle) $M_2 = 18975^{km}.$

Quant au moment M_0, que pourra supporter le corps de poutre seul, il se trouvera soit en faisant dans la formule (1) : $b' = 0{,}50$, soit encore en prenant (n° 259-*b*) le $I : v$ du corps de poutre, lequel a été trouvé égal à 0,001660346, et appliquant la formule

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}, \qquad \text{d'où} \qquad M = R \times \frac{I}{v};$$

ce qui donne , d'une manière ou de l'autre

$$M_0 = 9962^{km}.$$

En menant (fig. 344) des parallèles à la droite des appuis distantes de celle-ci de longueurs égales à M_1 et M_2, mesurées à l'échelle des moments, on coupera la parabole des moments fléchissants en des points 1-1, 2-2, qui correspondent précisément aux changements d'épaisseur des tables.

2e SECTION

FIGURES SOLIDES, D'ÉGALE RÉSISTANCE

§ 4. — CORBEAUX D'ÉGALE RÉSISTANCE

264. **Généralités.** — Nous avons dit, d'une façon générale, qu'on entend par solide d'égale résistance celui dans lequel la fibre la plus fatiguée, dans chaque section, travaille à un même effort unitaire qui, le plus souvent, est égal à la résistance de sécurité ; *une pièce est dite d'égale résistance lorsque la tension unitaire maxima est la même dans toutes les sections.*

L'équation qui exprime cette qualité de résistance dans le cas de la flexion est

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R},$$

à condition d'y faire R constant. C'est l'équation d'équarrissage ; elle montre que la forme géométrique de la pièce doit être telle que le terme $I : v$, qui en est la conséquence, soit, pour chaque section, proportionnel au moment fléchissant ; par conséquent, si la représentative des moments fléchissants est connue, il sera possible d'en déduire la figure à donner à la pièce.

Les solides d'égale résistance à la flexion peuvent être divisés en 3 classes, savoir :

1re classe. — Solides à hauteur constante.

2e classe. — Solides à largeur constante.

3e classe. — Solides à section modulée.

Cette 3e classe comprend les solides dont la largeur ainsi que la hauteur varient d'une section à une autre, tout en restant proportionnelles entre elles ; l'une d'elles servira, pour ainsi dire, de module à l'autre, ou aux autres, si la section n'est pas rectangulaire. Ces solides sont rarement employés dans la pratique ; nous n'en dirons que quelques mots.

Les profils rectangulaires le sont, au contraire, très souvent.

Dans tout rectangle de base a et de hauteur b on a

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6},$$

ce qui exprime que le moment de résistance $I : v$ doit être proportionnel à la base a et au carré de la hauteur b^2; or, comme d'après l'équation d'équarrissage, $I : v$ est proportionnel à M, moment fléchissant, on voit que les dimensions a et b du profil rectangulaire doivent varier de telle sorte que

a soit proportionnel à M pour les solides de la 1re classe,

b soit proportionnel à $\sqrt{M}$ pour les solides de la 2e classe.

De plus si a sert de module à b :

a sera proportionnel à $\sqrt[3]{M}$ pour les solides de la 3e classe ; il en sera de même pour b.

265. — **Corbeau chargé d'un poids unique appliqué à son extrémité.** — (*a*) **Théorie.** — Nous avons vu (voir n° 298) que dans ce cas la représentative des moments fléchissants est une droite telle que AB (fig. 235-I). Comme le solide peut appartenir à l'une des 3 classes désignées ci-dessus, nous allons étudier ces trois cas successivement.

1er Cas. *La hauteur* b *est constante.* — Alors la largeur a doit être proportionnelle à M, c'est-à-dire aux ordonnées d'une droite ; la figure, en plan, du corbeau sera donc un triangle tel que XBC ou C_1BC_1' (fig. 235-II), les bases C_1C_1 et XC de ces deux triangles étant égales.

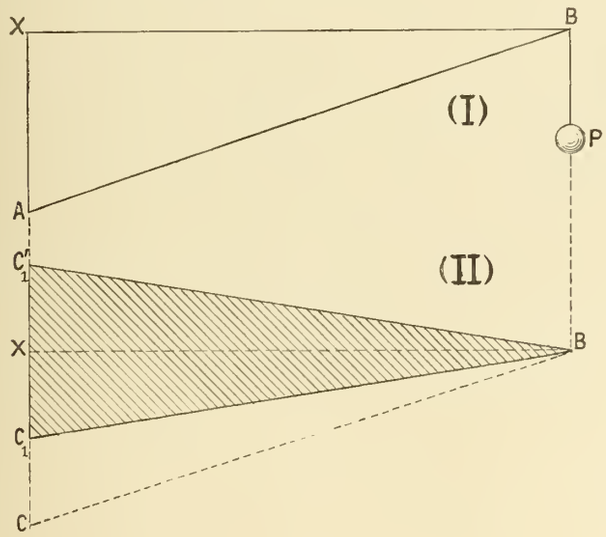


Fig. 235

La grandeur de ces bases sera déterminée par cette condition que la valeur du moment fléchissant maximum, introduite dans l'équation d'équarrissage, devra donner pour effort unitaire de la fibre la plus fatiguée de la section XX la limite qu'on s'est assignée d'avance ; ordinairement cette limite est prise égale à la résistance de sécurité.

Dans un pareil solide l'effort tranchant est constant et égal à la charge P; or, si l'on terminait le corbeau en biseau, la surface de la section transversale serait nulle à l'extrémité B et la section serait cisaillée par l'effort tran-

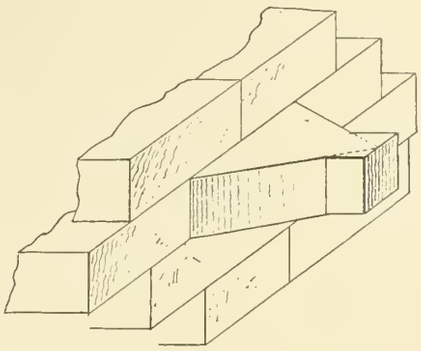


Fig. 236

chant. Il faut donc lui donner une largeur suffisante jusqu'à une certaine distance du sommet ; cette largeur doit être telle que l'effort tranchant unitaire ne dépasse pas la résistance de sécurité au cisaillement (fig. 236).

2e Cas. *La largeur est constante.* — Dans ce cas, les hauteurs Z du profil doivent être proportionnelles à $\sqrt{M}$. On aura donc, à un coefficient de proportionnalité près, en appelant x l'abscisse d'une section EF (fig. 237-II) *abscisse comptée à partir de l'extrémité* B, et remarquant que le moment fléchissant est proportionnel à cette abscisse (fig. I)

$$z = \sqrt{Kx}, \qquad \text{d'où}$$

$$x = \frac{z^2}{K}.$$

Cette équation entre x et z représente une parabole du second degré (fig. II), ayant pour axe l'axe des x et pour

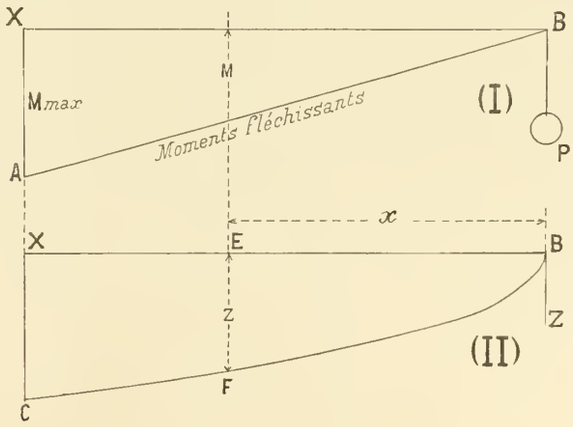


Fig. 237

tangente au sommet la verticale BZ menée à l'extrémité B du corbeau.

On devra aussi, en vue de l'effort tranchant, ménager une

portée S (fig. perspective 238-I) comme dans l'exemple précédent.

Enfin, au lieu d'une demi-parabole, on pourra (fig. 238-II) répartir les hauteurs sur deux paraboles de hauteurs moitié

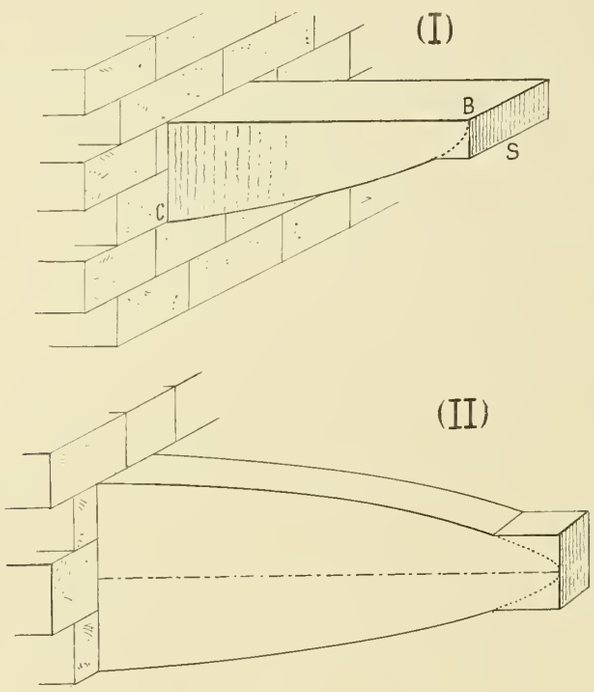


Fig. 238

moindres de telle sorte qu'en chaque point du corbeau la hauteur soit la même que précédemment.

(*b*) **Application numérique.** — Déterminer les dimensions à donner à un corbeau d'égale résistance, en fonte, destiné à supporter un poids unique de 5000^k appliqué à son extrémité, distante du point d'encastrement de $0^m,75$. On adoptera pour résistance de sécurité de la fonte à la flexion $R = 5\,000\,000$, et au cisaillement $S = 4\,000\,000$.

1er Cas. *La hauteur* b *est constante et égale à* $0^m,18$. — On a pour moment fléchissant maximum

$$M = 5000 \times 0.75 = 3750^{km}.$$

Par conséquent, la formule d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

devient

$$\frac{3\,750}{5\,000\,000} = \frac{ab^2}{6}$$

ou en appelant y_0 la largeur de la pièce au point d'encastrement

$$\frac{3750}{5\,000\,000} = \frac{y_0 \times \overline{0,18}^2}{6},$$

d'où

$$y_0 = \frac{3750 \times 6}{5\,000\,000 \times 0,0324} = 0^m,138.$$

Soit maintenant y_1, la largeur de la portée d'extrémité destinée à résister à l'effort tranchant, on aura

$$y_1 \times 0,18 \times S = 5000^k,$$

d'où

$$y_1 = \frac{5000}{0,18 \times 4\,000\,000} = 0^m,007.$$

Ainsi, dans ce cas, la largeur de la pièce au point d'encastrement devra être $0^m,138$ et la largeur de la portée à l'extrémité $0^m,007$.

La forme du solide sera celle de la fig. 236.

2e Cas. *La largeur est constante et égale à* $0^m,05$. — En élévation le profil sera une parabole. Soit z_0 la hauteur de la pièce au point d'encastrement ; la formule d'équarrissage

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v},$$

nous donne

$$\frac{3750}{5\,000\,000} = \frac{ab^2}{6} = \frac{0,05 \times z_0^2}{6},$$

d'où

$$z_0^2 = \frac{3750 \times 6}{5\,000\,000 \times 0,05} = 0,09,$$

et

$$z_0 = \sqrt{0,09} = 0,30.$$

Cette hauteur suffit pour déterminer la parabole.

Soit maintenant z_1 la hauteur de la portée d'extrémité ; on aura

$$z_1 \times a \times S = 5000^k$$

d'où

$$z_1 = \frac{5\,000}{a \times S} = \frac{5\,000}{0,05 \times 4\,000\,000} = 0^m,025.$$

La pièce affectera la forme des figures 238, I ou II.

Nota. — On reconnaît dans cette forme parabolique du corbeau d'égale résistance le profil connu sous le nom de *quart de rond,* si employé par les architectes pour les échines des chapiteaux d'ordre dorique et, plus généralement, pour toutes les moulures de force ; on entend par là celles qui ont pour fonction de supporter des charges à leur extrémité.

266. Corbeau supportant une charge uniformément répartie. — (*a*) **Théorie.** — Dans ce cas la représentative des moments est une parabole dont l'axe est vertical et passe par l'extrémité de la pièce (fig. 239-I). Les moments M sont alors proportionnels aux carrés x^2 des abscisses ; ces dernières étant encore ici comptées à partir de l'extrémité.

1er Cas. *La hauteur est constante.* — Les largeurs du profil, en plan, devant être proportionnelles aux moments fléchissants, ce profil sera limité par une parabole *o*A tangente en O à l'axe de la pièce (fig. 239-II). On fera mieux de subs-

tituer au profil ainsi obtenu un profil $A'OA'_1$ symétrique par rapport à l'axe de la pièce, profil limité par des paraboles dont les distances, telles que $f'g'$, sont en chaque point

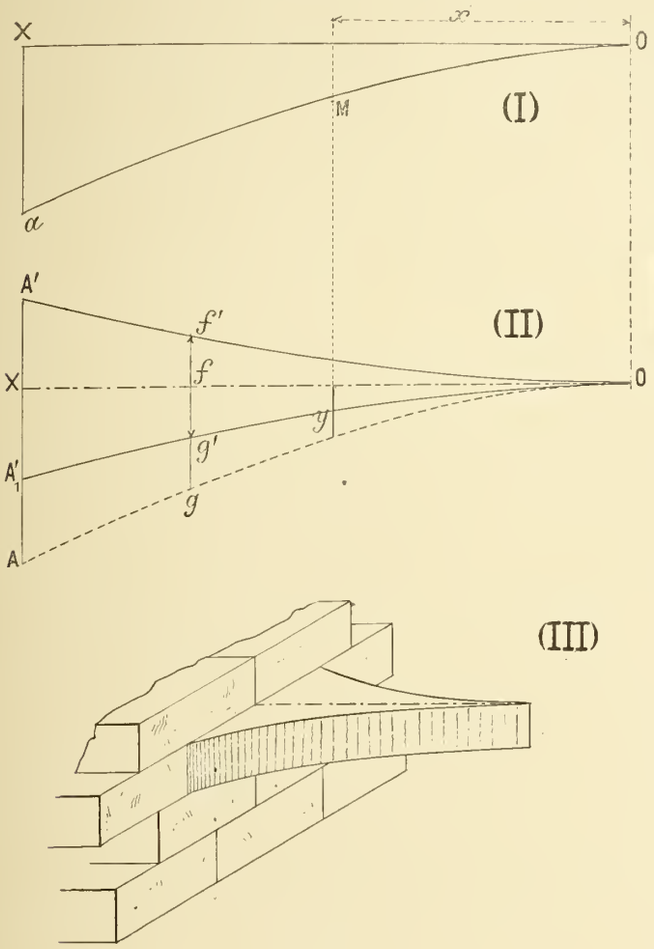


Fig. 239

égales aux ordonnées, telles que fg, de la parabole primitive oA. La figure 239-III montre ce corbeau en perspective.

Nous ferons enfin remarquer qu'une portée d'extrémité n'est plus nécessaire ici, car, à l'extrémité, l'effort tranchant est nul.

2e Cas. *La largeur est constante.* — Dans ce cas, le moment de résistance $I : v$ est proportionnel au carré z^2 de la hauteur, car on a

$$\frac{I}{v} = \frac{az^2}{6}.$$

Mais $I : v$ est aussi proportionnel aux moments fléchissants, lesquels sont proportionnels aux carrés x^2 des abscisses. Si l'on désigne par K le coefficient de proportionnalité on doit donc avoir

$$\frac{I}{v} = \frac{az^2}{6} = Kx^2, \qquad \text{d'où}$$

$$z = x\sqrt{\frac{6K}{a}}.$$

On voit donc, par là, que z doit être simplement proportionnel à x; en d'autres termes, le profil en élévation est limité par des droites (fig. 240). Les dimensions à l'encastrement se déterminent, dans tous les cas, en appliquant la formule d'équarrissage.

(*b*) **Application numérique.** — Calculer les dimensions d'un corbeau d'égale résistance en fonte à section rectangulaire connaissant : 1° sa largeur constante, $a = 0{,}05$;

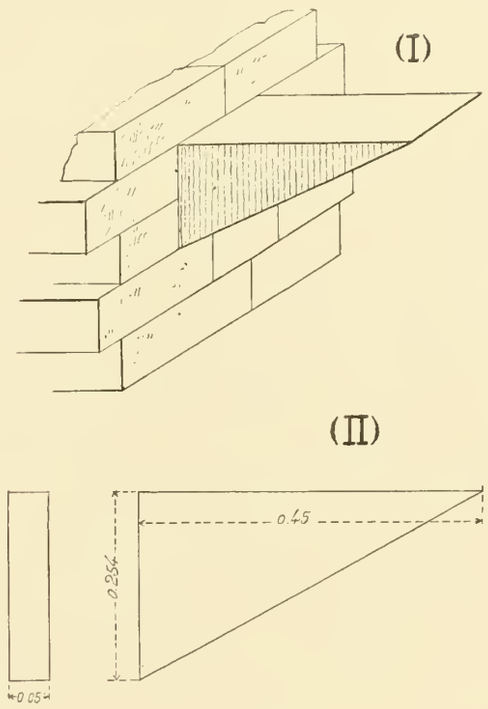


Fig. 240

2° sa longueur d'encorbellement, $l = 0{,}45$, et 3° la charge totale, uniformément répartie $P = 12\,000^k$ (fig. 240-II).

Dans ces conditions, on a pour moment d'encastrement (v. n° 209-*a*)

$$M = \frac{Pl}{2} = \frac{12000 \times 0{,}45}{2} = 2700^{km}.$$

On a aussi

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}$$

d'où, en adoptant $R = 5\,000\,000^k$,

$$\frac{2700}{5\,000\,000} = \frac{az^2}{6} = \frac{0{,}05 \times z^2}{6}; \qquad \text{d'où}$$

$$z^2 = \frac{2700 \times 6}{5\,000\,000 \times 0{,}05} = 0{,}0648, \qquad \text{et}$$

$$z = \sqrt{0{,}0648} = 0^m{,}254.$$

§ 5. — Poutres d'égale résistance

267. Poutre posée sur deux appuis de niveau et chargée d'un poids unique en son milieu. — La représentative des moments de charge est formée de deux droites BA et AC (v. n° 201-*a*).

Prenons pour origine l'une des extrémités de la poutre. En raisonnant comme précédemment, on arrivera aux conclusions suivantes :

1er Cas. *La hauteur* b *est constante*, — alors la largeur *a* doit être proportionnelle au moment fléchissant et le profil de la poutre devra affecter, en plan, la forme d'un losange

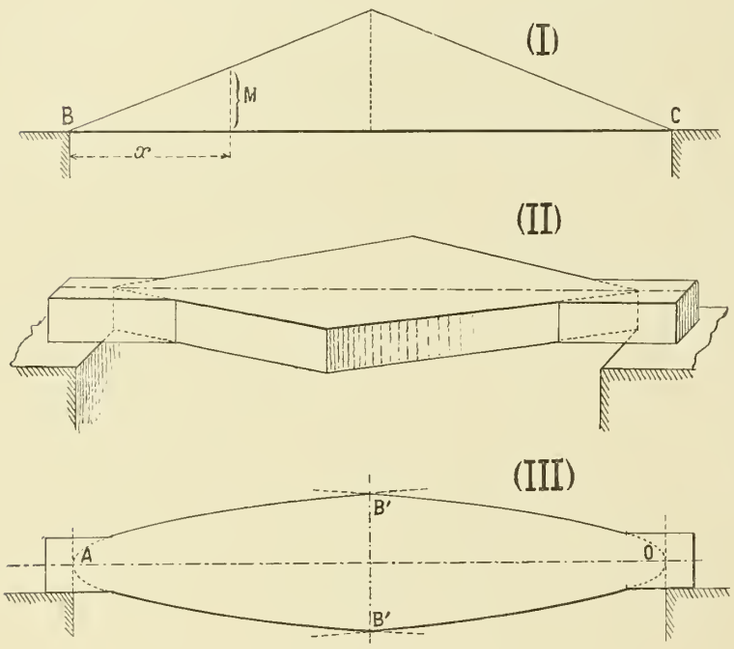


Fig. 241

(fig. 241-II). On devra ménager aux deux extrémités des portées suffisantes pour résister à l'effort tranchant qui est égal à la moitié du poids total.

2e Cas. *La largeur* a *est constante.* — Nous avons vu (n° 264) que dans ce cas, c'est-à-dire pour les solides de la 2e classe, les hauteurs du profil devaient être proportionnelles à $\sqrt{M}$; or M étant, d'après la fig. 241-I, proportionnel à l'abscisse x, si z est la hauteur de profil répondant à l'abscisse x on devra avoir

$$z = K\sqrt{x} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1}{K^2}z^2.$$

K est ici un coefficient de proportionnalité que les données numériques du problème permettraient de calculer.

En élévation, le profil affectera donc la forme de deux paraboles (fig. 241-III), ayant pour axe commun AO, l'axe horizontal de la pièce et pour tangentes au sommet les verticales des appuis. Au milieu de la portée, en B'B', ces paraboles se rencontrent, *mais ne se raccordent pas.* Enfin, il faut aux extrémités A et O ménager des portées à section constante pour résister aux efforts tranchants.

268. Poutre posée sur deux appuis et uniformément chargée. — (*a*) **Théorie.** — La représentative des moments fléchissants est une parabole AOB (fig. 242-I) dont l'axe est vertical ; nous prendrons comme origine des coordonnées le point *o*, milieu de la poutre.

1er Cas. *La hauteur* b *est constante.* — En plan (fig. II), les largeurs *y* doivent être proportionnelles aux moments fléchissants ; on voit donc que ce profil, en plan, sera formé de deux paraboles A'C'B' et A'D'B' ayant leur axe perpendiculaire à celui de la pièce et se rencontrant sur cet axe.

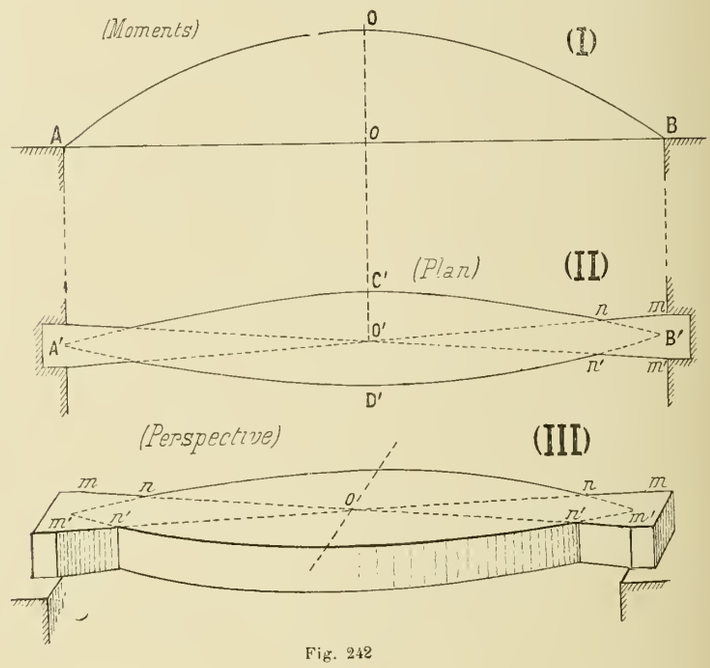


Fig. 242

Il faudra ménager ici des portées aux deux extrémités pour résister à l'effort tranchant qui est maximum au-dessus des appuis. Comme les efforts tranchants diminuent à mesure qu'on se rapproche du milieu O et que la représentative de ces efforts tranchants est une droite passant par l'origine, c'est-à-dire par le centre O (v. n° 204-*b*), les portées devront affecter la forme d'une queue d'hironde O'*nm* — O'*n'm'* dont les côtés prolongés passeraient par le centre O' de la pièce.

2e Cas. *La largeur* a *est constante.* — En élévation, les hauteurs z du profil doivent être proportionnelles aux ra-

cines carrées des ordonnées telles que Mm (243-I) de la parabole des moments fléchissants.

Soit h la hauteur maxima de cette parabole, que nous supposerons rapportée à sa tangente au sommet Om', prise pour axe des abscisses, on aura :

$$(1) \qquad \overline{Mm'} = \frac{1}{K}x^2,$$

K étant un coefficient dont nous ne précisons pas actuellement la valeur. De cette valeur de Mm' on déduit

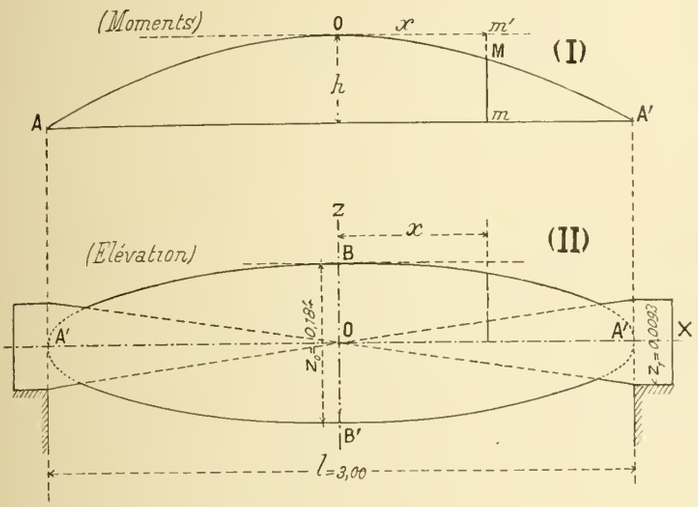


Fig. 243

$$\overline{Mm} = h - \frac{x^2}{K}.$$

Prenons (fig. II) le point du profil de la poutre situé au droit de M ; soit z son ordonnée ; on doit avoir

$$z^2 = K' \times \overline{Mm} = K'(h - \overline{Mm'}),$$

K' étant un autre coefficient. Nous pouvons encore écrire

$$(2) \qquad z^2 = K'\left(h - \frac{x^2}{K}\right)$$

Cette équation donne la relation qui lie z et x pour chaque point du profil ; c'est donc l'équation de ce profil.

En développant l'équation (2) elle devient

$$\frac{x^2}{Kh} + \frac{z^2}{K'h} = 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont les axes sont OX et OZ.

La dimension BB' du petit axe s'obtiendra en écrivant l'équation d'équarrissage pour la section milieu.

Quant aux portées des extrémités elles auront la forme d'une queue d'hironde, pour les mêmes raisons que ci-dessus.

(*b*) **Application numérique.** — Une poutre d'égale résistance en fonte, de $3^m,00$ de longueur, à section rectangulaire d'épaisseur constante $a = 0^m,08$, doit supporter une charge totale $P = 6000^k$ uniformément répartie. Calculer les dimensions du petit axe de l'ellipse qui limite, en élévation, le profil de la pièce, ainsi que les hauteurs des portées au-dessus des appuis.

On a pour le moment maximum :

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{6\,000 \times 3}{8} = 2\,250^{km}.$$

On a également, puisque $a = 0,08$,

$$\frac{M}{R} = \frac{ab^2}{6} = \frac{z^2 \times 0,08}{6},$$

d'où, en appelant z_0 la hauteur du petit axe,

$$z_0^2 = \frac{2250 \times 6}{5\,000000 \times 0,08} = 0,0337$$

et

$$z_0 = \sqrt{0,0337} = 0^m,184.$$

Pour la portée, calculée en vue de l'effort tranchant, on doit avoir, en désignant par z_1 la hauteur de la portée,

$$z_1 \times a \times S = \frac{P}{2},$$

d'où en remplaçant a par 0,08, S (résistance de sécurité au cisaillement), par 4000000^k et P par 6000^k,

$$z_1 = \frac{3000}{0,08 \times 4000000} = 0^m,0093$$

269. **Pièces d'égale résistance à sections modulées.** — Ces pièces sont d'un emploi moins fréquent que les précédentes, car elles conduisent à des profils plus compliqués. Nous allons cependant en étudier un exemple.

Exemple. — Calculer le profil d'un corbeau à section carrée supportant un poids unique à son extrémité (fig. 244).

La représentative des moments est une droite OA ; ainsi que nous l'avons dit plus haut (n° 264) les hauteurs z du

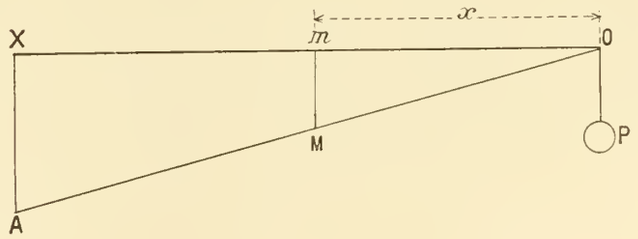


Fig. 244

profil doivent être proportionnelles aux racines cubiques des moments ; on aura donc

$$z^3 = kx$$

pour l'équation du profil, ce qui représente une parabole du 3e degré.

Nous ne nous arrêterons pas aux solides de cette espèce.

CHAPITRE VI

CHARGE MOBILE SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS *

§ 1. — Rappel de quelques propriétés de la parabole

270. **Propriétés analytiques.** — (*a*) **Equation générale et tracé des paraboles à axe vertical.** — Nous dirons qu'une parabole est *orientée verticalement* lorsque son axe est vertical.

On sait qu'une pareille parabole a pour équation générale

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Le coefficient A est celui qui détermine la forme de la parabole, c'est-à-dire, en somme, sa distance focale. Deux paraboles dont les équations ne diffèrent que par les coefficients B et C peuvent être tracées avec un même *patron* découpé. Dans ces conditions il suffit de deux points A et B (fig. 245) pour déterminer la position d'une parabole de forme donnée et orientée verticalement.

Graphiquement on opère comme suit :

1° On découpe dans de la carte le patron M de la parabole en ayant soin que la base CD de ce patron soit bien d'équerre avec l'axe.

2° On place cette base CD sur le té et, en déplaçant, à la

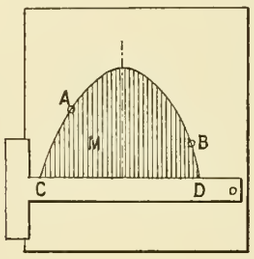


Fig. 245

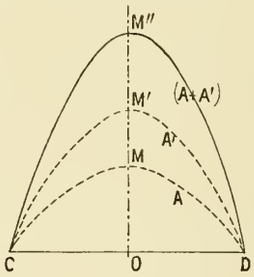


Fig. 246

fois, le té sur la planche et la base du patron sur le té, on arrive facilement à faire passer la parabole par les deux points donnés A et B.

(*b*) **Addition de deux paraboles.** — Lorsque l'on additionne analytiquement deux paraboles

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$
$$y = A'x^2 + B'x + C',$$

on obtient une nouvelle parabole

$$y = (A + A')x^2 + (B + B')x + C + C',$$

et la forme, c'est-à-dire *le patron* de cette nouvelle parabole, ne dépend que du coefficient $(A + A')$; c'est-à-dire, en définitive, des formes, ou *patrons*, de chacune des deux paraboles composantes. De telle sorte que le patron de la parabole résultante s'obtiendrait (fig. 246) en additionnant analytiquement les deux patrons composants.

La meilleure manière pour le construire sera de donner aux deux paraboles A et A' une base commune CD, et, sans même les tracer, si l'on connaît les ordonnées OM et OM' de leurs sommets, de prendre l'ordonnée OM'' du sommet de la parabole résultante égale à leur somme

$$OM'' = OM + OM'.$$

Les trois points C, M'' et D suffisent alors pour tracer la parabole finale.

(*c*) **Addition d'une droite et d'une parabole.** — Une droite dont l'équation générale est

(1) $$y = mx + n$$

et une parabole orientée verticalement

(2) $$y = Ax^2 + Bx + C$$

donnent, en s'ajoutant analytiquement, la courbe

(3) $$y = Ax^2 + (B + m)x + C + n,$$

c'est-à-dire une parabole de même patron que la première. Il en résulte qu'une parabole sous la forme générale (2) peut toujours être considérée comme résultant de l'addition analytique de la parabole

$$y = Ax^2$$

avec la droite

$$y = Bx + C.$$

* *Ce chapitre intéresse surtout les Ingénieurs.*

Dès lors, le problème précédent (faire passer une parabole donnée par deux points donnés M et N) peut se résoudre comme suit : 1° on trace en ACB (fig. 247) un patron de la parabole donnée ; 2° par les points donnés M et N on

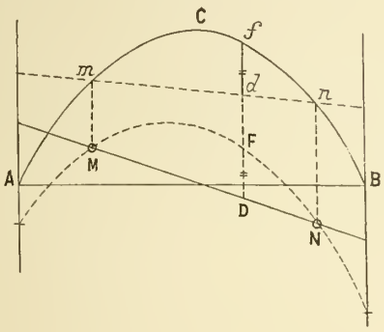


Fig. 247

mène des verticales jusqu'aux rencontres en m et n avec le patron ; 3° on mène les cordes MN et mn et, par rapport à la corde MN, on prend des ordonnées, telles que DF, égales aux ordonnées, telles que df, du patron par rapport à sa corde mn.

271. **Tracé de la parabole par recoupement de droites pivotantes.** — (a) **Théorème.** — **1er Énoncé.** — « Le lieu « des points d'intersection des droites qui, pivotant autour « de deux points fixes, ont la somme de leurs pentes égale « à une quantité constante est une parabole orientée verti- « calement. »

Soient (fig. 248) A et B les deux points fixes ; par ces points menons des verticales AA′, BB′ et soit l leur distance, comptée suivant une horizontale A′B′ que nous prendrons pour axe des x, tandis que l'axe des y sera la verticale A′A.

Soient AM et BM deux des droites ; et soient α et β les angles qu'elles font avec l'horizontale. On doit avoir, d'après l'énoncé :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \mathrm{K},$$

K étant une quantité constante.

Soient : a et b les ordonnées des pivots A et B. Soit M le point d'intersection des deux droites pivotantes, et soient x et y ses coordonnées. On a évidemment, pour la pente, $\operatorname{tg}\alpha$, de la droite AM :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-a}{x},$$

et pour la pente $\operatorname{tg}\beta$, de la droite BM

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y-b}{l-x}.$$

En substituant dans l'équation (1) on obtient

$$\frac{y-a}{x} + \frac{y-b}{l-x} = \mathrm{K}.$$

En simplifiant, il vient :

$$\text{(2)} \qquad y = -\frac{\mathrm{K}}{l}x^2 + x\left(\mathrm{K} + \frac{b-a}{l}\right) + a.$$

Telle est l'équation du lieu ; elle représente bien une parabole AMB orientée verticalement. Son patron ne dépend que du coefficient de x^2, qui est $-\frac{\mathrm{K}}{l}$.

En faisant dans le second membre

$x = o$, on en déduit $y = a$, et
$x = l$, on en déduit $y = b$.

Ce qui prouve qu'elle passe par les deux points A et B.

Si à la place des deux points A et B on s'était donné les points A′ et B′ qui sont leurs projections sur l'axe des x, l'équation (2) représenterait encore le nouveau lieu géométrique, à la condition d'y faire $a = o$ et $b = o$; elle s'écrirait alors

$$\text{(2')} \qquad y = -\frac{\mathrm{K}}{l}x^2 + \mathrm{K}x.$$

C'est l'équation d'une parabole A′M′B′ de même patron que la première ; par conséquent, si ce patron avait été découpé à l'occasion du premier lieu, il suffirait de le faire passer par les points A′ et B′, comme il est dit plus haut, pour avoir le deuxième lieu et inversement.

Il résulte de ce qui précède que le théorème peut s'énoncer sous une autre forme qui est la suivante :

(b) **Même théorème.** — **2° Énoncé** (fig. 248). — « Dans une « parabole, orientée verticalement, tous les angles inscrits « dans un même segment (AMB) ont leurs côtés inclinés « sous des pentes dont la somme est constante. »

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \mathrm{K}.$$

(c) **Problème auxiliaire.** — Prenons cette parabole, ainsi que l'angle inscrit dans une de ses positions AMB (fig. 249) ; coupons le tout par une verticale EF qui soit toujours à une même distance, p, du sommet M de l'angle inscrit.

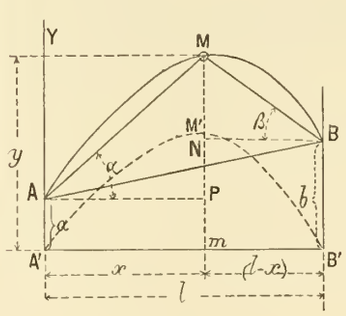


Fig. 248

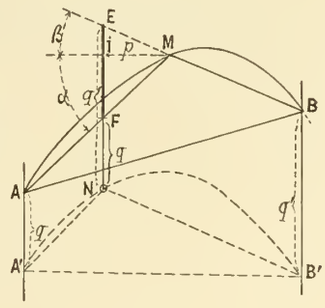


Fig. 249

Soient E et F les points où cette verticale coupe les deux côtés de l'angle ; je dis tout d'abord que EF est une quantité constante. En effet, on a :

$$\mathrm{EF} = \mathrm{FI} + \mathrm{IE} = p(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta), \qquad \text{d'où}$$

$$\mathrm{EF} = p\mathrm{K},$$

c'est-à-dire une quantité constante. C. Q. F. D.

Cela posé : sur cette verticale prenons un point N qui soit à une distance constante q du point F. D'après ce qui précède il sera, aussi, à une distance constante q' du point E ; faisons maintenant mouvoir le point M et avec lui l'angle inscrit ainsi que la verticale EF et le point N.

Je dis que le lieu du point N est une parabole orientée verticalement et de même patron que la parabole AMB.

En effet : menons N'B' et NA' parallèles aux côtés MB et MA de l'angle inscrit. Ces droites recouperont en B' et en A' les verticales des points A et B, et l'on aura évidemment

$$AA' = q, \qquad BB' = q'.$$

Par conséquent les points A' et B' sont fixes ; les droites A'N et B'N qui y passent ont des pentes dont la somme est constante, puisqu'elle est la même que celle des côtés de l'angle inscrit. Leur intersection N décrit donc une parabole de même patron que la première. C. Q. F. D.

Nota. — On voit que cette parabole passe par les points A' et B', ce qui suffit, en se servant du patron de la première, pour la tracer exactement.

1re SECTION

MOMENTS FLÉCHISSANTS DUS A UNE CHARGE MOBILE

§ 2. — PRÉLIMINAIRES

272. **Objet de ce chapitre.** — (*a*) **Position de la question.** — Une poutre, à deux appuis simples, porte une charge permanente uniformément répartie. Un convoi s'engage sur la poutre et la parcourt ; chacun des véhicules qui composent ce convoi (locomotive, tender, wagon) transmet son poids par l'intermédiaire des roues ; les choses se passent comme si plusieurs poids 1, 2, 3, 4 (fig. 250), réunis entre eux à des distances invariables, prenaient sur

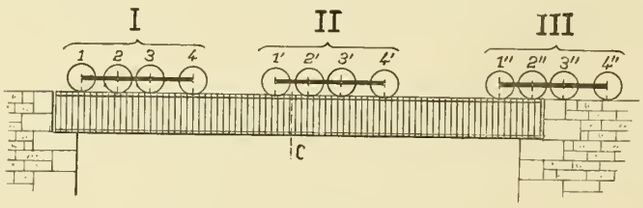


Fig. 250

la poutre toutes les positions possibles, telles que 1', 2', 3', 4', 1'', 2'', 3'', 4''. Il est évident que, pendant ce passage, une section déterminée C verra se modifier à chaque instant le moment fléchissant M ainsi que l'effort tranchant T auxquels elle était soumise par le fait de la charge permanente.

Chacune de ces quantités M ou T passera par un maximum et la section doit avoir les dimensions voulues pour résister à chacun de ces deux maxima, ne les supportât-elle que pendant un instant. Etudions en premier lieu les moments fléchissants et exposons d'abord la marche que nous allons suivre.

(*b*) **Marche qui sera suivie.** — Nous considérerons le convoi au moment où l'essieu de tête s'engagera sur la poutre. Après lui viendra le second, puis le troisième et ainsi de suite ; arrivés à l'extrémité, les essieux se dégageront dans le même ordre que celui dans lequel ils s'étaient engagés.

Dès qu'un essieu s'engagera, nous considérerons la section qui se trouve toujours au-dessous de lui ; nous calculerons, soit algébriquement soit graphiquement, le moment fléchissant dans cette section et, adoptant une échelle déterminée, nous le représenterons par une ordonnée. Nous aurons donc

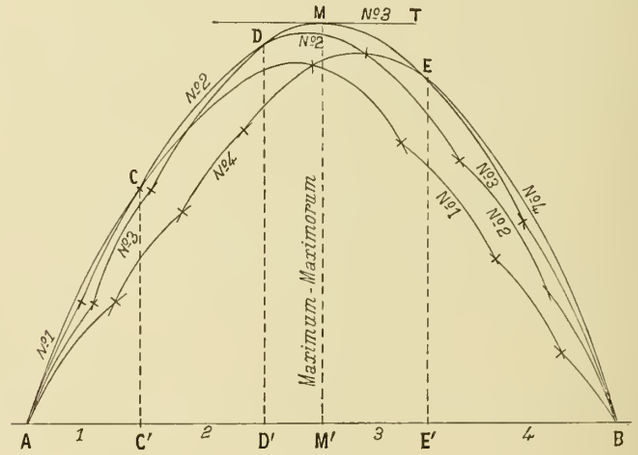


Fig. 250 bis

ainsi autant de représentatives de moments fléchissants que le convoi comptera d'essieux.

Supposons qu'il y ait quatre essieux ; nous aurons quatre représentatives n° 1, n° 2, n° 3 et n° 4 qui répondront aux essieux possédant ces mêmes numéros. Elles passeront tou-

tes par les extrémités de la poutre puisque celle-ci n'est pas encastrée (fig. 250bis). Ces courbes se recouperont en des points A, C, D, E, B; dès lors si nous ne considérons que le contour extérieur ACDEB, nous pourrons dire : « De C′ en D′ « c'est le passage de l'essieu n° 2 qui est dangereux ; de E′ « en B′ c'est le passage de l'essieu n° 4, etc. »

Or, nous démontrerons (v. n° 276) que lorsqu'une section est placée entre deux essieux consécutifs elle supporte toujours un moment fléchissant moindre que celui qu'elle avait subi, ou qu'elle subira, lorsque l'un de ces deux essieux (à déterminer d'ailleurs) y était passé, ou y passera. Il résultera de là que le polygone curviligne ACDEB représentera les moments maxima supportés à un instant donné, qu'il nous importe peu, d'ailleurs, de connaître pour chaque section.

Si l'on veut que la poutre soit *d'égale résistance*, alors le moment de résistance (I : v) de chaque section devra être calculé en fonction de ce moment, d'après la formule d'équarrissage I : v = M : R.

Si la poutre est peu importante on consentira à lui donner partout une section constante. Dès lors, en menant à ce polygone curviligne (fig. 250bis) une tangente horizontale MT on en déduira en MM′ le moment le plus grand de tous, celui que nous nommerons *maximum maximorum*, et il servira au calcul de la section.

Il nous faut donc apprendre à construire chacune des représentatives n° 1, n° 2, etc.

§ 3. — La charge mobile est un poids unique

273. **Moments développés au passage de la charge** (fig. 251). — (*a*) **Recherche des moments.** — Soit P le poids mobile et soit C le point où il se trouve à un instant donné.

Supposons que C′c' (fig. II) soit l'ordonnée représentative du moment fléchissant au-dessous de la charge; nous l'avons obtenue par un funiculaire Collignon.

Nous savons que la ligne représentative des moments, aux

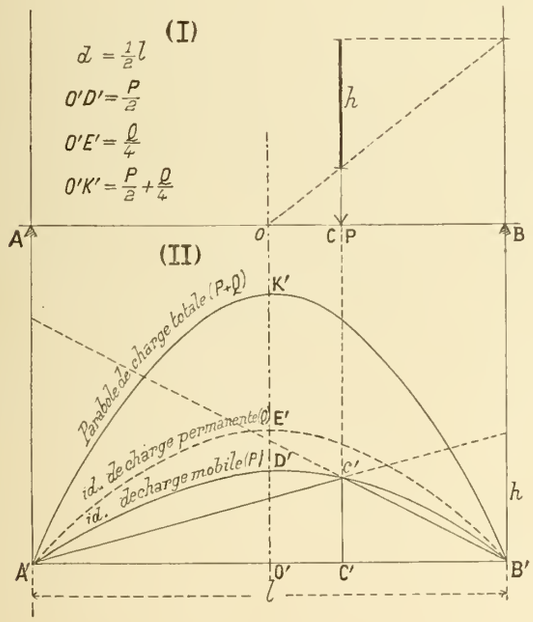


Fig. 251

autres points, se compose de la ligne brisée A′c'B′, ce qui prouve tout d'abord que le moment maximum, à chaque instant, se produit sous la charge.

Faisons maintenant mouvoir cette charge et cherchons le lieu des points c'. Je dis que c'est une parabole. En effet l'effort tranchant entre les points A et C, est donné par la pente de la ligne droite représentative A′c', tandis que de C en B il est fourni par la pente de la droite c'B′ (fig. II). Or chacun de ces efforts tranchants a pour valeur la réaction de chacun des appuis, et comme la somme de ces réactions est numériquement égale à la charge P, il en résulte que la somme des pentes des lignes A′c' et c'B′ est constante et que, par suite (v. n° 271), le lieu du point c' est une parabole. C. Q. F. D.

Lorsque la charge mobile sera au milieu elle donnera un moment *maximum maximorum* qui, nous le savons, est égal à 1/4 Pl, l étant la portée de la poutre.

Or, si nous considérions une charge permanente P″, *uniformément répartie*, et telle que l'on eût P″ = 2 P, elle produirait des moments fléchissants dont la représentative serait aussi une parabole; son ordonnée maxima aurait pour valeur 1/8 P″l, c'est-à-dire 1/4 Pl, ce qui nous permet d'énoncer le principe suivant :

« (*b*) **Théorème.** — Une charge mobile unique produit, en « chaque point au-dessus duquel elle passe, le même mo- « ment fléchissant que celui que produirait une charge per- « manente, uniformément répartie, qui aurait une valeur « double. »

(*c*) **Effet d'une charge permanente.** — Si, en plus de la charge mobile P, il y a une charge permanente Q, uniformément répartie, cette dernière produira, pour son compte, des moments fléchissants dont la représentative sera une parabole, d'ordonnée maxima égale à 1/8 Ql; de sorte que, en définitive, il faudra additionner analytiquement la parabole 1/8 Ql avec la parabole 1/4 Pl pour avoir la représentative des valeurs maxima auxquelles pourront atteindre, à un instant donné, les moments fléchissants en

chaque point de la poutre traversée par la charge mobile. Nous obtiendrons ainsi ce que nous nommerons **la parabole de charge totale**, A'K'B' (fig. 251-II). Son ordonnée maxima a pour valeur vraie $1/4\ Pl + 1/8\ Ql$; sur l'épure, comme cette dernière est faite par le tracé Collignon, c'est-à-dire avec une distance polaire $d = 1/2\ l$, on aura

$$O'D' = 1/2\ P, \qquad O'E' = 1/4\ Q, \qquad O'K' = 1/2\ P + 1/4\ Q.$$

§ 4. — La charge mobile est un convoi

274. **Le convoi est toujours complètement engagé.** — (*a*) **Parabole de charge concentrée.** — Imaginons, pour fixer les idées, un convoi comportant quatre essieux, que nous numéroterons 1, 2, 3 et 4 de gauche à droite.

Soient p_1, p_2, p_3, p_4 (fig. 252-I) les charges que chacun d'eux supporte, et soit $P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ le total de ces charges.

Prenons le convoi dans une position quelconque et par une méthode quelconque, mais de préférence ici par un funiculaire Collignon, cherchons la représentative des moments fléchissants pour cette position du convoi.

La fig. II montre le tracé connu pour obtenir ce funiculaire Collignon (v. n° 42 à 44) et on voit (fig. I) en $A'n_1$, n_2, n_3, n_4, B' ce funiculaire. Le côté initial $A'n_1$ recoupe le côté final $B'n_4$ en un point G par lequel passerait la résultante P de toutes les charges des essieux. Le centre de gravité du convoi serait sur cette verticale.

(*a'*) **Funiculaire du convoi.** — Remarquons que le polygone $n_1n_2n_3n_4G$ est précisément le funiculaire que nous serions amenés à tracer si nous cherchions la résultante des quatre charges et les moments de ces charges par rapport à un essieu quelconque ; c'est pourquoi nous nommerons ce polygone le *funiculaire du convoi*; nous aurons souvent à nous en servir.

Cela posé, faisons circuler le convoi, mais en supposant *qu'il reste toujours engagé*, c'est-à-dire que l'essieu de tête n° 1 ne passe pas à gauche de la culée A' et que l'essieu de queue n° 4 ne sorte pas à droite, de la culée B'. Si, pour chaque position du convoi, on refait un funiculaire analogue, la verticale G occupera toujours la même position relative par rapport aux quatre essieux, et le point G se déplacera sur une parabole A'GIB', d'après le problème précédent. L'ordonnée maxima OI de cette parabole devra mesurer un moment égal à $1/4Pl$, et comme, dans le tracé Collignon, le coefficient d'échelle est $1/2l$, on devra avoir : $OI = 1/2P$.

Nous nommerons la parabole ainsi décrite par le point G *la parabole de charge concentrée*, parce que si tous les poids du convoi étaient concentrés en un seul point, cette parabole ferait connaître, par ses ordonnées, les moments maxima en chaque point de la poutre. Nous allons voir maintenant que le fait de disposer les poids p_1, p_2, p_3 et p_4 en convoi, au lieu de les concentrer, permet de corriger ces moments maxima en les diminuant.

(*b*) **Sécantes et polygone de correction.** — Suivons maintenant les déplacements des points n_1, n_2, n_3 et n_4 que nous pourrions nommer les *curseurs* de chaque essieu, parce que leurs ordonnées donnent à chaque instant la mesure du moment fléchissant au droit de l'essieu correspondant.

Raisonnons pour le *curseur* n_3. Si l'on prend en α_3 et β_3 les intersections de la verticale de ce point avec les côtés initial et final du funiculaire, il résulte de ce qui a été dit plus haut (v. n° 271) que les segments $n_3\alpha_3$ et $n_3\beta_3$ (que pour abréger nous désignerons par α_3 et β_3) garderont une longueur constante.

Il est facile de voir, d'après la théorie des moments (v. n°s 34, 35...), que α_3, mesuré à l'échelle, donne, *dans le convoi*, le moment, par rapport au point n_3, des charges p_1 et p_2 situées à la gauche de ce point, tandis que β_3 donne le moment des forces, p_4..., situées à sa droite, et cela serait vrai pour tout autre point tel que t, compris entre deux essieux.

Il est bien évident, d'ailleurs, que ces moments α_3 et β_3 sont constants puisque le convoi garde une constitution invariable pendant toute la durée de son passage sur la poutre.

Dès lors (voir le problème auxiliaire du n° 271), le point n_3 décrit une parabole de même patron que la parabole A'IB'. Pour l'obtenir en position, il faudrait :

1° Descendre A' en a_3 de toute la hauteur α_3 ;

2° Descendre B' en b'_3 de toute la hauteur β_3 ;

3° Sur la base nouvelle $a'_3b'_3$ ainsi obtenue, tracer une parabole de même patron que la précédente. Nous ne l'avons pas dessinée, mais, si nous l'avions fait, les ordonnées, comptées entre cette parabole et l'axe des x, A'B' eussent donné les moments fléchissants au droit de l'essieu n° 3.

Il peut paraître plus simple (fig. III) : 1° de conserver la parabole primitive AIB ; 2° de porter en sens contraire, c'est-à-dire en montant, de A en a_3 et de B en b_3, les segments α_3 et β_3 ; 3° de mener la droite a_3b_3, et ce seront alors les portions d'ordonnées comprises entre cette droite et la parabole primitive qui donneront les moments fléchissants au droit de l'essieu mobile n° 3.

La droite a_3b_3, ainsi construite, se nommera la *sécante de correction* de l'essieu n° 3.

On opérera de même pour les autres essieux.

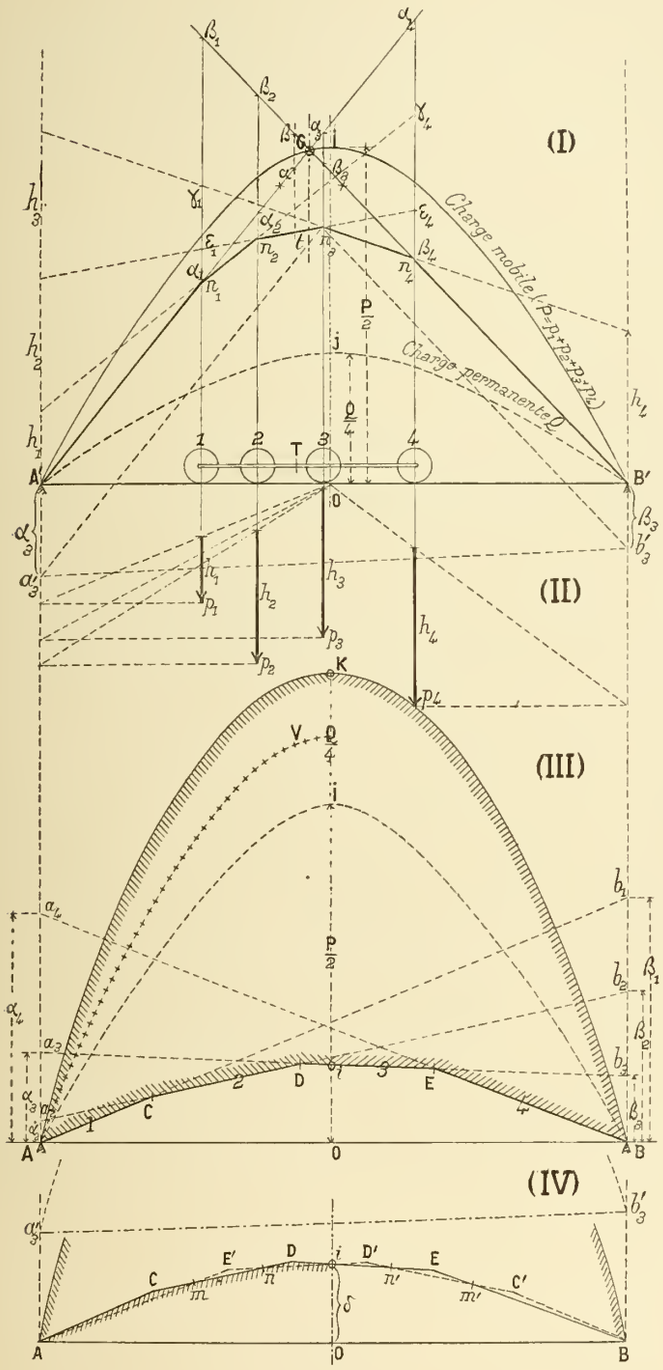


Fig. 252

(*c*) **Résumé.** — La construction se fait comme suit :

1° On cherche, graphiquement ou algébriquement, *par rapport à chaque essieu*, les moments α_1 ($\alpha_1 = 0$), α_2, α_3, α_4... des poids de convoi situés à *la gauche* de cet essieu et l'on porte de A en a_2, en a_3 et en a_4 ces moments sur la verticale d'origine. (Suivre sur la fig. III.)

2° On cherche, de même, les moments β_1, β_2, β_3, β_4 ($\beta_4 = 0$) des poids de convoi situés à *la droite* de chaque essieu et on porte de B en b_1, en b_2 et en b_3, ces moments sur la verticale d'extrémité.

3° On joint les points correspondants, savoir : a_1 (a_1 est confondu avec A) avec b_1, a_2 avec b_2, a_3 avec b_3, a_4 avec b_4 (b_4 est confondu avec B), ce qui donne ce que nous avons nommé les *sécantes de correction*.

4° On considère le polygone convexe ACDEB, dit *polygone de correction*, formé par ces sécantes, et la parabole AIB, dite de *charge concentrée*, qui représenterait les moments fléchissants maxima que produirait sur son passage le poids total du convoi si ce poids P était concentré en un seul point.

5° Cela fait, les ordonnées interceptées entre la parabole de charge concentrée et le polygone de correction donnent les moments maxima qui, à un instant donné, seront produits sous le passage de tel ou tel essieu.

(*d*) **Effet d'une charge permanente.** — S'il y a, en outre, une charge permanente uniformément répartie, Q, on ajoute sa parabole représentative A'JB' (fig. I) à celle A'IB' de la charge concentrée mobile P, et (fig. III, voir les contours hachurés) c'est entre cette *parabole totale de charge* AKB et le polygone de correction qu'il faut compter les ordonnées représentatives des moments. — On voit sur l'épure que de A en C (fig. III) ce sera sous l'essieu n° 1 que se produiront les moments dangereux ; de C en D ce sera sous l'essieu n° 2 et ainsi de suite.

275. **Convois marchant dans les deux sens.** — (*a*) **Train descendant circulant seul.** — Supposons que le convoi se retourne, c'est-à-dire que l'essieu n° 1 soit placé à droite du train au lieu d'être à gauche et que, avec cette nouvelle orientation, il circule sur la poutre. En refaisant l'épure, on obtiendra (fig. 252-IV) un polygone de correction AE'D'C'B symétrique du précédent, ACDEB, par rapport à la verticale milieu. Il en résulte que, pour nous placer dans les conditions les plus défavorables, le véritable polygone de correction à adopter sera le polygone convexe A*mnin'm'*B dont les côtés sont empruntés tantôt à l'un tantôt à l'autre des deux premiers polygones.

(*b*) **Nota.** — Le demi-polygone de gauche A*mni* est évidemment symétrique du demi-polygone de droite B*m'n'i* par rapport à la verticale milieu, par conséquent on aurait pu se contenter de ne faire que la moitié de l'épure.

(*c*) **Croisement de deux trains.** — Imaginons deux trains, l'un *montant*, l'autre *descendant*, circulant en sens inverse sur la poutre.

Très souvent la voie montante sera supportée par des

poutres maîtresses distinctes de celles qui supporteront la voie descendante et, dans ce cas, il sera inutile de prévoir les effets produits par un croisement de trains ; mais s'il en était autrement, voici comment on opérerait.

Considérons un point quelconque de la poutre. Aucun train n'est encore engagé. Ce point supporte donc le seul moment dû à la charge permanente, moment représenté par l'ordonnée de la parabole dite : *de charge permanente.*

Supposons que le train montant s'engage seul. Le moment, au point considéré, augmente peu à peu ; il subit une majoration qui passe par un maximum lorsqu'un certain essieu (le troisième, pour fixer les idées) passe au-dessus de lui, et cette majoration maxima est mesurée par la portion d'ordonnée comprise entre la parabole de charge concentrée du train montant et le polygone de correction correspondant.

Si le train descendant circulait seul, il produirait aussi, pour son compte, une majoration qui atteindrait son maximum lorsque l'un de ses essieux (le cinquième, par exemple) passerait au-dessus du point, et cette majoration maxima serait mesurée, elle aussi, par la portion d'ordonnée comprise entre la parabole de charge concentrée du train descendant et son polygone de correction. Il est donc bien évident que jamais le point considéré ne subira, par le fait des deux trains circulant à la fois, une majoration plus grande que si se croisent à la fois au-dessus de lui l'essieu n° 3 du train montant et l'essieu n° 5 du train descendant, d'où cette conclusion :

1° On construit la parabole de charge concentrée du train montant et celle du train descendant, et on les ajoute analytiquement en une seule parabole qui sera dite : *Parabole des deux charges concentrées.*

2° On y ajoute la parabole de charge permanente, ce qui donne la *parabole totale des charges.*

3° On construit le polygone de correction de chaque train et on les ajoute analytiquement, ce qui donne le *polygone total de correction* ; cela fait :

4° En chaque point, le moment maximum est donné par la portion d'ordonnée comprise entre la parabole totale des charges et le polygone total de correction.

(*d*) **Train montant semblable au train descendant.** — Si, comme il arrivera le plus souvent, le train montant possède exactement la même composition que le train descendant, il est facile de voir :

1° Que la parabole totale des charges s'obtiendra en doublant la parabole AIB (fig. III) et en y ajoutant, *une seule fois*, la parabole de charge permanente A'JB' (fig. I);

2° Que le polygone total de correction s'obtiendra en doublant le polygone A*mnin'm'*B de la fig. IV.

(*d'*) **Autre tracé.** — Plus simplement, peut-être, on pourrait :

1° Tracer (fig. III) en AV..., figurée en traits croisés, une *parabole moyenne* qui passerait à égale distance des paraboles AIB et AKB;

2° Prendre pour polygone de correction le polygone A*mni* de la fig. III, et

3° Les portions d'ordonnées comprises entre la *parabole moyenne* AV et le polygone de correction donneront la *moitié* des moments maxima en chaque point.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le théorème annoncé plus haut :

276. **Théorème dit : des moments entre-essieux.** — « Ce « ne peut être qu'à l'instant du passage d'un essieu au- « dessus d'elle qu'une section est soumise à son moment « fléchissant maximum. »

Si ce théorème est démontré tous les tracés précédents seront justifiés.

Il sera démontré si nous prouvons qu'une section donnée de la poutre supporte, lorsqu'elle est au-dessous d'un entre-essieux, un moment fléchissant intermédiaire entre les moments qu'elle supporterait si l'un des deux essieux passait au-dessus d'elle.

A cet effet, considérons un point T situé entre les essieux n° 2 et n° 3, et redessinons de nouveau, pour plus de clarté (fig. 253), d'une part (fig. I), le funiculaire du convoi,

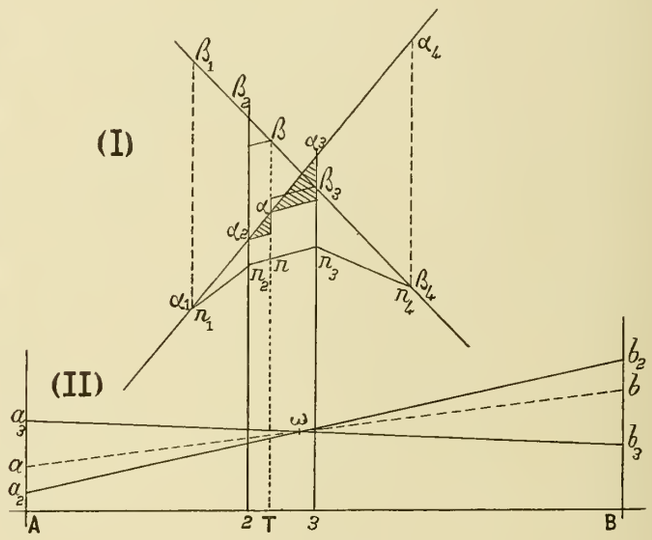


Fig. 253

d'autre part (fig. II), les trois sécantes de correction qui répondent aux essieux n° 2 et n° 3, ainsi qu'au point intermédiaire T.

On sait que, pour obtenir ces sécantes de correction, on mène (fig. I) les trois verticales $n_2\alpha_2\beta_2$, $n\alpha\beta$, $n_3\alpha_3\beta_3$, et que, portant d'une part, de A en a_2, a et a_3, les segments α_2, α et α_3 sur la verticale d'origine, puis, d'autre part, de B

en b_2, b et b_3, les segments β_2, β et β_3, sur celle d'extrémité, on joint les points α_2 et β_2, α et β, α_3 et β_3.

Si je prouve que ces trois sécantes de correction se coupent en un même point, comme le point a est compris entre a_2 et b_2, attendu que (fig. I) α est intermédiaire entre α_2 et α_3, il en résultera que la sécante de correction ab sera tout entière comprise entre les deux autres, et que la portion d'ordonnée comprise entre elle et la parabole totale sera plus petite que celle comprise entre la même parabole et une des sécantes de correction (ici a_2b_2) répondant à l'un des essieux ; dès lors, le théorème sera démontré.

Or, sur la fig. I, menons par les points α_2 et α des parallèles à la corde n_2n_3 : nous formons ainsi deux triangles semblables que nous avons hachurés, et qui donnent, en désignant par K le rapport suivant lequel le point considéré T divise l'intervalle entre les deux essieux n° 2 et n° 3,

$$\frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha} = \frac{\overline{n_2n}}{\overline{nn_3}} = K.$$

Mais sur la fig. II, $\alpha - \alpha_2$, c'est aa_2 et $\alpha_3 - \alpha$ c'est aa_3, on aura donc (fig. II) :

$$\frac{\overline{a_2a}}{\overline{aa_3}} = K.$$

On démontrera de même, en menant (fig. I) par β et par β_2 des parallèles à la corde n_2n_3, que l'on a aussi (fig. II) :

$$\frac{\overline{b_2b}}{\overline{bb_3}} = K, \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{a_2a}}{\overline{aa_3}} = \frac{\overline{b_2b}}{\overline{bb_3}}.$$

Par conséquent la sécante de correction ab passe bien par le point de rencontre des deux autres, et elle est tout entière comprise entre elles deux. C. Q. F. D.

277. Cas général. — Le convoi est partiellement engagé. (*a*) **Moments sous l'essieu de tête.** — Supposons que le convoi, arrivé à l'extrémité de la poutre, commence à s'en dégager. L'essieu n° 4 va sortir et sera comme s'il n'avait jamais existé (v. plus loin fig. 255). Par conséquent, pour l'ensemble des trois charges qui restent engagées, p_1, p_2 et p_3, la parabole de charge totale se composera de l'ancienne parabole totale P′, de laquelle nous retrancherons la parabole p_4, qui serait due à l'essieu qui vient de sortir.

On se souvient que la parabole totale P′ est la somme des paraboles p_1, p_2, p_3 et p_4, augmentée de la parabole due à la charge permanente Q. La sécante de correction était la ligne $A\beta_1$; on se souvient aussi que, d'une manière générale, la sécante de correction d'un essieu est une droite, dont nous avons appris à calculer l'ordonnée d'origine et l'ordonnée d'extrémité ; et que, d'une façon générale, l'ordonnée d'origine est égale au moment, pris par rapport à l'essieu considéré, des charges *engagées* qui, dans le convoi, sont placées à gauche de cet essieu, tandis que l'ordonnée d'extrémité est égale au moment de celles qui sont placées à droite. Nous raisonnons sur l'essieu n° 1 ; comme il est le premier à gauche, les moments de gauche sont nuls, c'est pourquoi sa sécante de correction passe par l'origine A ; quant aux moments de droite, tant que l'essieu n° 4 était engagé, ils étaient mesurés sur le *funiculaire du convoi*, que nous reproduisons ici, fig. 254, par la verticale $n_1\beta_1$;

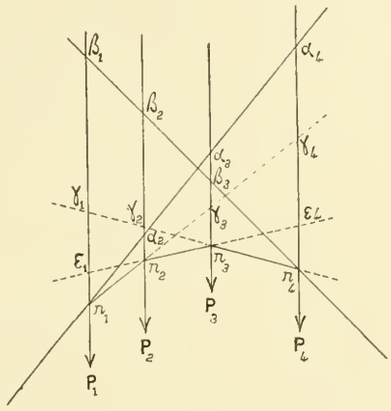


Fig. 254

mais dès que l'essieu n° 4 n'est plus engagé le convoi se trouve réduit aux trois forces p_1, p_2, p_3 ; le funiculaire de convoi correspondant a pour côté final la droite $n_1n_3\gamma_1$, et le moment de gauche, c'est-à-dire l'ordonnée d'extrémité de la nouvelle sécante de correction, est donnée par $n_1\gamma_1$.

Par conséquent, nous procéderons comme suit (fig. 255) :

1° Nous tracerons (voir à droite) la parabole $P' - p_4$, à l'échelle adoptée, qui est celle des funiculaires Collignon ; nous

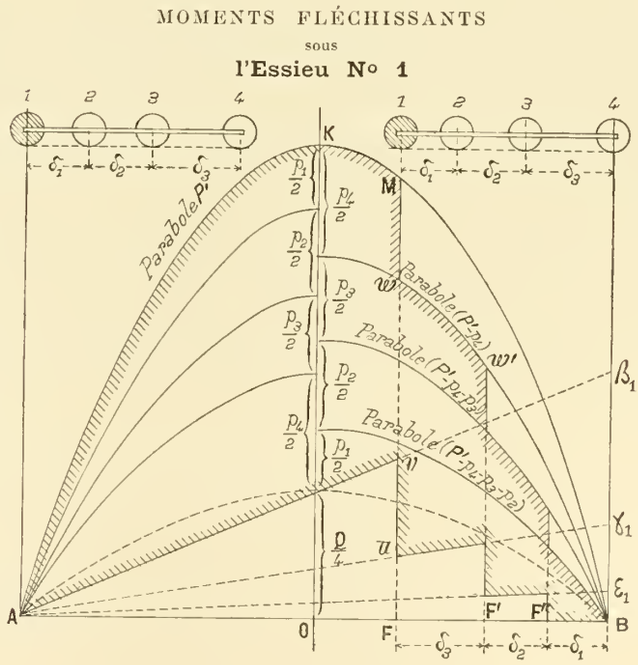


Fig. 255

en obtenons le sommet en descendant le sommet K de la parabole P′ d'une quantité égale à $1/2\, p_4$.

2° Sur le funiculaire du convoi nous prendrons la longueur $n_1\gamma_1$ et, la reportant de B en γ_1 (fig. 255) sur la verticale d'extrémité, nous joignons $A\lambda$, ce qui nous donne la nouvelle sécante de correction.

3° Nous portons, à partir de B, sur l'axe des x, des longueurs égales à δ_1, δ_2 et δ_3, c'est-à-dire aux entre-essieux *comptés en sens inverse*.

4° Par le point F ainsi obtenu, si nous menons la verticale F*uvw*M, c'est à partir de cette *verticale de transition* que les moments devront être mesurés entre la parabole $P' - p_4$ et la sécante nouvelle de correction $A\gamma_1$.

(*a'*) **Nota.** — Il est évident que, à la transition, la valeur du moment ne peut pas changer brusquement; autrement dit, on doit avoir :

$$\overline{uw} = \overline{vM}, \quad \text{ou encore} \quad \overline{uv} = \overline{wM}.$$

Cela donne soit une vérification de tracé, soit même un tracé, puisqu'il suffirait de prendre $\overline{vu} = \overline{Mw}$ sans chercher directement la nouvelle sécante de correction $A\gamma_1$: mais nous recommandons de préférence de chercher cette sécante et de tirer parti de l'égalité $\overline{vu} = \overline{Mw}$, comme vérification.

L'essieu n° 3 arrivera, à son tour, à l'extrémité : à ce moment l'essieu n° 1 sera venu en F', ayant parcouru une longueur δ_2 égale au troisième entre-essieu. Nous aurons une nouvelle verticale de transition $F'w'$.

Nous changerons de parabole ; nous prendrons la parabole $P' - p_4 - p_3$, et nous aurons comme nouvelle sécante de correction la droite $A\varepsilon_1$ obtenue en prenant $B\varepsilon_1$ égale aux moments des charges encore engagées, à gauche ; ce moment est donné (fig. 201) sur le funiculaire du convoi par la droite $n_1\varepsilon_1$.

Finalement les moments sous l'essieu n° 1 sont donnés (fig. 255) par les ordonnées comprises dans toute la partie limitée par des hachures.

(*b*) **Moments sous l'essieu de queue.** — On traitera, de la même manière, la question pour l'essieu de queue n° 4 (fig. 256), avec cette différence que, pour lui, ce sera lorsque le train sortira par la gauche que l'on devra faire des changements de parabole et des changements de sécantes de correction.

On remarquera que pour la sortie par la gauche, étant donné que les essieux se dégageront dans l'ordre 1, 2, 3 et 4 et non plus dans l'ordre 4, 3, 2, 1, les paraboles successives sont P', $P' - p_1$, $P' - p_1 - p_2$, etc.

Quant aux sécantes de correction elles passent toutes par l'extrémité B, et leurs ordonnées d'origine sont prises en $A\alpha_4$, $A\gamma_4$, $A\varepsilon_4$, égales aux moments partiels de gauche mesurés sur le funiculaire du convoi (fig. 254), en $n_4\alpha_4$, $n_4\gamma_4$ et $n_4\varepsilon_4$.

(*c*) **Moments sous les essieux intermédiaires.** — Il est à remarquer que pour les essieux extrêmes, de tête ou de queue, les changements de parabole et de sécante de correction ne sont à faire que du côté de la poutre pour lequel l'essieu sera le dernier à sortir.

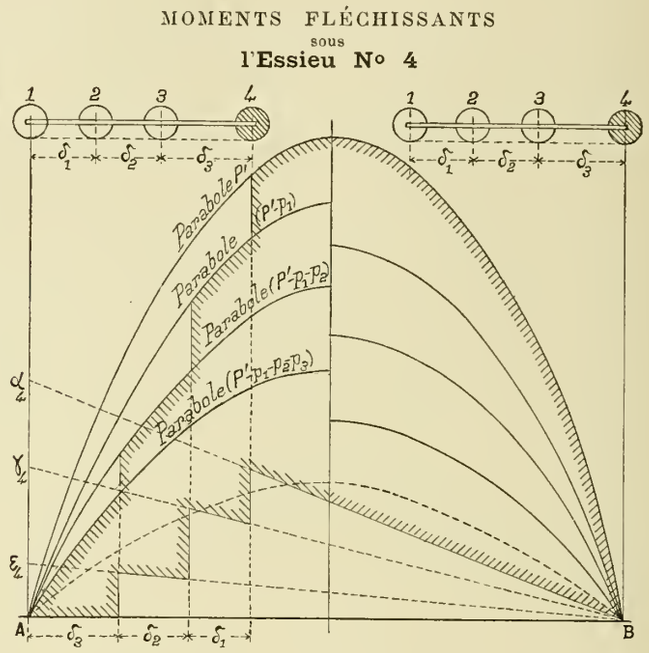


Fig. 256

Pour les essieux intermédiaires il y aura changement de courbe aussi bien à gauche qu'à droite, ainsi que nous allons le montrer.

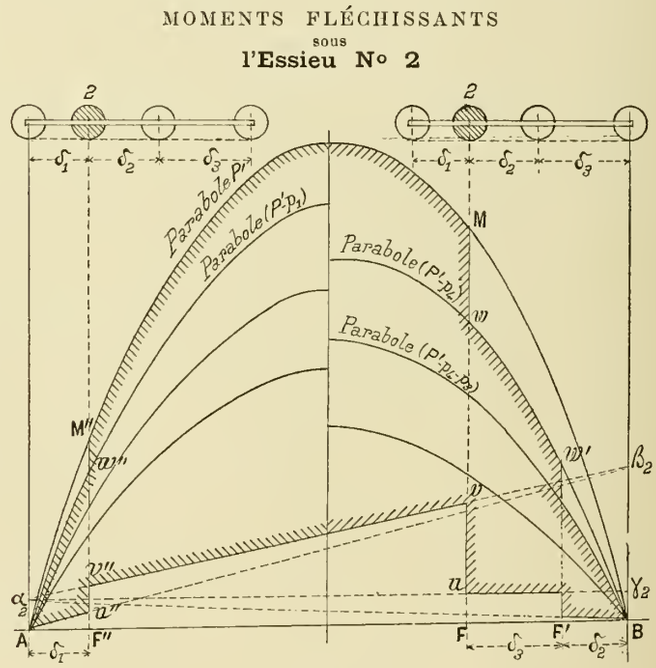


Fig. 257

Essieu n° 2 (fig. 257). — 1° A la distance $\delta_2 + \delta_3$ de l'extrémité nous traçons, en FM, la verticale de transition; et de la parabole totale P′ nous passons à la parabole $P' - p_4$, puisque c'est à cet instant que l'essieu n° 4 se dégage.

2° La sécante de transition était $\alpha_2\beta_2$, et l'ordonnée à l'origine $A\alpha_2$ était égale, dans le convoi, au moment des forces situées à *gauche* de l'essieu n° 2.

Or, puisque les essieux de gauche restent engagés, ce moment partiel ne change pas et, par conséquent, la nouvelle sécante de correction passera toujours par le point α_2.

Il n'en est pas de même de son ordonnée d'extrémité.

On doit prendre $B\gamma_2$ égal aux moments, dans le convoi, des forces *de droite* qui sont engagées ; et, puisque la force p_4 est sortie, on aura ce moment sur le funiculaire du convoi (fig. 254), en $n_2\gamma_2$ et non plus en $n_2\beta_2$; la nouvelle

MOMENTS FLÉCHISSANTS
sous
l'Essieu N° 3

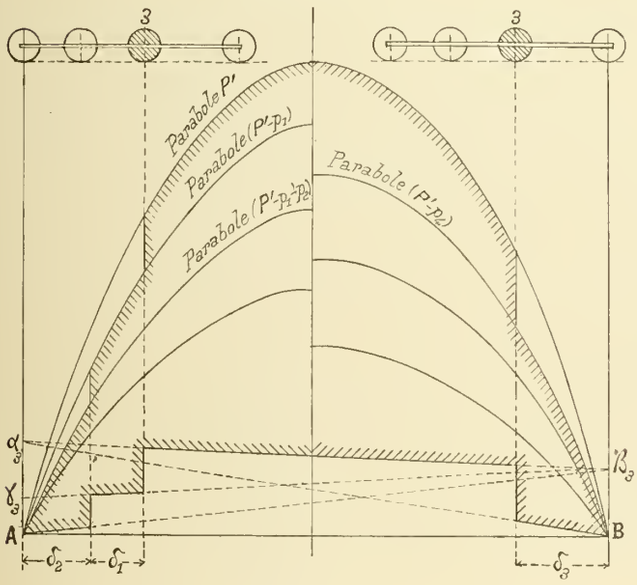


Fig. 258

sécante de correction est donc $\alpha_2\gamma_2$; elle doit nous servir, ainsi que la parabole $P' - p_4$ jusqu'à la verticale de transition F′ située à la distance δ_3 de F, car c'est alors que l'essieu n° 3 va sortir à son tour.

Lorsque le train sortira par la gauche, en raisonnant de même, on verra qu'il faut prendre la parabole $P' - p_1$ et la sécante de correction $\beta_2 A$.

Essieu n° 3 (fig. 258). — On fera le même raisonnement. Les ordonnées d'origine des sécantes de correction sont $A\alpha_3$ et $A\gamma_3$, prises sur le funiculaire du convoi, au droit de l'essieu n° 3, en $n_3\alpha_3$ et $n_3\gamma_3$.

(*d*) **Diagramme définitif.** — Nous obtenons ainsi, séparément, les quatre diagrammes des moments au-dessous de chaque essieu. Pour la clarté de notre explication, nous avons fait quatre figures distinctes, mais il est bien évident que dans l'application on les ferait toutes sur la même épure.

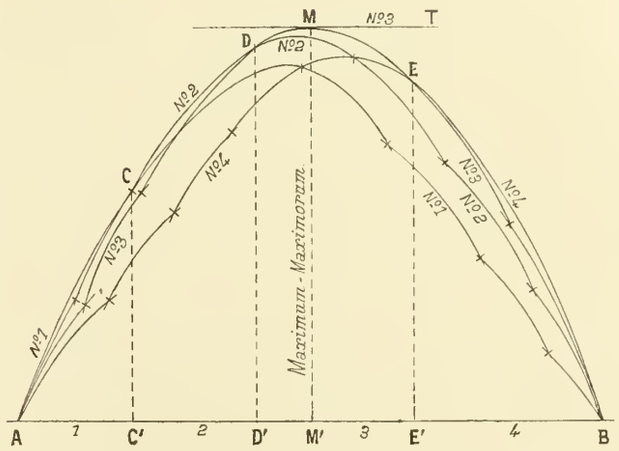


Fig. 259

(*d′*) **Diagramme de superposition.** — Il faut maintenant superposer ces quatre diagrammes en ramenant leurs ordonnées à un même axe des abscisses, afin que leurs hauteurs puissent être facilement comparées.

C'est une question de patience ; l'épure ne présente aucune difficulté : chaque diagramme, ainsi rapporté à une base horizontale commune, se composera d'une série d'arcs de paraboles, chacune d'elles ayant son patron connu et passant par deux points connus.

Nous obtenons ainsi la fig. 259. Son contour extérieur est assez mouvementé ; c'est lui qui nous donnera en ACDEB les moments fléchissants à adopter pour chaque point de la poutre. Une fois ces moments connus, la formule d'équarrissage

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

permettra de calculer les dimensions de chaque section, et, si la poutre devait être à section constante, ce serait le moment *maximum-maximorum* MM′ qui servirait pour son calcul.

2e SECTION

Efforts tranchants dus a une charge mobile

§ 5. — Préliminaires

278. **Rappel de notions antérieures.** — Nous démontrerons plus loin que, exactement comme pour les moments, ce ne peut être qu'au-dessous d'un essieu que se développe une valeur extrême (maximum ou minimum) d'effort tranchant ; par conséquent nous tracerons, pour chaque essieu, la représentative des efforts tranchants qui se développent au-dessous de lui, sur son passage, et nous prendrons celles de ces représentatives dont les ordonnées l'emporteront en valeur absolue sur les autres.

Nous prenons ici le mot *minimum* avec son sens algébrique, étant entendu qu'une valeur négative est toujours plus petite qu'une valeur positive. Ainsi -10 est plus petit, algébriquement, que $+4$. Mais, si l'on ne considère que les valeurs absolues, un minimum algébrique, tel que -10, peut être numériquement plus grand qu'un maximum tel que $+4$. En définitive, ce seront toujours les *maxima numériques* qui nous intéresseront.

Rappelons que l'effort tranchant n'est autre chose que la force qui résulte du transport sur l'une des faces du biplateau d'une section (v. 104 et 113) de toutes les forces agissant sur la pièce et qui sont situées du même côté de cette face. Parmi ces forces, il faut compter aussi bien les actions que les réactions.

Un effort tranchant est positif lorsqu'il tend à soulever le plateau de gauche par rapport à celui de droite (v. n° 172); il est négatif dans le cas contraire.

L'effort tranchant est donné, en grandeur et en signe, par la pente de la représentative des moments fléchissants (v. n° 173).

Lorsqu'une poutre est soumise à une charge continue, comme serait par exemple une couche de sable, d'épaisseur uniforme ou non, la représentative des moments est une courbe continue ; sa pente, c'est-à-dire l'effort tranchant, varie aussi d'une manière continue et la représentative des efforts tranchants est une courbe continue.

Lorsque la charge est uniformément répartie, la représentative des moments est une parabole et celle des efforts tranchants est une droite (v. n° 51, fig. 25). Mais lorsque la charge est discontinue, c'est-à-dire formée de poids isolés, la représentative des efforts tranchants est discontinue : on dit alors qu'elle est *en escalier*.

En particulier, si l'on a un convoi mobile, c'est au droit de chaque essieu que se place un des degrés de cette sorte d'escalier. Entrons dans quelques détails.

279. **Variations brusques des efforts tranchants sous le passage de charges mobiles.** — Soit C (fig. 260) la section située au droit de l'essieu n° 3 ; figurons au point C deux bi-plateaux mitoyens et supposons la charge p_3 de l'essieu appliquée sur le plateau qui est commun aux deux bi-plateaux ; en un mot, considérons deux sections infiniment voisines, placées l'une un peu à gauche et l'autre un peu à droite de l'essieu n° 3.

L'effort tranchant ne sera pas le même dans les deux sections. Désignons par t_3 l'effort tranchant de la section *de gauche*, et par t'_3 l'effort tranchant de la section *de droite*. L'indice 3 répond au numéro d'ordre de l'essieu.

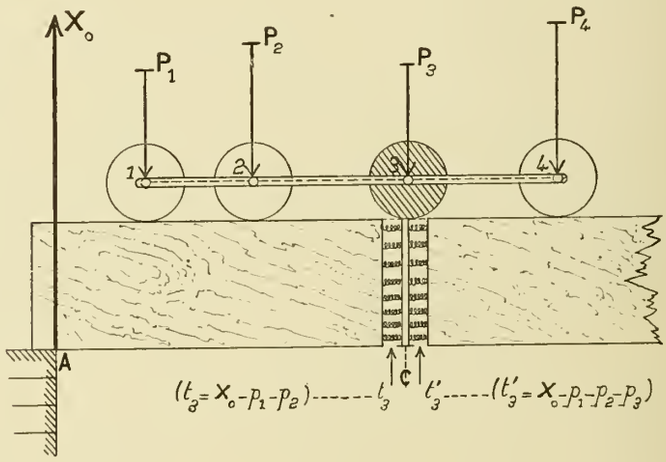


Fig. 260

Sur la section (ou bi-plateau) de gauche l'effort tranchant t_3 sera égal à la somme algébrique des forces situées à gauche et comprenant : 1° la réaction X_0 de l'appui (elle est positive) ; 2° les charges p_1 et p_2 des deux premiers essieux (elles sont négatives) ; on aura donc :

$$t_3 = X_0 - (p_1 + p_2).$$

Sur la section (ou bi-plateau) de gauche la charge p_3 est brusquement introduite ; on aura donc :

$$t'_3 = X_0 - (p_1 + p_2 + p_3),$$

ce qui veut dire qu'il se produit sous l'essieu un saut brusque dans la représentative des efforts tranchants. Ainsi, immédiatement avant le passage de l'essieu, l'effort tranchant avait une certaine valeur t_3; immédiatement après ce passage, il prend une autre valeur t'_3, qui diffère brusquement de la première et que l'on obtient en diminuant cette première (puisque les charges p_1, p_2, p_3 sont négatives)... de toute la charge p_3 de l'essieu qui a passé.

Il est donc à remarquer que les convois mobiles soumettent toutes les sections à des intermittences et, peut-être, à des alternances d'efforts tranchants (v. n° 128); de sorte que, si les lois de Wœhler sont exactes, elles devront être prises ici en considération. C'est pourquoi nous adopterons la marche suivante :

1° Nous tracerons pour chaque essieu deux représentatives d'efforts tranchants, savoir : la représentative T et la représentative T′; la première, T, donnera les efforts tranchants pour la section placée immédiatement *à gauche* de l'essieu et la seconde T′ les fera connaître pour la section placée immédiatement *à droite* : d'ailleurs la représentative T′ s'obtiendra en descendant la représentative T de toute la charge de l'essieu considéré.

Un indice indiquera, en outre, le numéro de l'essieu considéré ; nous aurons donc les représentatives T_1 et T'_1 pour l'essieu n° 1, T_4 et T'_4 pour l'essieu n° 4, etc.

2° Quand nous aurons tracé, pour chaque essieu, la représentative T de ses *efforts tranchants de gauche* et la représentative T′ de ses *efforts tranchants de droite*, nous ne conserverons que celles de ces lignes qui répondent à des maxima en valeur absolue.

Étudions d'abord le cas simple suivant :

§ 6. — La charge mobile est un poids unique

280. Efforts tranchants développés sous le passage de la charge. — Soient P ce poids, C le point où il se trouve, et x l'abscisse du point C.

Calculons la réaction X_0 sur l'appui d'origine ; à cet effet portons (fig. 261-I) de A en A′ une longueur égale à P.

Joignons A′B ; je dis que l'ordonnée $y = CC'$, qui est comprise entre cette droite et l'axe des x, donne précisément la réaction X_0.

En effet, la similitude nous donne

$$\frac{y}{P} = \frac{l-x}{l}$$

y est donc bien la composante de P sur l'appui A, c'est-à-dire la réaction, X_0, de cet appui : elle est positive.

Cela posé, l'effort tranchant, t, immédiatement à gauche de la section C, est précisément égal à X_0, d'où nous concluons que la ligne BA′ est la représentative, T, des *efforts tranchants de gauche*, au droit de la charge mobile.

Descendons cette ligne en AB′ de toute la charge P et nous aurons en AB′ la représentative T′ des *efforts tranchants de droite*.

Si l'on avait une charge Q, uniformément répartie, on a vu que la représentative des efforts tranchants serait une oblique ayant pour ordonnée d'origine 1/2 Q et pour ordonnée d'extrémité — 1/2 Q (fig. II).

Si la charge Q existe simultanément avec la charge mobile P, les deux représentatives s'ajouteront analytiquement et nous aurons pour la représentative T des efforts tranchants de droite l'oblique DE ; son ordonnée d'origine (fig. III) est égale à P + 1/2 Q ; son ordonnée d'extrémité est égale à — 1/2 Q. Quant à la représentative T′ des efforts tranchants de gauche, c'est la droite D′E′ ; son or-

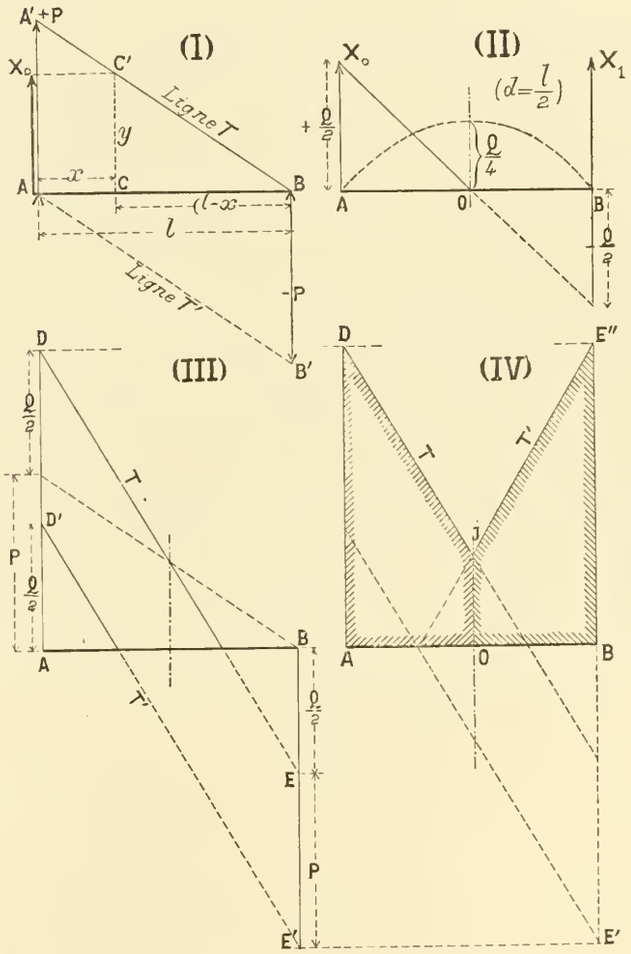


Fig. 261

donnée d'origine est $+1/2\,Q$; son ordonnée d'extrémité est $-(1/2\,Q+P)$. Pour le calcul des dimensions à donner, en vue de résister aux efforts tranchants, il importe peu de savoir s'ils sont positifs ou négatifs ; c'est leur valeur absolue qu'il faut connaître. Dès lors (fig. IV) replions la figure autour de l'axe des abscisses AB, nous obtiendrons le polygone hachuré qui nous fait connaître les valeurs absolues des efforts tranchants maxima susceptibles d'être développés en chaque point.

Nota. — La symétrie nous permettrait de ne tracer que la moitié de gauche de la fig. IV.

§ 7. — La charge mobile est un convoi

281. Le convoi est toujours complètement engagé. — (*a*) **Oblique de charge concentrée.** — Prenons le même convoi que tout à l'heure, composé des quatre essieux n_1, n_2, n_3, n_4, transmettant des charges p_1, p_2, p_3, p_4.

Construisons par la méthode Collignon, ou par toute autre, le funiculaire du convoi.

On voit ce funiculaire en I (fig. 262), en haut de l'épure; c'est la reproduction de celui déjà trouvé plus haut (fig. 252). Nous ne l'avons repris que pour avoir exactement la position gG de la verticale du centre de gravité du convoi, par rapport aux essieux.

Considérons le convoi (fig. 252-II) dans une position quelconque n_1, n_2, n_3, n_4 (dessinée en pointillé); soit g son centre de gravité dont la position est empruntée à la fig. (I). Proposons-nous de chercher l'effort tranchant de gauche t_2 ou de droite t'_2, au-dessous d'un essieu quelconque, le deuxième, par exemple. Faisons, pour un instant, abstraction de la charge permanente Q, uniformément répartie.

L'effort tranchant de gauche t_2 sera égal à la réaction X_0 que développe l'appui A sous l'influence du poids total du convoi, diminuée des charges comprises entre A et l'essieu n° 2, c'est-à-dire diminué de p_2.

Mais la réaction X_0 sera la même que si toute la charge du convoi était concentrée en son centre de gravité g, et nous venons d'apprendre à la construire. On a vu (v. n° 280) qu'il fallait porter bout à bout sur la verticale d'origine les charges p_1, p_2, p_3 et p_4, ce qui donnait de A en K la charge totale P (marquer soigneusement ces points p_1, p_2, p_3, p_4 ; ils joueront un rôle important tout à l'heure) et que, en joignant BK, ce qui donne la ligne que nous nommerons *l'oblique de charge concentrée*, l'ordonnée gG de cette oblique donnait cette réaction X_0. On aura donc, pour l'effort tranchant de gauche sous l'essieu n_2 :

$$t_2 = \overline{g\mathrm{G}} - p_1. \tag{1}$$

Et pour l'effort tranchant de droite

$$t'_2 = \overline{g\mathrm{G}} - p_1 - p_2. \tag{2}$$

Considérons la portion d'ordonnée de l'essieu n_2 comprise entre l'axe des x et *l'oblique de charge concentrée* BK. Cette ordonnée est $\overline{n_2\mathrm{N}_2}$ et l'on a :

$$\overline{g\mathrm{G}} = \overline{n_2\mathrm{N}_2} - \overline{\mathrm{FN}_2}.$$

Et cette relation aura toujours lieu, quelle que soit la position du convoi. Or, $\overline{\mathrm{FN}_2}$, que nous appellerons le *paramètre de correction* de l'essieu n° 2, est une quantité constante ; chaque essieu aura son paramètre de correction, que nous apprendrons à construire tout à l'heure.

Désignons ces *paramètres de correction* par les lettres h_1, h_2, h_3, h_4.

On aura, en substituant dans les équations (1) et (2),

$$t_2 = \overline{n_2\mathrm{N}_2} - h_2 - p_1 \tag{1'}$$

$$t'_2 = \overline{n_2\mathrm{N}_2} - h_2 - p_1 - p_2. \tag{2'}$$

ce qui peut se traduire ainsi :

La représentative des efforts tranchants *à maxima*, développés sous un essieu donné, s'obtiendra en abaissant d'une hauteur constante la représentative qui répondrait à la charge totale du convoi supposée concentrée en son centre de gravité. Cette représentative est la ligne que nous avons appelée l'oblique de charge concentrée. Cette hauteur constante est égale au *paramètre de correction* de l'essieu, augmenté de toute les charges du convoi situé à sa gauche ; on n'y comprend pas la sienne s'il s'agit de l'effort tranchant de gauche, t ; on y comprend, au contraire, la sienne s'il s'agit de l'effort tranchant de droite, t'.

Si la charge permanente Q vient s'ajouter, alors c'est l'oblique de charge totale VW, obtenue comme il est dit plus haut, qu'il faut abaisser de la hauteur constante spécifiée ci-dessus.

(*b*) **Horizontales de correction.** — Or, il est évident qu'au lieu d'abaisser les obliques nous pouvons les laisser en place, mais élever alors l'axe des abscisses de la même quantité. C'est ce qui a été fait sur l'épure (fig. II).

Ces nouveaux axes des abscisses, ainsi relevés, sont ce que nous nommerons les *horizontales de correction* des essieux. Chaque essieu en aura deux.

Ainsi l'essieu n° 2 aura l'horizontale de correction $\mathrm{H}_2\mathrm{B}_2$, pour les efforts tranchants de gauche, et $\mathrm{H}'_2\mathrm{B}'_2$ (ce second est toujours en trait mixte) pour les efforts tranchants de droite.

Il nous reste à montrer comment on obtient les points H_1 et H'_1, H_2 et H'_2, etc..... Voici la construction :

1° Déplaçons le convoi sur la gauche jusqu'à ce que son centre de gravité vienne se confondre avec l'origine A;

2° Par cette origine, menons une parallèle II_1m_4 à l'oblique de charge concentrée et prenons ses intersections m_1, m_2, m_3, m_4 avec les verticales des essieux dans leur nouvelle position. Il est évident que pour l'essieu n° 2, on aura : $2m_2 = N_2F$, et comme il en sera de même pour tous les essieux, il en résulte que les ordonnées $1m_1$, $2m_2$, $3m_3$... (dessinées en trait fort sur l'épure) de l'oblique m_1, m_4 donnent les *paramètres de correction* h_1, h_2, h_3 et h_4.

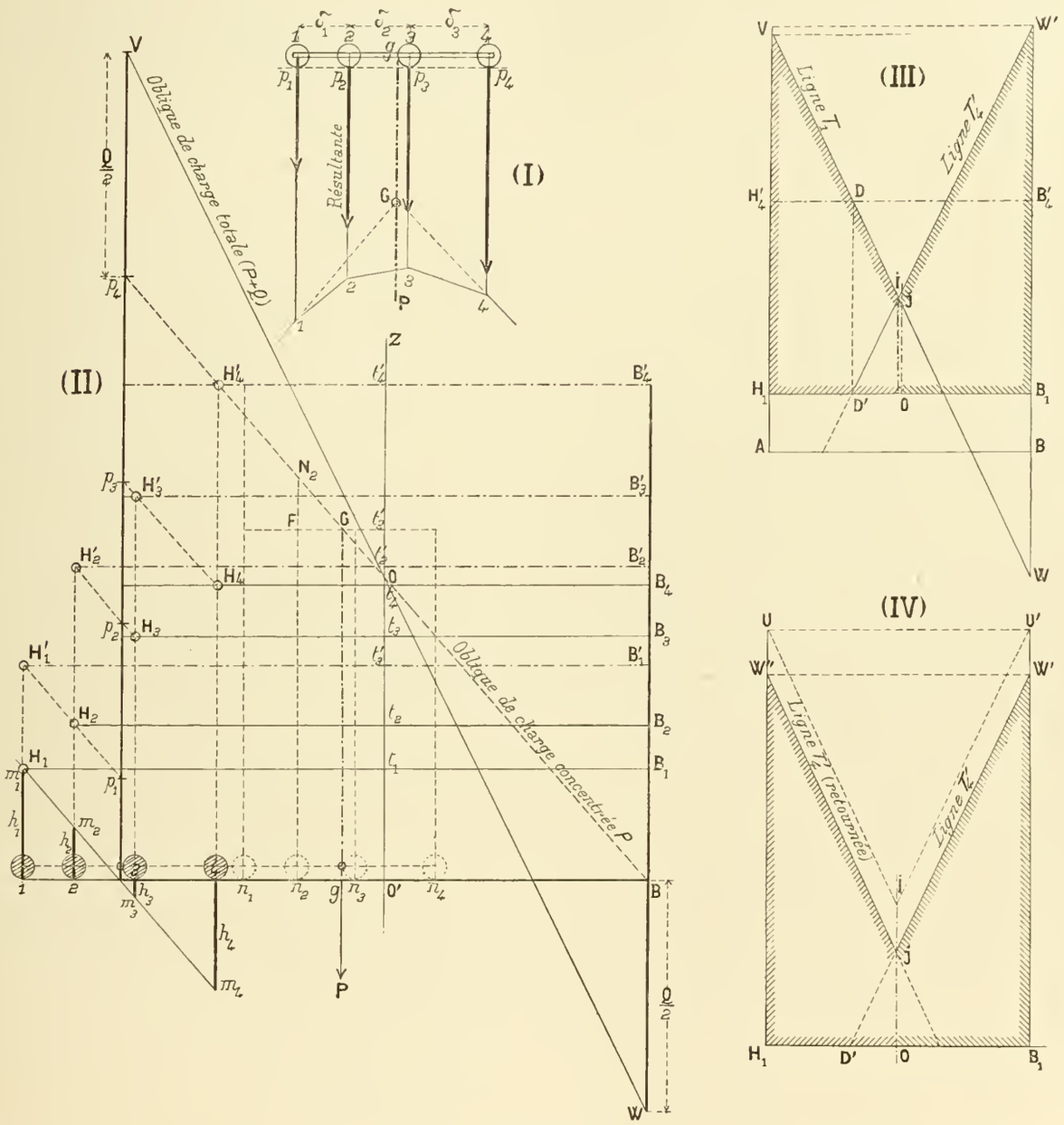


Fig. 262

3° Par les points p_1, p_2, p_3, p_4 obtenus tout à l'heure en portant les charges du convoi sur la verticale d'origine, menons des parallèles à l'oblique de charge concentrée; elles recouperont les verticales des essieux voulus aux points II_1 et II'_1, II_2 et II'_2, etc... par lesquels nous ferons passer les horizontales de correction.

(*c*) **Nota.** — L'analogie qui existe entre cette méthode et celle qui a été donnée pour les moments fléchissants est frap-

pante. Pour les moments nous avions une parabole de charge totale dessinée une fois pour toutes, et, pour chaque essieu, nous tracions une sécante de correction. C'était entre cette sécante et la parabole que nous comptions les ordonnées représentatives des moments maxima.

Ici, au lieu d'une parabole, nous avons une oblique de charge totale; au lieu de sécantes, nous avons des horizontales de correction, et c'est entre l'oblique et les horizontales que nous comptons les ordonnées représentatives des efforts tranchants.

(*d*) **Efforts maxima.** — Il est facile de voir que, dans le cas actuel, c'est en prenant l'horizontale de correction la plus basse H_1B_1 que l'on obtiendra les plus grands efforts tranchants de gauche ; ils seront positifs et seront supportés au-dessous de l'essieu n° 1.

En prenant l'horizontale la plus haute $H'_4B'_4$ on aura les plus grands efforts tranchants de droite ; ils seront négatifs et seront supportés au-dessous de l'essieu n° 4.

(*e*) **Diagrammes définitifs.** — La fig. III (que nous avons dessinée à une échelle moitié moindre pour économiser la place) reproduit les diagrammes extrêmes, mais en les rapportant à une même base commune, H_1B_1 par exemple; et comme il importe peu, pour la résistance, de connaître le signe de l'effort tranchant, nous avons retourné le diagramme ayant pour base $H'_4B'_4$ de manière à lui donner la même base H_1B_1. Pour faire ce retournement on a abaissé D en D′ et on a pris $B_1W' = B'_4W$.

Le contour marqué par un liséré donne la représentative des valeurs absolues des efforts tranchants maxima (qu'ils soient de gauche ou de droite, qu'ils soient positifs ou négatifs, peu importe) pour un train composé comme celui que nous avons adopté, mais qui circulerait dans un seul sens. On remarquera que le point W′ est plus haut que le point V. (fig. 111).

Si le même train circulait dans l'autre sens, alors tout serait renversé ; l'oblique D′W′ se placerait à gauche et l'oblique VW à droite, et comme la première, qui est la représentative T'_4 des efforts tranchants de droite de l'essieu n° 4, est plus haute que l'oblique T_1 qui est la représentative de l'effort tranchant de gauche de l'essieu n° 1, nous en concluons que, dans l'exemple choisi, ce sera toujours au passage de l'essieu n° 4 que se développera l'effort tranchant dangereux.

Le diagramme définitif est dessiné sur la fig. IV ; il a été obtenu en repliant la fig. III autour la verticale milieu OI et en prenant, pour chaque moitié, la plus haute des deux représentatives.

Nous avons tracé, en outre, sur la même figure, en UIU′, le diagramme des efforts tranchants maxima que donnerait la charge totale P du convoi si elle était concentrée en un point; on voit que la répartition de cette charge en convoi a pour effet de diminuer les efforts tranchants.

Si deux trains, de la même composition que ci-dessus, se croisaient sur la poutre, le diagramme de croisement s'obtiendrait : 1° en repliant la fig. III autour de la verticale milieu, ce qui donnerait pour chaque moitié deux diagrammes placés l'un dans l'autre ; 2° en ajoutant analytiquement ces deux diagrammes.

282. — **Le Convoi est partiellement engagé.** — (*a*) **Obliques de charges partielles.** — Remarquons tout d'abord que toutes ces représentatives d'efforts tranchants sont des lignes droites et que, par conséquent, pour les tracer il suffirait de connaître la direction et un point de chacune d'elles.

Or, si nous nous reportons à la fig. 261, nous voyons que la direction s'obtient : 1° en prenant un point W, situé sur la verticale d'extrémité à une distance *négative* égale à la moitié (1/2 Q) de la charge permanente, uniformément répartie ; 2° en portant sur la verticale d'origine une longueur *positive* AV égale au total de toutes les charges engagées, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + Q$ (convoi et charge permanente) ; et 3° en joignant VW. Nous obtenions ainsi l'*oblique de charge totale.* (Suivre maintenant sur la fig. 263, page 217.)

Remarquons qu'elle intercepte sur la verticale milieu OO′ une longueur égale à la moitié $1/2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$ du poids du convoi. La quantité Q n'apparaît plus sur cette verticale milieu.

Cela posé : supposons que le train sorte par la droite; alors l'essieu n° 4 se dégage le premier et, avec lui, disparaît la charge p_4 ; par conséquent, l'oblique de charge totale passera toujours par le point W ; mais elle interceptera sur la verticale milieu la longueur OO′, diminuée de $1/2p_4$; lorsque l'essieu n° 3 sortira, il faudra encore diminuer le segment intercepté sur la verticale milieu de la quantité p_3 et ainsi de suite.

Si le train sort par la gauche il faut faire sur la verticale milieu le dégagement des poids dans l'ordre inverse, c'est-à-dire dans l'ordre $1/2p_1$, $1/2p_2$, etc...

Le tracé qui donnera les directions des représentatives d'efforts tranchants, au fur et à mesure que les essieux sortiront, est fait sur la fig. 263-I. On a pris $B'W = 1/2Q$. Sur la verticale milieu Oz on a porté, à droite, les segments $1/2p_1$, $1/2p_2$, etc., et, à gauche, dans l'ordre inverse, les segments $1/2p_4$, $1/2p_3$..., et l'on a obtenu les directions successives des *obliques de charges partielles.*

(*b*) **Diagramme définitif.** — Pour terminer l'épure (fig. 263-II), nous avons commencé par redessiner, en les rapportant à un même axe des abscisses AB, toutes les représentatives de la figure précédente. Pour cela il a suffi, sur cette figure 262, de prendre avec une bande de papier, sur la verticale milieu, les longueurs Ot_1, t_2, t_3, etc..., puis, en *retournant* cette bande de papier, de les reporter (fig. 263-II)

en Ot_1, t_2, t_3..., et, enfin, par ces points, de mener des parallèles à l'oblique de charge totale P'.

Nota. — Les représentatives d'efforts tranchants de gauche sont en trait plein et indiquées par des lettres sans accent. Celles des efforts tranchants de droite sont en trait mixte et indiquées par des lettres avec accents.

Il faut maintenant modifier ces obliques pour tenir compte de la sortie des essieux. Raisonnons pour l'essieu n° 1.

Tout d'abord la sortie vers la gauche ne modifie pas ses représentatives : elles restent donc les lignes $g_1t_1c_1$ et $g'_1t'_1c'_1$.

Pour tenir compte de la sortie par la droite, traçons en S une ligne ayant la longueur du train et portons sur elle, en δ_3, δ_2 et δ_1, les trois longueurs d'entre-essieux dans l'ordre où elles se dégagent ; et par les points ainsi obtenus menons des verticales.

La première rencontre en c_1 et c'_1 les obliques de l'essieu n° 1. A partir de ces points les obliques de charge totale doivent être modifiées et remplacées par l'oblique $P' - p_4$; ce qui donne les lignes c_1d_1 et $c'_1d'_1$ parallèles à l'oblique $P' - p_4$. Aux points d_1 et d'_1 on change encore de direction et on mène d_1e_1 et $d_1'c'_1$ parallèles à l'oblique $P' - p_4 - p_3$; puis enfin les lignes e_1f_1 et $e'_1f'_1$ parallèles à l'oblique $P' - p_4 - p_3 - p_2$.

On voit que la sortie du train a pour effet de substituer à l'oblique primitive une ligne brisée qui se rapproche un peu de l'axe des x ; par conséquent, pour cet essieu, la sortie du train améliore les efforts tranchants.

Pour l'essieu n° 2 la brisure de l'oblique primitive ne commence, à droite, qu'en c_2 et c'_2, et elle produit la ligne brisée $c_2d_2e_2$, laquelle n'est d'ailleurs que la répétition de la première brisure $c_1d_1e_1$, et pourrait par conséquent se tracer avec un patron fait à l'avance.

Le même essieu n° 2 donne à gauche deux brisures g_2h_2 et $g'_2h'_2$ qui sont parallèles à l'oblique $P' - p_1$.

On opérera de même pour les autres essieux.

(*c*) Remarque. — Ce tracé, tout en améliorant le passage au dessous de certains essieux, ne nous entraîne pas, dans l'exemple actuel, à rien changer aux efforts tranchants qui étaient dangereux. C'est toujours l'effort tranchant de droite de l'essieu n° 4 avec sa représentative $t'_4c'_4$, *non brisée*, qui imposera les dimensions de la poutre.

Il n'y aurait eu intérêt à chercher la brisure des obliques que si, en exécutant la première épure dans l'hypothèse du train toujours engagé, on avait constaté que l'oblique de l'un des essieux intermédiaires ($t'_3c'_3$ par exemple) se trouvait en dehors de l'oblique de l'un des essieux extrêmes (par exemple de l'oblique $t'_4c'_4$ de l'essieu de queue).

283. Règlement officiel francais relatif aux épreuves à faire subir aux Ponts. — (Voir une note à la fin du ch. VIII.)

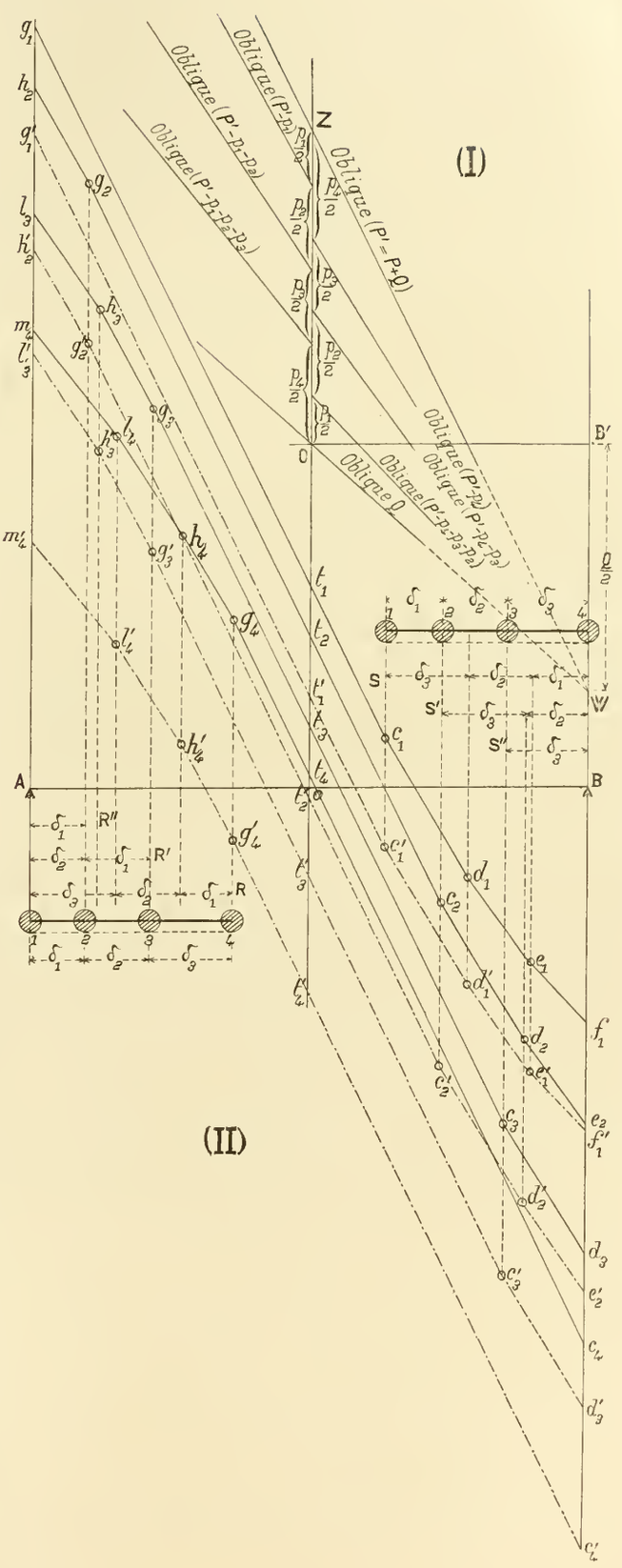


Fig. 263

CHAPITRE VII

POUTRE CONTINUE. — CHARGES PERMANENTES

§ 1. — Préliminaires

284. **Définitions. — Données de position d'une poutre continue.** — On dit qu'une poutre est *continue* lorsqu'elle est maintenue en différents points de sa longueur par des appuis : A_0, A_1, A_2 (fig. 264).

Lorsque la poutre pèse sur un appui, c'est-à-dire lorsqu'elle tend à le comprimer, on dit que l'appui forme *support*; lorsque la poutre tend à être soulevée au-dessus d'un appui, ce qui peut arriver, dans une poutre continue, lorsqu'une lourde charge vient à passer sur une travée qui n'est pas contiguë à cet appui, on dit que ce dernier est un *ancrage*, parce qu'il faut, en effet, ancrer la poutre sur l'appui pour l'empêcher de s'en détacher.

Le premier appui ainsi que le dernier se nomment des *culées* ; les autres sont des *piles*.

Les points d'appui seront numérotés à partir de la gauche : A_0, A_1, A_2.....A_n. Ainsi, A_0 (fig. 265) sera la culée d'origine et A_n sera la culée d'extrémité.

On nomme *travées* les espaces qui séparent deux points

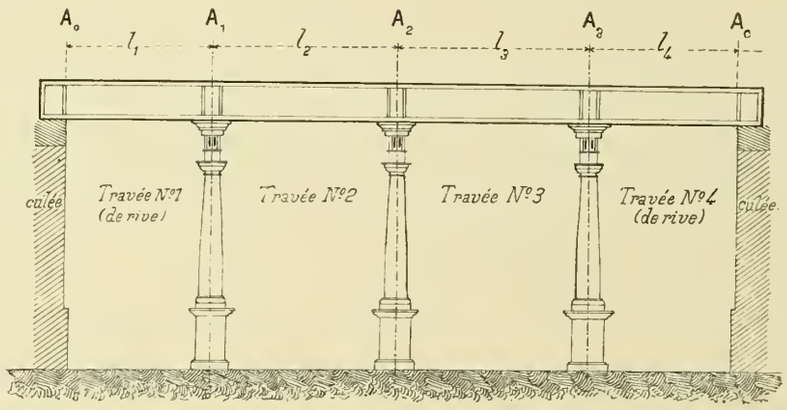


Fig. 264

d'appui consécutifs. La première et la dernière travées se nomment *travées de rive* ; les autres sont des *travées intermédiaires*.

Les travées recevront aussi des numéros d'ordre depuis 1 jusqu'à n. Une travée d'un certain ordre, la 4me par exemple, sera donc celle qui précédera immédiatement le point d'appui de même ordre, A_4.

Les longueurs des travées seront indiquées par la lettre l avec un indice : ainsi, la longueur de la 4me travée sera l_4.

On nomme *lignes d'appui* les droites telles que A_0A_1 — A_1A_2 — A_2A_3, etc. (fig. 265), qui joignent deux points d'appui consécutifs. Si tous les points d'appui sont sur une même ligne droite, généralement horizontale, on dit alors que la poutre est *de niveau* ; nous admettons pour plus de généralité qu'il n'en est pas ainsi.

On nomme *pente de dénivellation* d'un appui, de l'appui A_2 par exemple (fig. 265), l'angle γ_2, positif ou négatif, dont il faudrait faire tourner la ligne d'appui A_1A_2 située à sa gauche, pour la faire coïncider avec la ligne d'appui A_2A_3 située à sa droite.

Cet angle est toujours très petit, c'est pourquoi nous le

confondons avec sa tangente trigonométrique; le mot pente sera donc, pour nous, synonyme de tangente trigonométrique pour tous les très petits angles du même genre.

Sur une culée, A_0 par exemple, si la poutre est encastrée

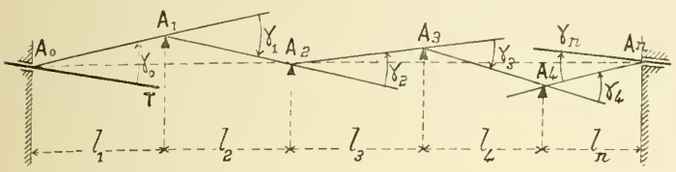


Fig. 265

et si l'on imagine que l'on ait logé une tige rectiligne A_0T dans la boîte d'encastrement, la pente de dénivellation γ_0 sera la pente à imposer à cette tige pour la faire coïncider avec la ligne d'appui A_0A_1 (sur la figure elle est positive.)

Nous avions déjà trouvé cette pente en étudiant les poutres encastrées (n° 198) et nous l'avions appelée la pente d'encastrement. Pour saisir l'analogie entre les piles et les culées, il faut assimiler un encastrement à une travée de longueur infiniment petite qui précéderait ou qui suivrait une travée de rive; dans ces conditions la tige A_0T, que nous supposons sortir de la boîte d'encastrement, est bien l'analogue de la ligne d'appui de cette travée infiniment petite.

Pour la culée d'extrémité A_n, si la poutre y était encastrée, la pente de dénivellation serait la pente γ_n à imposer à la ligne d'appui située à sa gauche pour la faire entrer dans la boîte d'encastrement. Sur la fig. 265 on a γ_0 positif, γ_1 négatif, γ_2 positif, γ_3 négatif... et γ_n négatif. Si la poutre est libre sur une culée, alors la pente de dénivellation n'existe pas; il ne faut pas dire qu'elle est nulle mais, plutôt, qu'il n'y a pas lieu d'en parler.

Lorsque l'on connaît les longueurs l_1, l_2... des travées et les hauteurs h_1, h_2... des points d'appui les uns par rapport aux autres, on peut, soit calculer les pentes de dénivellation γ_0, γ_1, γ_2..., soit les construire graphiquement. Dès lors on possédera toutes les *données de position* de la poutre.

255. **Données élastiques de la poutre.** — (*a*) **Trisectrices eïfiées des travées.** — Nous admettrons que, dans une épure préalable (fig. 266-I), nous aurons construit les funiculaires $\widetilde{\Omega\,\Phi}$ (v. n° 195) de chacune des travées, ce qui nous aura fait connaître toutes les trisectrices eïfiées ainsi que toutes les aires Ω et Φ que l'on suppose y être appliquées, comme le seraient des poids.

Entrons, à ce sujet, dans quelques détails et raisonnons sur deux travées consécutives quelconques. Afin de débarrasser les formules d'indices qui compliqueraient les écritures, nous désignerons par l et par l_1 les longueurs des deux travées (fig. 266-I). A, B et C seront les points d'appui, Ω et Φ, Ω_1 et Φ_1 seront les aires des triangles unitaires eïfiés des travées l et l_1; leurs réactions seront, selon nos conventions (v. n° 193) ω et φ, ω_1 et φ_1 sur l'appui de gauche de leur travée, ω' et φ', ω_1' et φ_1' sur l'appui de droite.

Les trisectrices seront désignées, pour la première travée, par les lettres i et j, marquées à leurs pieds, et pour la seconde travée, par les lettres i' et j'.

Cela posé : voici la série des opérations préalables à effectuer sur chaque travée pour en déterminer les *données élastiques*.

1° On adoptera un moment unitaire μ *négatif* (nous verrons plus loin pourquoi), et on construira pour chaque travée (v. n° 194) le rectangle unitaire eïfié *adb* et *bd'c* ainsi que sa diagonale curviligne, laquelle divisera le rectangle en ses deux triangles unitaires eïfiés Ω et Φ; on sait que cette diagonale curviligne n'est pas indispensable à tracer.

Nous avons remarqué, en temps utile, que tout rectangle eïfié n'était autre chose qu'une représentative, à une échelle donnée, de l'expression 1 : EI, c'est-à-dire, en somme, une représentative de la constitution de la poutre.

Nous avons désigné par Ω et par Φ les aires de chacun des triangles unitaires eïfiés d'une travée. Ces aires sont assimilées à des poids fictifs que l'on suppose appliqués suivant les verticales i et j de leurs centres de gravité et ce sont ces verticales qui ont été nommées par nous les *trisectrices eïfiées*.

2° On subdivisera ces aires en tranches verticales suffisamment étroites et, en construisant un funiculaire sur ces aires élémentaires (v. n° 196), on en déduira pour chaque travée :

(*a*) Le funiculaire $\widetilde{\Omega\,\Phi}$ (on sait que c'est toujours un trapèze). Admettons, par exemple, que ce soit le trapèze AIJB (fig. II) pour la première travée et BI'J'C pour la seconde;

(*b*) Les deux trisectrices eïfiées i et j;

(*c*) Les aires Ω et Φ, qui sont précisément les pentes du côté initial et du côté final du funiculaire $\widetilde{\Omega\,\Phi}$.

(*b*) **Elastiques** μ. — Le funiculaire curviligne complet du rectangle unitaire eïfié ne serait autre chose que *l'élastique-épure* que prendrait la poutre, en supposant qu'elle soit soumise en tous ses points à un moment fléchissant constant égal au moment unitaire μ. Nous désignerons cette élastique sous le nom de *l'élastique* μ : chaque travée aura la sienne.

(*c*) **Conseils pratiques.** — On construira, pour chaque travée, les funiculaires des rectangles unitaires, c'est-à-dire les élastiques μ, par la méthode que l'on voudra. Celle de M. Collignon (v. n° 196) est à recommander; mais on aura le soin, si on l'applique, de ramener ensuite les funiculaires $\widetilde{\Omega\,\Phi}$ de toutes les travées à la même distance polaire; elle pourrait être, par exemple, la demi-longueur de la plus grande des travées, ou une longueur quelconque, 10 mètres, 20 mètres, etc...

Si l'on prend toujours pour pôle, soit le milieu, soit,

mieux encore, l'extrémité des travées, ainsi que nous l'avons recommandé au n° 196, on aura une distance polaire qui variera avec chacune d'elles et les funiculaires, ainsi que les pentes Ω et Φ, ne seront pas dessinés à la même échelle,

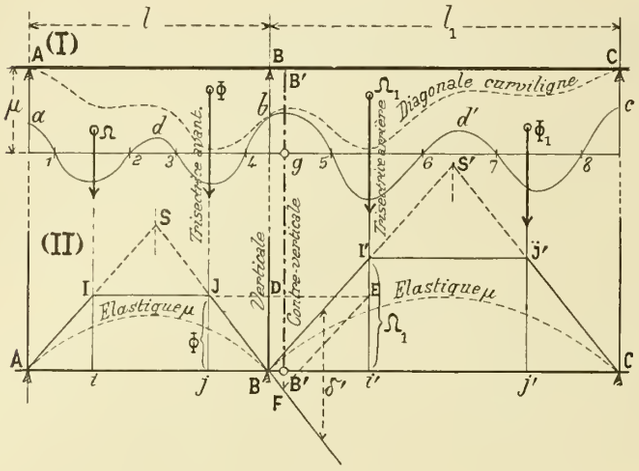


Fig. 266

ce qui sera un inconvénient. Rien ne sera plus facile que de les y ramener en amplifiant toutes les ordonnées, et particulièrement l'ordonnée des sommets S ou S′ du funiculaire $\widetilde{\Omega\,\Phi}$, obtenu par la méthode de M. Collignon, dans le rapport, soit de la demi-longueur, soit de la longueur totale de la travée, à la distance polaire uniforme choisie pour toute la poutre.

Cette nécessité de ramener tous les funiculaires à la même distance polaire s'imposera aussi pour les funiculaires des moments de charge dont nous parlerons plus loin.

On aura soin, également, de prendre la même base de réduction pour toutes les aires élémentaires suivant lesquelles on décomposera les aires totales de moments eïfiés.

Si, adoptant la méthode Collignon, on prenait pour chaque travée la distance polaire égale, soit à la demi-longueur, soit à la longueur totale de travée, il y aurait alors intérêt à prendre les bases de réduction inversement proportionnelles à ces longueurs ; dans ce cas, il serait inutile de modifier, après coup, les funiculaires ; ils seront tous dessinés à une même échelle, qu'il sera facile, d'ailleurs, de déterminer.

(*d*) **Trisectrices et contre-verticales d'un appui.** — Cela fait, remarquons qu'un appui quelconque B est accompagné de deux trisectrices ; la première, *j*J, répondant à l'aire Φ du triangle unitaire de droite de la travée qui le précède (ce sera sa *trisectrice-avant*), la seconde, *i*′I′, répondant à l'aire Ω_1 du triangle unitaire de gauche de la travée qui le suit (ce sera sa *trisectrice-arrière*), et sur chacune d'elles sont supposées appliquées, comme le seraient des poids, les aires Φ et Ω_1. Anticipons un peu sur ce qui va suivre et cherchons la résultante des deux aires Φ et Ω_1.

Nous nommerons *contre-verticale* de l'appui considéré B la ligne d'action de cette résultante.

Pour l'obtenir nous devrons diviser l'intervalle *ji*′ des deux trisectrices dans le rapport inverse des aires Φ et Ω_1 ou, ce qui revient au même, dans le rapport inverse des pentes des droites BJ et BI′ ; voici le tracé à effectuer (fig. II).

JE est une horizontale ; par le point E où elle rencontre la trisectrice-arrière, on mène EF parallèle à BI′ et on prend le point F où cette droite rencontre la ligne JB prolongée. La contre-verticale B′F passe par le point F.

En effet, on a

$$\overline{DF} = \overline{JD} \times \Phi = \overline{DE} \times \Omega_1 \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\overline{JD}}{\overline{DE}} = \frac{\Omega_1}{\Phi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*e*) **Résumé. — Centre μ d'un appui.** — En résumé, les données élastiques d'un appui seront :

1° Ses deux trisectrices eifiées (trisectrice-avant et trisectrice-arrière) ;

2° Les deux pentes Φ et Ω_1 des élastiques μ, c'est-à-dire des funiculaires $\widetilde{\Omega\,\Phi}$ de chacune des travées qui lui sont contiguës ; ces funiculaires étant rapportés à la même distance polaire ;

3° La contre-verticale, tracée comme ci-dessus.

Nous représenterons dorénavant les contre-verticales en trait mixte et nous indiquerons leurs pieds par les mêmes lettres que les verticales d'appui, mais affectées d'un accent.

Exemple. A′ indiquera la contre-verticale de l'appui n° 5.

Sur l'épure des moments (fig. I), plaçons sur la contre-verticale un point *g* situé à la distance μ de l'axe des abscisses. Ce point *g* résume, pour ainsi dire, en lui-même toutes les données élastiques de la poutre en ce qui concerne l'appui B. — Nous le nommerons le *centre* μ de la pile.

Nous placerons tout à l'heure sur chaque contre-verticale un point que nous nommerons le *centre de correction* de la pile et qui jouera un rôle considérable dans la théorie de la poutre continue.

286. Données de charges de la poutre. — (*a*) Elastiques indépendantes de charges. — On connaît les charges auxquelles sont soumises les travées de la poutre.

Imaginons que cette dernière ait été coupée au-dessus de ses appuis et ait été rendue libre, c'est-à-dire non encastrée sur chacun d'eux. Sous l'influence de ces charges, chaque travée de poutre, ainsi rendue indépendante, prendrait une élastique indépendante, que nous nommerons son *élastique de charge*. Nous avons appris à la construire ; nous avons vu que pour cela il fallait :

1° Construire en AMB et en BMC (fig. 267-III) la représen-

tative des moments. (La fig. 267 est la continuation de la fig. 266) ;

2° Eïfier cette représentative (fig. III — ligne pointillée ; pour cette eïfication, v. n° 194) ;

3° Décomposer cette aire eïfiée en tranches verticales et, sur les aires partielles de ces tranches, supposées concentrées en leurs centres de gravité, construire un funiculaire, lequel donnait à une certaine échelle l'élastique de charge (fig. IV).

On se rappellera que les réactions sur les appuis de l'aire totale des moments eïfiés donnaient, au signe près, les pentes α et α' de ces élastiques au-dessus des appuis, sans qu'il fût, pour cela, nécessaire de construire entièrement cette dernière courbe.

(*b*) **Pente de correction d'un appui.** — Par conséquent (fig. IV), en supposant que trois appuis consécutifs A, B et C soient en ligne droite, nous connaissons sur l'appui intermédiaire B la pente α de l'élastique indépendante de gauche et aussi la pente α' de l'élastique indépendante de droite ; et nous pouvons, en les ajoutant, savoir de quel angle $TBT' = \alpha + \alpha'$ il faudrait faire tourner la tangente à l'élastique de gauche pour la faire coïncider avec la tangente à l'élastique de droite ; sur la fig. IV, cet angle $\alpha + \alpha'$ serait négatif, et il en sera toujours ainsi. Si les appuis ne sont pas

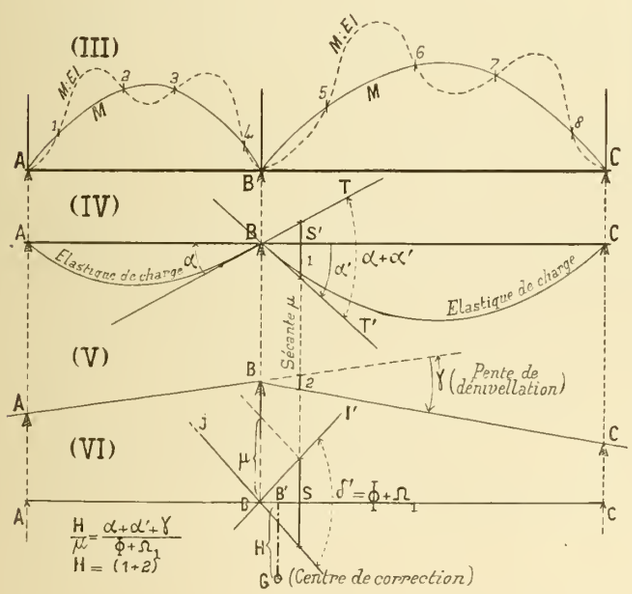


Fig 267

en ligne droite (fig. V), alors l'angle TBT′ doit être augmenté algébriquement de la pente de dénivellation γ.

Nous désignerons par la lettre δ cet angle total dont il faudrait, avec les appuis denivelés, faire tourner la tangente à l'élastique indépendante de gauche pour l'amener à coïncider avec la tangente à l'élastique indépendante de droite ; on aura $\delta = \alpha + \alpha' + \gamma$. Nous appellerons cet angle δ (ou plutôt sa tangente trigonométrique) la *pente de correction* de l'appui considéré. Voici pourquoi nous lui donnons cette appellation.

Cet angle existe, précisément, parce que, dans ce qui précède, nous avons supposé que la poutre était formée de travées indépendantes. Mais on conçoit que par l'addition de semelles et par un rivetage pratiqué au-dessus des piles, on pourrait solidariser les travées et rendre la poutre continue.

C'est en développant des moments, de grandeur convenable, au-dessus de chaque pile, que l'on pourra, statiquement, réaliser cette continuité, c'est-à-dire *corriger* les pentes des élastiques indépendantes pour les solidariser.

Nous nommerons *moments sur piles*, les moments (ou plutôt les couples) qu'il faudrait appliquer à la poutre au-dessus de chacun de ses appuis pour réaliser cette continuité ; et comme ces couples auront précisément pour effet de corriger, en l'annulant, cette pente δ, voilà pourquoi nous avons nommé cette dernière la *pente de correction*.

Nota. — Nous avons déjà parlé de pentes de correction lorsque nous avons étudié les poutres encastrées (v. n° 198). Dans le cas de la poutre continue, si cette dernière est encastrée sur la culée d'origine A_0, la pente de correction δ_0

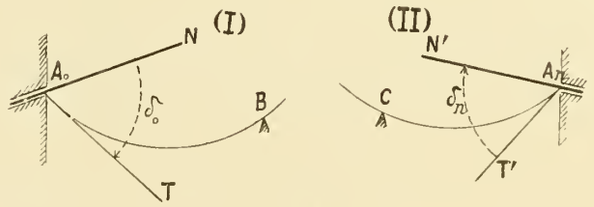


Fig. 268

sera celle qu'il faudrait imposer à une tige N, qui serait logée dans la boîte d'encastrement, pour la faire coïncider avec la tangente T à l'élastique indépendante de charge (sur la fig. 268, δ_0 est négatif).

Pour la culée d'extrémité A_n ce serait la pente δ_n à imposer à la tangente T′ de l'élastique indépendante pour la faire entrer, suivant N′, dans la boîte d'encastrement (sur la fig. 268, δ_n est négatif).

(*c*) **Moment moyen de correction.** — Posons-nous maintenant la question suivante :

Le moment unitaire μ produisait dans chaque travée une élastique μ, dont les tangentes, au-dessus de l'appui B, faisaient entre elles une pente de correction δ' égale à $\Phi + \Omega_1$. Si l'on appliquait ce moment unitaire en sens contraire, il serait capable de détruire, c'est-à-dire de corriger, cette même pente δ'. Quel serait le moment uniformément appliqué, H, qui serait capable de corriger la pente de correction δ que nous venons de trouver ci-dessus ? Tel sera le *moment moyen de correction*.

Il résulte de tout ce qui précède que les pentes partielles et aussi la somme des pentes que peuvent produire deux moments constants H et μ sont proportionnels à ces moments ; ce qui donne la relation :

$$(1) \qquad \frac{H}{\mu} = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\alpha + \alpha' + \gamma}{\Phi + \Omega_1}, \qquad \text{d'où}$$

$$H = \frac{\delta\mu}{\Phi + \Omega_1}.$$

Calculons, ou plutôt construisons, cette quantité H et, une fois que nous la connaîtrons, portons-la de B′ en G (fig. VI) *dans le sens négatif*, sur la contre-verticale ; cela nous donnera un point G, que nous nommerons le *centre de correction* et que nous construirons de la manière suivante.

(*d*) **Centre de correction de l'appui. — Sécante μ.** — Pour la facilité du raisonnement, nous avons reproduit (fig. VI) en JB et en BI′ les pentes des élastiques μ de la figure 266-III, et aussi en B′G la contre-verticale. Cela fait :

1° On a construit en S′S une sécante verticale telle que le segment intercepté entre les lignes I′B et JB... soit égal au moment unitaire μ. C'est pour cela que nous nommerons cette droite la *sécante* μ. La mise en place de cette sécante μ est évidente sur la fig. VI ;

2° On a prolongé la sécante μ et on a pris les segments 1 et 2 interceptés sur elle (fig. IV) par les tangentes aux élastiques de charge et (fig. V) par les lignes d'appui ;

3° On a fait le total algébrique de ces deux segments, ce qui a donné une longueur

$$H = (1 + 2)$$

qui a été portée de B′ en G sur la contre-verticale.

Cette construction est juste ; en effet, on a évidemment

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \overline{BS'} \times (\alpha + \alpha') \\ 2 = \overline{BS'} \times \gamma \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad H = \overline{BS'}(\alpha + \alpha' + \gamma).$$

$$\mu = \overline{BS'} \times (\Phi + \Omega_1) \qquad \text{et par suite}$$

$$(1) \qquad \frac{H}{\mu} = \frac{\alpha + \alpha' + \gamma}{\Phi + \Omega_1} = \frac{\delta}{\delta'},$$

ce qui est la relation (1) écrite plus haut.

(*e*) **Échelles des dénivellations.** — Il est indispensable que cette pente de dénivellation γ soit rapportée à la même échelle que toutes les ordonnées d'élastique et, par conséquent, que toutes les pentes de ces élastiques.

On obtiendra tout naturellement ce résultat en dessinant les ordonnées des points d'appui à la même échelle que les ordonnés des élastiques.

Exemple : Si le point d'appui B est, *dans l'espace*, à $0^m,152$ au-dessus du point d'appui A et que l'échelle des ordonnées, calculée comme il a été indiqué au n° 181, fig. 147, soit de $1^m,808$ pour 1^m, la différence des hauteurs de B et de A, *sur l'épure*, sera :

$$0^m,152 \times 1,808 = 0^m,2748.$$

Ces préliminaires ont été un peu longs, mais ils vont nous permettre d'exposer rapidement la théorie de la poutre continue dans le cas le plus général.

§ 2. — Solution graphique du problème de la poutre continue

287. **Lemme du moment trisecteur.** — Nous allons démontrer, d'une autre manière, le lemme du n° 197. Soit : M et M′ (fig. 270-I) deux moments sur piles et soit AMM′B la représentative trapézoïdale des moments qu'ils développent sur la poutre. On supposera ce trapèze décomposé en ses deux triangles AMB et BMM′ ; chacun de ces triangles sera eïfié et leurs aires, lesquelles ont pour expression (v. n° 193),

$$\frac{M}{\mu}\Omega \qquad \text{et} \qquad \frac{M'}{\mu}\Phi,$$

seront supposées appliquées sur les trisectrices eïfiées, I et J.

On construira, par la méthode Collignon (fig. II et III), sur ces aires, un funiculaire, que nous nommerons le funiculaire $\widetilde{MM'}$, et l'on obtiendra le quadrilatère *acdb* (fig. III). Son premier côté *ac* et son dernier côté *db* seraient tangents à l'élastique des moments sur piles (nous la nommerons l'élastique $\widetilde{MM'}$) et, par suite, en feraient connaître les pentes β et β'.

Nota. — Sur la fig. 269, dessinée en face, nous faisons les mêmes constructions, mais en supposant que les moments M et M′ sont égaux entre eux et au moment unitaire μ.

Je dis, tout d'abord, que l'ordonnée d'origine *aa′* et l'ordonnée d'extrémité *bb′* du funiculaire $\widetilde{MM'}$ (fig. 270-III) sont proportionnelles aux moments M et M′ de la fig. I. En effet, supposons que le funiculaire (fig. III) ait été tracé par la méthode de M. Collignon (fig. II). Ses ordonnées d'origine et d'extrémité *aa′* et *bb′* sont égales aux segments 1 et 2, marqués d'un trait fort, de la fig. II ; et puisque ces derniers sont toujours comptés sur les trisectrices eïfiées il en résulte que l'on a, en comparant les figures 270-III et 269-III (K désignant un rapport constant facile à évaluer),

$$\frac{\overline{bb'}}{M'}(\text{fig. } 270) = \frac{\overline{D'd'}}{\mu}(\text{fig. } 269) = K$$

et de même, puisque (fig. 269) le funiculaire $\widetilde{\Omega\Phi}$ est toujours un trapèze.

$$\frac{\overline{aa'}}{M}(\text{fig. } 270) = \frac{\overline{D'd'}}{\mu}(\text{fig. } 269) = K.$$

d'ou l'on conclut :

$$\frac{\overline{aa'}}{\overline{bb'}} = \frac{M}{M'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le trapèze $aa'b'b$ qui enveloppe le funiculaire $\widetilde{MM'}$ (fig. 270-III) est donc une dilatation, dans le rapport constant K, du trapèze des moments M et M' (fig. I).

Cela est vrai pour tous les cas et, en particulier, pour celui où les moments sur piles M et M' seraient égaux au moment unitaire μ (fig. 269).

Cela posé, considérons (fig. 270-I) un des deux moments

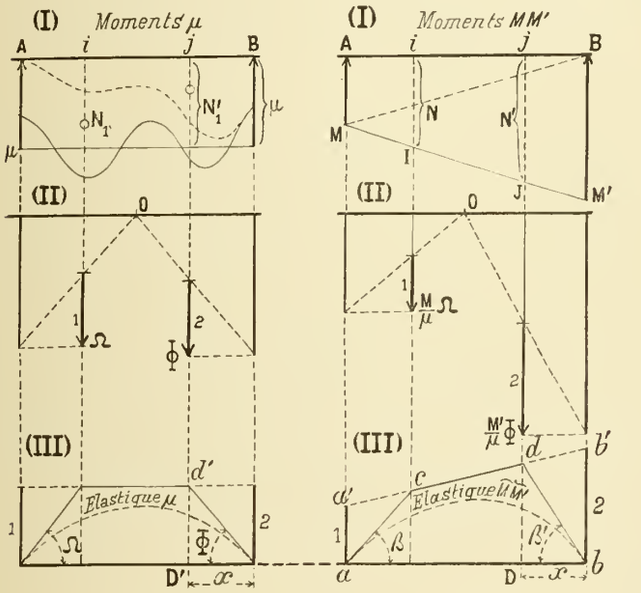


Fig. 269 Fig. 270

trisecteurs (celui de droite N' par exemple) (1) et comparons-le à l'ordonnée correspondante $\overline{Dd}$ du funiculaire $\widetilde{MM'}$ (fig. III) ; on aura, en appelant x la distance de la trisectrice à l'appui B et en remarquant que β' est la pente de l'élastique $\widetilde{MM'}$,

$$\overline{Dd} = x \times \beta'.$$

Il résulte de ce qui précède que

$$\overline{Dd} = K \times N', \qquad \text{d'où} \qquad \beta' = \frac{K \times N'}{x},$$

Cette formule peut se traduire ainsi :

« La pente β' de l'élastique $\widetilde{MM'}$ sur un des appuis (ici « celui de droite) est proportionnelle au moment trisecteur « (ici N') correspondant. »

(1) Dans le n° 197 nous désignions les moments trisecteurs par la lettre majuscule *grasse* **M**. Nous avons remarqué que cette notation amenait quelque confusion ; c'est pourquoi nous les désignerons dorénavant par la lettre majuscule ordinaire N.

Un accent (N') indiquera le moment trisecteur de droite et un indice marquera le numéro de la travée.

Exemple : N_3 voudra dire : le moment trisecteur de gauche de la travée n° 3 ; N'_5 sera le moment trisecteur de droite de la travée n° 5. Un appui, l'appui n° 4 par exemple, aura son *moment trisecteur-avant*, qui sera N'_4 et son *moment trisecteur-arrière*, qui sera N_5.

Cette relation sera vraie pour tous les cas et, en particulier, si $M = M' = \mu$, comme sur la fig. 269. Alors le moment trisecteur est, lui aussi, égal à μ ; l'élastique devient ce que nous avons appelé l'élastique μ (fig. 269-III) ; ses pentes sur les appuis sont Ω et Φ et l'on aura aussi :

$$\Phi = \frac{K \times \mu}{x},$$

d'où l'on déduit, en faisant le quotient

$$(1) \qquad \frac{N'}{\mu} = \frac{\beta'}{\Phi}.$$

Tel est le lemme du moment trisecteur déjà démontré. On peut l'énoncer comme suit :

Préliminaires. — 1° Une travée est soumise une première fois à deux moments sur piles, égaux chacun à un moment unitaire μ, arbitrairement choisi. Elle prend, sous leur influence, une élastique, que nous avons appelée l'élastique μ, qui possède au-dessus de l'un de ses appuis une certaine pente Φ (fig. 269-III).

2° On soumet la même poutre à deux moments sur piles différents M et M'. Elle prend une autre élastique que nous avons appelée l'élastique $\widetilde{MM'}$, qui possède sur le même appui une autre pente β' (fig. 270-III).

3° Les moments sur piles M et M' développent dans la travée deux moments trisecteurs N et N' ; on prend celui des deux (N') qui est voisin de l'appui considéré. Cela posé :

Lemme. — *Le moment trisecteur est au moment unitaire comme la pente de l'élastique $\widetilde{MM'}$ est à la pente de l'élastique μ.*

En résolvant l'équation (1) par rapport à β' il vient :

$$(2) \qquad \beta' = \frac{N'}{\mu}\Phi.$$

288. **Théorème des deux moments trisecteurs d'une pile.** — Reprenons (fig. 271) les deux travées consécutives des figures 266 et 267 et supposons connus les trois moments sur piles, M, M' et M'', qu'il faudrait appliquer au-dessus de chacun des appuis A, B et C pour annuler la pente de correction δ trouvée ci-dessus. Dessinons (fig. II) les représentatives trapézoïdales AMM'M''C des moments de correction qui en sont la conséquence ; représentons en I, J et I', J' les trisectrices et considérons seulement la trisectrice-avant J et la trisectrice-arrière I' de l'appui intermédiaire B.

A la première trisectrice répond le moment trisecteur-avant N' et à la seconde le moment trisecteur-arrière N_1.

Représentons aussi la contre-verticale B' et plaçons sur elle le centre de correction G trouvé ci-dessus (v. n° 286-*d*)

Nota. — Pour abréger le langage, nous confondrons les moments, (les moments trisecteurs, par exemple), avec les points C et D qui terminent leurs ordonnées représentatives. Cela posé, le théorème s'énonce ainsi :

Théorème. — *La droite qui joint les moments trisecteurs d'une pile passe toujours par le centre de correction de cette pile.*

En effet, soit β' (fig. 271-I) la pente de l'élastique indépendante que produiraient, dans la première travée, les

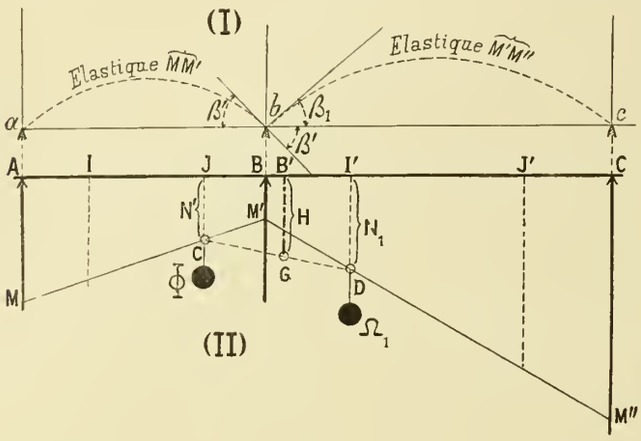


Fig. 271

moments sur piles M et M'; en vertu du lemme précédent on a :

$$\beta' = \frac{N'}{\mu}\Phi.$$

Soit β_1, la pente de l'élastique indépendante que produiraient, dans la seconde travée, les moments sur piles M' et M''; on aura, d'après le même lemme :

$$\beta_1 = \frac{N_1}{\mu}\Omega_1.$$

Mais la somme des contre-pentes β' et β_1 doit être égale à la pente de correction δ que les moments sur piles ont précisément pour mission de détruire, et l'on sait que cette pente de correction δ est égale à la somme des pentes $\alpha + \alpha'$ des élastiques indépendantes de charge augmentée de la pente de dénivellation γ de l'appui :

$$\delta = \alpha + \alpha' + \gamma.$$

On aura donc :

$$\frac{N'}{\mu}\Phi + \frac{N_1}{\mu}\Omega_1 = \delta, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad N'\Phi + N_1\Omega_1 = \delta\mu.$$

Cela posé, assimilons Φ et Ω_1 à des poids fictifs qui seraient attachés en C et en D aux extrémités des moments trisecteurs, et dont les points d'attache C et D glisseraient sur les trisectrices.

Le premier membre de cette équation (1) n'est autre chose que la somme des moments de ces poids par rapport à la base AC, et comme le second membre est constant, cette équation exprime que la résultante de ces poids passe par un point fixe dont nous allons déterminer la position.

Ce point se trouve d'abord sur la direction de la résultante des forces Φ et Ω_1, et nous avons vu que c'était la contre-verticale. De plus, le second membre de l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\delta\mu}{\Phi + \Omega_1}(\Phi + \Omega_1),$$

ce qui prouve que la hauteur H du centre des deux poids fictifs Φ et Ω_1, est

$$H = \frac{\delta\mu}{\Phi + \Omega_1}.$$

Cette hauteur H est précisément celle du centre de correction G trouvée plus haut (v. n° 286-*c* et *d*). Le théorème est donc démontré.

Nous allons l'appliquer à la recherche graphique des moments sur piles pour toute la poutre.

289. Théorème des foyers. — (*a*) **Enoncé.** — « Si dans une « travée la ligne représentative des moments de correction « passe par un point fixe, qui sera nommé un *foyer*, dans « toutes les autres travées elle passera aussi par des points fixes « qui seront nommés les foyers conjugués du premier ».

(*b*) **Démonstration.** — Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour deux travées consécutives.

Soit F_1 (fig. 272) le foyer d'une travée (nous supposerons que c'est la travée n° 1) ; soit B la verticale d'appui, B' la contre-verticale, G le centre de correction, J la trisectrice-avant et I' la trisectrice-arrière de l'appui B. Imaginons que F_1E soit la droite représentative des moments de correction dans la première travée ; on prend en C son intersection avec la trisectrice-avant ; d'après le théorème des deux moments trisecteurs, si l'on joint CG et si l'on prolonge jusqu'à la rencontre en D avec la trisectrice-arrière, on aura, en I'D, le moment trisecteur-arrière et, par suite, ED sera la droite des moments dans la seconde travée. Cela montre, en passant, que si l'on connaissait un segment de la représentative des moments de correction dans une seule travée on en déduirait la continuation de cette représen-

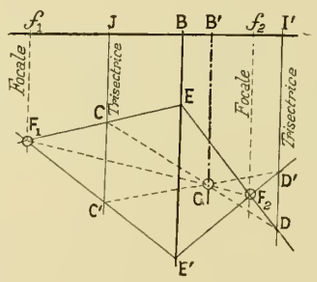


Fig 272

tative dans la travée suivante et, ensuite, dans toutes les autres.

Menons par le même foyer F_1 une autre droite représentative, F_1E'; nous en déduirons, de la même manière, les

deux moments trisecteurs C′ et D′ et, comme conséquence, le segment E′D′ de la représentative des moments dans la deuxième travée. Je dis que E′D′ rencontre ED en un point fixe F_2. Pour justifier cette assertion, il suffit de démontrer que le rapport $\overline{EF_2} : \overline{F_2D}$ est constant.

On a, en désignant par K et par K′ des constantes dont l'évidence sera manifeste sur la figure :

$$(1) \qquad \frac{EF_2}{F_2D} = \frac{EE'}{DD'}, \qquad \text{d'un autre côté}$$

$$\frac{EE'}{CC'} = K \qquad \text{d'où} \qquad EE' = K \times CC',$$

$$\frac{DD'}{CC'} = K' \qquad \text{d'où} \qquad DD' = K' \times CC'.$$

Donc en substituant dans (1)

$$\frac{EF_2}{F_2D} = K' \times K = \text{constante.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*c*) **Remarque n° 1.** — Parmi les positions possibles de la première droite F_1E il y aurait celle F_1G, qui passerait par le centre G. Il est évident, alors, que le foyer F_2 conjugué de F_1, se trouvera sur le prolongement de cette droite. Par conséquent, si le recoupement de la ligne brisée F_1ED avec la ligne droite F_1G prolongée est de bonne qualité, nous conseillerons d'employer cette dernière ; sinon il faudra mieux avoir recours à une seconde ligne brisée $F_1E'D'$, car on sera toujours maître de la choisir de manière à avoir un bon recoupement.

(*d*) **Focales.** — La position de la verticale F_2f_2 qui contient le conjugué du foyer F_1 ne dépend que des rapports K′ et K, c'est-à-dire, en définitive, des distances auxquelles sont entre elles les trisectrices, la verticale et la contre-verticale d'appui, la verticale du foyer F_1 ; cette position est donc indépendante de la hauteur B′G du centre de correction ; de sorte que si, le premier foyer restant fixe, ou tout au moins se déplaçant sur sa verticale, les charges variaient ainsi que la pente de dénivellation, cela aurait pour effet de faire varier le point G sur la contre-verticale ; mais chaque foyer resterait toujours sur une même verticale que nous nommerons *une focale.*

290. **Résumé de la marche à suivre** (fig. 273). — (*a*) **Foyers des diverses travées.** — Montrons maintenant que le problème de la recherche graphique des moments sur piles est théoriquement résolu.

Je dis que, dans chaque travée de rive, il existe toujours un foyer, c'est-à-dire un point pour lequel on connaît immédiatement le moment de correction. En effet, raisonnons sur la première travée ; deux cas seulement peuvent se présenter :

1er Cas. — La poutre est libre sur la culée ; alors au-dessus de cette culée A_0 le moment fléchissant est nul ; dans ce cas le point A_0 sera le *foyer de gauche* de la travée de rive.

2e Cas. — La poutre est encastrée sous une pente connue γ_0 et l'on a pu déduire de cette pente, combinée avec la pente α_0 de l'élastique que prendrait la poutre, supposée libre, sous l'influence des charges appliquées sur la seule travée de rive, la pente de correction δ_0. Nous avons vu (n° 199) que, dans ces conditions, le moment trisecteur de gauche N_0 était connu et déterminé par la formule.

$$\frac{N_0}{\mu} = \frac{\delta_0}{\Omega_0}.$$

L'extrémité de l'ordonnée de ce moment trisecteur constituera, dans ce cas, le *foyer de gauche* de la première travée.

(*b*) **Succession des épures à faire.** — Suivre sur la figure 273 (p. 226) : nous l'expliquons sous forme de légende :

(Fig. I). Représentatives des moments de charges, en supposant la poutre coupée au-dessus de chacun de ses appuis.

(Fig. II). Positions relatives des appuis et pentes de dénivellation γ_0, γ_1, etc., qui en sont la conséquence. Sur la culée d'origine A_0 la poutre est supposée encastrée dans la direction A_0T_0 ; sur la culée d'extrémité, A_4, elle est supposée posée librement.

(Fig. III). On a cherché dans une autre épure, non reproduite ici, les données élastiques, lesquelles se traduisent : 1° par les trisectrices eïfiées *ij*, *ij*... de chaque travée ; 2° par les contre-verticales A'_1, A'_2,.... et 3° par les centres de correction G_1, G_2, G_3..... La poutre étant encastrée à l'origine, il existe un foyer F_1 sur la trisectrice *i* de la travée de rive, dont l'ordonnée est calculée comme il vient d'être dit ci-dessus. De ce foyer F_1 on a déduit, en appliquant le théorème des deux moments trisecteurs, les foyers de gauche F_2, F_3 et F_4 de chaque travée.

(Fig. IV). La poutre étant libre sur la culée A_4, le point A_4 est un foyer, duquel on a déduit, de la même façon, les foyers de droite F'_3, F'_2, F'_1 de chaque travée.

(Fig. V). On y a reporté les abscisses et les ordonnées de tous les foyers. On a joint ces foyers et on a obtenu en M_0, M_1, M_2, M_3, A_4, la représentative polygonale des moments de correction.

Comme vérification, en joignant les foyers de chaque travée, les droites ainsi obtenues doivent se recouper sur les verticales d'appui en des points M_1, M_2, M_3 qui font connaître les moments sur piles.

(*c*) **Nota.** — Il est évident que les figures III, IV et même V pourraient été groupées sur une même épure ; nous les avons séparées afin de rendre les explications plus faciles à suivre.

(*d*) **Emploi des focales.** — Supposons (fig. VI) que l'on ait tracé les focales *ff'-ff'*... de chaque travée; alors la construction se simplifie. En effet, soit F_1 le foyer gauche de la 1re travée; on joint F_1G_1 et l'on prolonge jusqu'à la rencontre avec la focale gauche *f* de la 2e travée, ce qui donne en F_2 le foyer gauche de cette travée, et ainsi de suite ; on

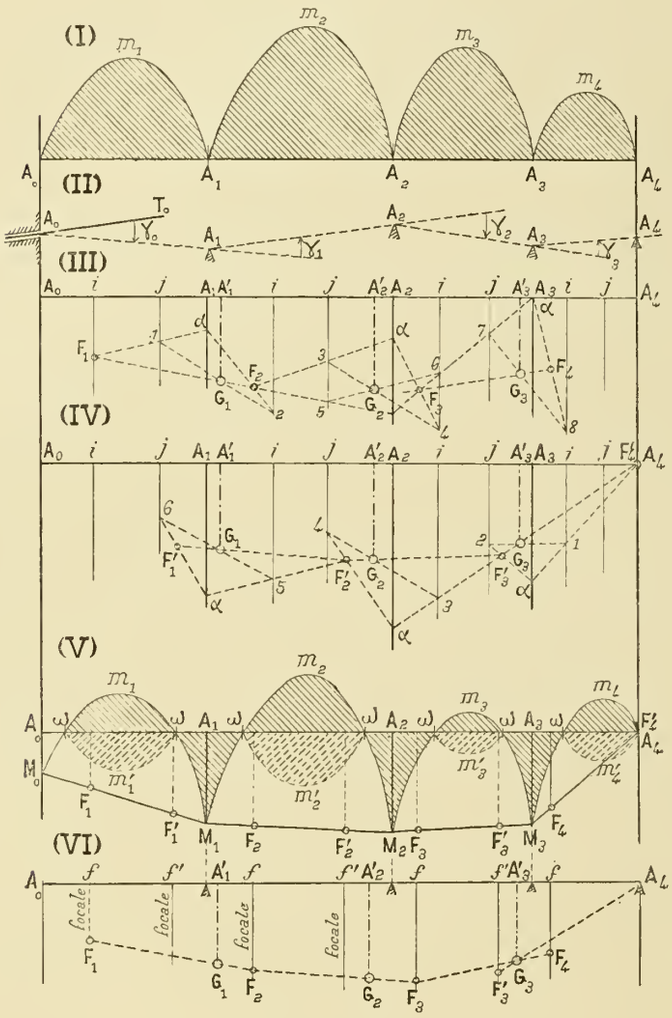


Fig. 273

trouve donc très vite les foyers de gauche, en menant successivement les lignes $F_2G_2F_3$ — $F_3G_3F_4$.

En partant de A_4, on obtiendra de même en F'_3 le foyer de droite de la 3e travée et, ensuite, tous les autres. Nous n'avons pas indiqué ce dernier tracé sur l'épure (fig. VI). Ce tracé simplifié est surtout commode pour étudier les effets d'une charge mobile sur une poutre continue, ainsi que nous le verrons plus loin.

(*c*) **Moments définitifs.** — En ajoutant, analytiquement, dans chaque travée les représentatives trapézoïdales des moments de correction (fig. V) avec les représentatives déjà tracées (fig. I) des moments de charge, on aura en M_0, m_1, M_1, m_2.....m_4A_4 des représentatives des moments définitifs (fig. 273-V).

Les parties couvertes de hachures pleines sont celles entre lesquelles on devra compter les moments ; il y aura des moments négatifs et des moments positifs. Aux points ω, ω, ω... ils seront nuls et l'élastique définitive y présentera des inflexions.

Si l'on veut faire l'épure de la répartition des tôles, comme il est dit aux nos 257, 259 et 263, on retournera symétriquement une des aires, la positive par exemple, en $\omega m'_1\omega$, $\omega m'_2\omega$, etc.

(*d*) **Efforts tranchants.** — Les pentes des représentatives des moments de charge feraient connaître les efforts tranchants, dans le cas où la poutre serait coupée au-dessus de chacun de ses appuis. Une fois que la continuité de la poutre sera établie, ces efforts tranchants s'augmenteront, *algébriquement*, des pentes des représentatives des moments de correction de la fig. V; et comme ces représentatives sont des droites dont la pente (positive ou négative) est constante dans toute l'étendue d'une même travée, on voit que la continuité aura pour effet d'élever ou d'abaisser d'une quantité constante, égale à cette pente, les représentatives primitives des efforts tranchants. Cette quantité sera constante pour chaque travée, mais variable d'une travée à une autre.

(*e*) **Réactions des appuis.** — La réaction d'un appui est toujours égale à la force qu'il faudrait que cet appui exerçât sur la poutre pour faire passer son effort tranchant de la valeur qu'il possède immédiatement en avant de l'appui à celle qu'il possède immédiatement après.

Or, considérons (v. plus haut, fig. 81) un bi-plateau ou plutôt un tri-plateau (v. fig. 260) de la poutre, situé au droit d'un appui. Si une représentative de moments, en nous dirigeant de gauche à droite, selon nos conventions, *atteint* cet appui avec une pente positive, cela veut dire qu'en ce point l'effort tranchant est positif, c'est-à-dire que cet appui doit développer une force tendant à faire descendre le plateau de droite par rapport à celui de gauche, c'est-à-dire une force *négative*, et inversement.

Si une représentative de moments *quitte* l'appui, toujours en nous dirigeant de gauche à droite, avec une pente positive, cela veut dire que l'appui doit développer une force tendant à faire monter le plateau de gauche par rapport à celui de droite, c'est-à-dire une force *positive*, et inversement. Nous pouvons donc poser le principe suivant :

Principe.— La réaction d'un appui sur lequel reposent deux poutres se compose de deux parties : la première est égale à l'effort tranchant de la poutre qui le précède, *pris en signe contraire ;* la seconde est égale à l'effort tranchant de la poutre qui le suit, *pris avec son signe*. La réaction totale est

donc égale à la différence algébrique entre l'effort tranchant qui suit et l'effort tranchant qui précède l'appui.

Algébriquement, soient Y, Y′ et Y″ les réactions *primitives* qui eussent été développées par trois appuis consécutifs A, B et C (suivre sur la fig. 276), en supposant que la poutre soit coupée au-dessus de chacun d'eux.

Sur l'appui intermédiaire B, la pente de la représentative MM′ donne l'effort tranchant-arrière qui serait dû aux seuls moments de correction M et M′, et elle a pour expression $\frac{M'-M}{l}$; la pente de la représentative M′M″ donne l'effort tranchant-avant qui serait dû aux seuls moments de correction M′ et M″, et elle a pour expression $\frac{M''-M'}{l'}$. Par conséquent, en faisant la différence algébrique entre la seconde et la première de ces deux expressions et en l'ajoutant à la réaction *primitive* Y′ de l'appui intermédiaire B, on aura pour la réaction *définitive* X′

$$(1) \qquad X' = Y' + \left[\left(\frac{M}{l} + \frac{M''}{l'}\right) - M'\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)\right].$$

et si $l = l'$, ce qui arrivera souvent

$$(2) \qquad X' = Y' + \frac{M + M'' - 2M'}{l}$$

Géométriquement, le deuxième terme du second membre de ces équations indique la correction apportée, par le fait de la continuité de la poutre, à la réaction primitive Y′ de l'appui. Cette correction n'est autre chose que la pente (positive ou négative) dont il faudrait faire tourner la représentative MM′ de la travée de gauche pour l'amener à coïncider avec la représentative M′M″ de la travée de droite.

§ 3. — Solution algébrique du problème de la poutre continue

291. Equation et théorème des trois moments sur piles. — Soient M, M′ et M″ trois moments consécutifs sur piles. Ecrivons que sur l'appui intermédiaire B, la contre-pente de correction due à ces moments est égale à la pente de correction (δ)

$$\delta = \alpha + \alpha' + \gamma$$

telle qu'elle a été définie plus haut (v. n° 286-*b*) et nous aurons une équation entre les trois moments M, M′ et M″.

Or, selon nos conventions : Ω et Φ, Ω_1 et Φ_1 désignant les aires des triangles unitaires eïfiés de chaque travée ; ω' et φ', ω_1 et φ_1 désignant les réactions de ces aires sur la pile intermédiaire, nous avons vu (v. n° 293-*b*) que les réactions des trapèzes eïfiés MM′ et M′M″ sur la même pile, étaient

Réaction du trapèze eïfié MM′ $\quad \frac{M}{\mu}\omega' + \frac{M'}{\mu}\varphi'$,

Réaction du trapèze eïfié M′M″ $\quad \frac{M'}{\mu}\omega_1 + \frac{M''}{\mu}\varphi_1$,

et que la somme de ces réactions représenterait, précisément, la contre-pente sur l'appui B des élastiques indépendantes dues aux moments MM′ dans la première travée et aux moments M′M″ dans la seconde.

On aura donc l'équation suivante, dite *des trois moments :*

$$(1) \qquad M\frac{\omega'}{\mu} + M'\left(\frac{\varphi'}{\mu} + \frac{\omega_1}{\mu}\right) + M''\frac{\varphi_1}{\mu} + (\alpha + \alpha') + \gamma = 0;$$

elle n'est que la traduction algébrique du théorème suivant :

Théorème des trois moments. — *Dans une poutre continue, sur un appui quelconque, les réactions des aires représentatives des moments fléchissants eïfiés (moments de charges et moments de correction), ont pour équilibrante la pente de dénivellation.*

Si les trois appuis consécutifs sont en ligne droite, cette pente de dénivellation est nulle et par suite les réactions d'aires de moments eïfiés doivent se faire équilibre, c'est-à-dire avoir une résultante nulle.

292. Recherche algébrique des moments sur piles. — L'équation précédente est du premier degré en M, M′ et M″, qui sont les inconnues. Il est facile de voir qu'il y aura toujours autant d'équations analogues qu'il y aura de moments sur piles à déterminer.

En effet : imaginons qu'il y ait 8 travées, c'est-à-dire 7 piles et 2 culées : en tout 9 appuis.

1er Cas. — Les deux culées sont à encastrement. Il y a donc 9 moments à déterminer, et comme on pourra, pour chaque appui, mettre en équation le théorème, il y aura donc aussi 9 équations.

2e Cas. — Les deux culées sont à appui libre. Dans ce cas les moments fléchissants y sont nuls ; il n'en reste que 7 à déterminer. En mettant en équation pour chacune des 7 piles le théorème précédent, on aura 7 équations.

3e Cas. — Une des culées est libre, l'autre est à encastrement. Il y a 8 moments à trouver et on disposera de 8 équations.

Ces équations sont faciles à résoudre algébriquement. Nous pourrions indiquer une méthode pour les résoudre graphiquement, mais elle nous conduirait aux mêmes tracés que ci-dessus (1).

(1) Pour cette solution, voir *Annales du Conservatoire des arts et métiers*, 2e série, tome III, p. 194.

§ 4. — Poutres continues a section constante

293. **Emploi des poutres à section constante** — (*a*) **En construction réelle.** — Nous trouverons des poutres continues, à section constante, lorsque nous étudierons :

1° Les poitrails ou les poutres de planchers à grande portée, poutres qu'il sera bon de soutenir en plusieurs points intermédiaires B, C (fig. 274-I);

2° Les poutres armées (fig. II);

3° Les arbalétriers de fermes (fig. III) qui ne seront autre chose que les poutres armées de la fig. II que l'on aura placées dans une position inclinée.

Dans les poutres armées (fig. II et III), les tirants portent en α, α, α... des *écrous-tendeurs* qui permettent, en les serrant plus ou moins, de modifier à volonté les positions relatives des appuis intermédiaires B, C, D et, par conséquent, de les placer, soit en ligne droite, soit en ligne brisée, réalisant telles pentes de dénivellation que l'on voudra.

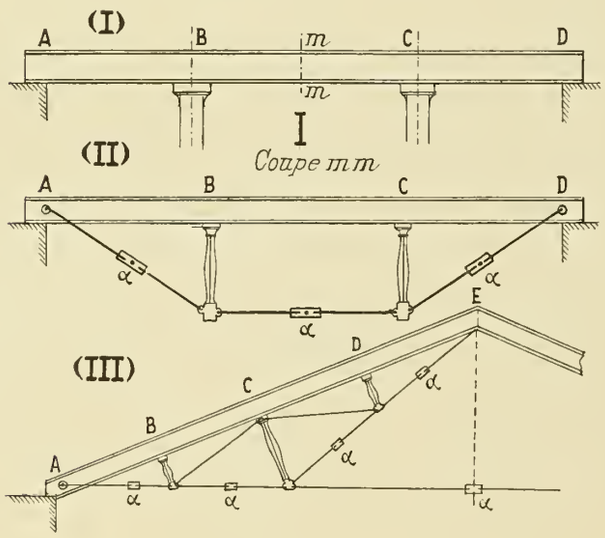


Fig. 274

La section sera constante parce que, dans ces pièces de peu d'importance, le bénéfice que l'on retirerait, comme poids de métal employé, à faire varier le moment de résistance de la section par des additions de semelles serait compensé, largement, par la plus-value dont sont frappés les fers composites par rapport aux fers employés bruts de laminage. De plus, pour ces cas simples, les charges appliquées aux travées se ramèneront toujours aux deux types connus, savoir :

(*a*) Charge P uniformément répartie.

(*b*) Charge P′ concentrée au milieu de la portée.

(*b*) **Comme avant-projet de poutres composites.** — Lorsque les poutres continues sont employées pour édifier de grands ponts, pouvant atteindre de 125 à 150 mètres de portée par travée, on les construit alors en tôles rivées à âmes pleines ou à âmes évidées (treillis, triangles, etc...) et, dans ce cas, les épaisseurs de semelle des tables doivent varier de manière à ce que la poutre se rapproche le plus possible d'une pièce d'égale résistance. Les dimensions seront donc à calculer pour chaque section. Mais on ne peut arriver à connaître exactement les épaisseurs à donner aux tôles que par des études ou, pour mieux dire, par des approximations successives. C'est pourquoi, pour les poutres continues très importantes, on commence d'abord par supposer : 1° que la section (inconnue d'ailleurs) est constante ; 2° que les appuis sont de niveau. Cela permet de faire une première étude de laquelle on déduit : 1° une répartition déterminée des tôles et 2°, s'il y a lieu, les dénivellations à imposer aux appuis pour améliorer autant que possible les moments fléchissants maxima.

Dès lors, une fois cette première étude achevée, on se trouve en présence d'une pièce dans des conditions de position, de charge et de constitution parfaitement définies.

Sur cette pièce on résout alors, comme nous venons de l'indiquer, le problème général de la poutre continue, *à section variable*, reposant sur des appuis dénivelés et, de cette seconde étude, on déduit de nouvelles représentatives de moments fléchissants.

Cela permet de faire une nouvelle répartition des tôles et de modifier, au mieux, les dénivellations des appuis.

Dès lors, on a, en quelque sorte, une troisième poutre sur laquelle on pourrait faire une troisième étude permettant de serrer de plus près encore la solution définitive

Mais, en général, les résultats de la seconde étude, et souvent même ceux de la première, donneront, en pratique, une approximation très suffisante à laquelle on pourra se tenir.

Pour toutes ces raisons, il importe donc d'étudier les poutres homogènes (E constant) à section constante (I constant) reposant sur appuis de niveau (pente de dénivellation toujours nulle $\gamma = 0$).

295. **Solution graphique simplifiée.** — (*a*) **Suppression de l'eïfication.** — Pour chaque point, les facteurs E et I sont constants. Les représentatives de moments ne changent pas de nature après leur eïfication ; et, en particulier, les triangles, les trapèzes, les paraboles restent des triangles, des trapèzes et des paraboles.

Dans toutes les formules où entre le dénominateur EI on pourra le chasser à la condition de le mettre en facteur dans ceux où il n'entre pas. Il n'y a qu'un seul terme de ce genre, c'est la pente de dénivellation γ.

Par conséquent, nous garderons partout les moments *naturels*, c'est-à-dire *non eïfiés*, et nous multiplierons les pentes γ par EI.

Seulement il faut remarquer, dès maintenant, que les ordonnées et que les pentes des élastiques qui seront fournies par les funiculaires construits sur les moments naturels devront être, après coup, divisées par le facteur EI.

(*b*) **Trisectrices et contre-verticales.** — Dans une travée les triangles construits sur le moment unitaire μ, n'étant pas eïfiés, sont égaux entre eux et l'on a (fig. 275)

1re travée $\qquad \Omega = \Phi = \frac{\mu l}{2}$,

2e travée $\qquad \Omega_1 = \Phi_1 = \frac{\mu l'}{2}$.

Les trisectrices se placent aux *tiers véritables* des travées en IJ, I′ et J′.

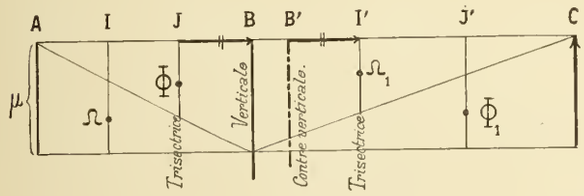


Fig. 275

La contre-verticale B′ doit partager l'intervalle JI′ dans le rapport inverse des aires Ω et Φ_1 ; et comme l'on a :

$$\frac{\Omega_1}{\Phi} = \frac{l'}{l} = \frac{\overline{BI'}}{\overline{BJ}} \qquad \text{et par suite}$$

$$\frac{\overline{BI'}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{JB'}}{\overline{BI'}}.$$

Il en résulte que l'on aura :

$$\overline{JB'} = \overline{BI'},$$

ce qui veut dire que pour avoir le point B′ il suffira de retourner, *bout pour bout*, la ligne JI′ sur laquelle aurait été marqué le point B. La nouvelle position de ce point B donnera le pied B′ de la contre-verticale.

(*c*) **Centre de correction.** — Sa hauteur H, laquelle (v. nº 186-*c* et *d*) n'est autre chose qu'un moment moyen de correction, est donnée, en se rappelant que $\delta = \alpha + \alpha' + \gamma$, par la formule connue :

$$\frac{H}{\mu} = \frac{\alpha + \alpha' + \gamma}{\Phi + \Omega_1}; \qquad \text{on a :}$$

$$\Phi + \Omega_1 = \frac{\mu}{2}(l + l').$$

Quant à la pente de dénivellation γ elle doit être multipliée, ainsi que nous l'avons dit, par le facteur EI ; α et α' sont les réactions des aires naturelles des moments de charge sur l'appui B. On aura donc :

$$\frac{H}{\mu} = \frac{\alpha + \alpha' + (\gamma \times EI)}{\frac{\mu}{2}(l + l')}, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad H\frac{(l + l')}{2} = \alpha + \alpha' + (\gamma \times EI).$$

Si la dénivellation est nulle le terme en γ disparaît. Les quantités α et α' dépendent de la nature des charges ; nous allons en chercher les expressions pour les deux cas adoptés.

1er *Cas. — Poids concentrés* (fig. 276-I). — Soient P et P′ les poids concentrés au milieu des travées ; les moments maxima sont $1/4\,Pl$ et $1/4\,P'l'$. Les aires représentatives

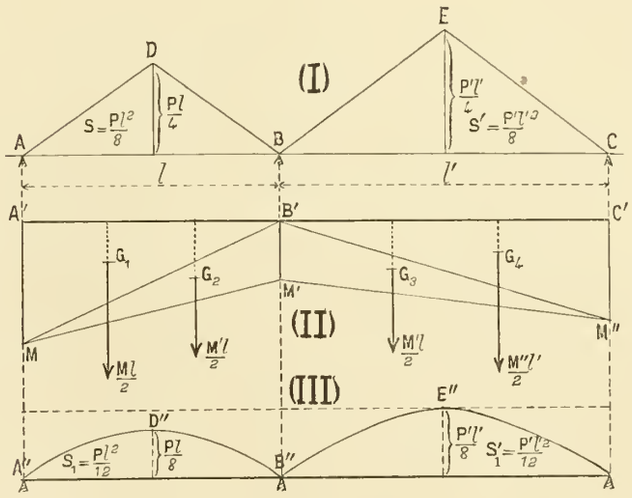


Fig. 276

sont des triangles dont les surfaces sont $1/8\,Pl^2$ et $1/8\,Pl'^2$, et qui donnent, sur l'appui B, une réaction égale à la moitié de leur somme ; on aura donc, dans ce cas :

$$\alpha + \alpha' = \frac{Pl^2 + P'l'^2}{16},$$

d'où en substituant dans la formule (1) qui donne H et en supposant que $\gamma = 0$

$$(2) \qquad H\left(\frac{l + l'}{2}\right) = \frac{Pl^2 + P'l'^2}{16},$$

ce qui permet de calculer la hauteur H.

On peut la construire très simplement, en remarquant que O et O′ étant les milieux des travées, H serait la hauteur d'équivalence d'un rectangle qui, ayant pour base la ligne OO′, serait équivalent aux deux demi-triangles de moments OMB et BM′O′. On opère comme suit (fig. 277).

1º On joint les milieux S et T des deux obliques MB et BM′ ; 2º on prend en V le point de rencontre de la ligne ST

avec la verticale du point B ; et, 3° on retourne bout pour bout cette ligne : le point V prend la position W ; le point W est à la hauteur H.

Ce tracé résulte du problème sur les aires résolu aux nos 53 et 54.

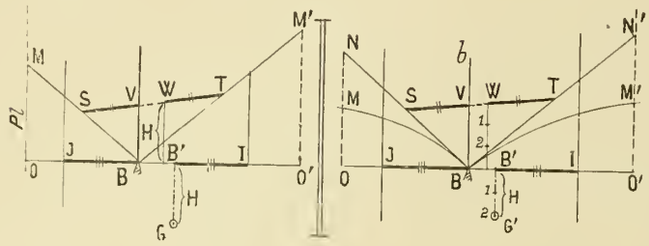


Fig. 277 Fig. 278

Il ne restera plus qu'à porter de B' en G, dans le sens négatif, cette hauteur H sur la contre-verticale pour avoir le centre de correction, G, de l'appui.

2e Cas. — Poids uniformément répartis. — Les représentatives des moments sont (fig. 276-III) des paraboles dont les ordonnées centrales D'' et E'' ont pour valeur les moments maxima, c'est-à-dire : $1/8\,Pl$ et $1/8\,P'l'$.

Les aires de ces paraboles sont égales aux deux tiers de celles des rectangles enveloppants. Elles ont donc pour valeurs $1/12\,Pl^2$ et $1/12\,P'l'^2$; elles donnent, sur l'appui B, une réaction qui est égale à la moitié de leur somme ; on aura donc, dans ce cas,

$$\alpha + \alpha' = \frac{Pl^2 + P'l'^2}{24},$$

d'où, en substituant dans la formule (1) et en supposant que $\gamma = 0$

$$(3) \qquad H\left(\frac{l+l'}{2}\right) = \frac{Pl^2 + P'l'^2}{24}.$$

De cette équation on tirera la hauteur H. On remarquera qu'elle est les 2/3 de la valeur trouvée précédemment, ce qui, pour la construire, permet d'opérer comme suit (fig. 278) :

1° Doubler les ordonnées centrales OM et O'M' des paraboles, ce qui donne les points N et N' ; 2° mener les obliques BN et BN' et prendre leurs milieux S et T ; 3° mener la droite ST, prendre son recoupement V avec la verticale d'appui et la retourner bout pour bout, ce qui amènera V en W ; 4° prendre les 2/3 de la hauteur du point W ainsi obtenu ; cela donnera la hauteur cherchée H, hauteur qu'il ne restera plus qu'à porter de B' en G' dans le sens négatif, sur la contre-verticale, pour avoir le centre de correction.

On connaît donc, dans les deux cas, pour chaque pile, la verticale B, la contre-verticale B' et, sur cette dernière, le centre de correction G ; par conséquent, on pourra réaliser le tracé graphique indiqué plus haut (v. n° 290).

Dans la pratique la poutre est toujours posée librement sur les culées, c'est pourquoi ces derniers seront toujours des foyers, desquels on déduira tous les autres.

Un encastrement, dont la pente serait bien calculée, permettrait, il est vrai, de réduire les moments fléchissants surtout dans la travée de rive. Mais, d'une part, il serait très difficile de réaliser cet encastrement sous l'angle calculé ; d'autre part on ne pourrait le maintenir sous cet angle qu'en exécutant autour de la poutre des maçonneries coûteuses et en noyant dans ces maçonneries d'assez grandes quantités de métal. C'est pourquoi l'on renonce aux encastrements sur les culées. Il est préférable de réduire la portée des travées de rive et, s'il y a des améliorations à apporter dans les représentatives des moments fléchissants, de chercher à les obtenir par des modifications dans les dénivellations des appuis intermédiaires.

295. **Solution algébrique simplifiée.** — *Equations de Bertot et Clapeyron.* — Dans le cas de la poutre homogène, à section constante, le théorème des trois moments fournit une équation dont la forme, très simple, a été donnée pour la première fois par les Ingénieurs **Bertot** et **Clapeyron**.

L'aire trapézoïdale MM'M'' des moments de correction, non eïfiés (v. plus haut fig. 276-II), donne sur la pile B les réactions suivantes :

Triangle G_1..... $\frac{Ml}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{Ml}{6}$;

Triangle G_2..... $\frac{M'l}{2} \times \frac{2}{3} = 2\frac{M'l}{6}$;

Triangle G_3..... $\frac{M'l'}{2} \times \frac{2}{3} = 2\frac{M'l'}{6}$;

Triangle G_4..... $\frac{M''l'}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{M''l'}{6}$.

Soit, en faisant la somme :

$$\frac{1}{6}[Ml + 2M'(l+l') + M''l'].$$

En substituant cette expression dans l'équation des trois moments (v. n° 291) et en remplaçant α et α' par les valeurs trouvées au numéro précédent, on obtient les équations suivantes : δ est à multiplier par EI (v. n° 295-*a*).

Charges P *et* P' *concentrées au milieu :*

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6}[Ml + 2M'(l+l') + M''l'] \\ + \frac{Pl^2 + P'l'^2}{16} + \delta EI \end{array} \right\} = 0.$$

Charges P *et* P' *uniformément réparties :*

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6}[Ml + 2M'(l+l') + M''l'] \\ + \frac{Pl^2 + P'l'^2}{24} + \delta EI \end{array} \right\} = 0.$$

Si l'on désigne par p et p' les charges par mètre courant, alors on a :

$$P = pl, \qquad P' = p'l',$$

et la formule (B) devient :

$$\text{(B')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6}[Ml + 2M'(l + l') + M''l'] \\ + \frac{pl^3 + p'l'^3}{24} + \delta EI \end{array} \right\} = 0.$$

Dans chacune de ces formules, si les trois appuis sont en ligne droite, le terme δEI s'annule et disparaît.

De plus, le terme en δ n'existant plus, on pourra simplifier ces formules en supprimant les facteurs qui sont communs aux dénominateurs.

On écrira ces équations pour chacun des appuis au-dessus desquels le moment n'est pas nul et l'on aura autant d'équations du premier degré qu'il en faudra pour déterminer les moments sur piles. Le problème sera donc résolu algébriquement.

§ 5. — Cas usuels des poutres continues

296. **Poutres, de niveau, à travées égales, uniformément chargées.** — Traitons, à titre d'exemple, le cas d'une poutre à cinq travées ; à cause de la symétrie, nous pouvons ne nous occuper que de la moitié de la poutre (fig. 279) ; nous n'avons donc représenté que trois appuis et deux travées et demie.

(*a*) **Travées indépendantes.** — La distance polaire adoptée est $d = 1/2\,l$, comme pour le funiculaire Collignon ; on sait que, dans ce cas, l'ordonnée maxima o_1m_1 des paraboles qui, en supposant les travées indépendantes, représenteraient les moments dus à la charge uniforme P, doit être prise égale à 1/4 P, mesuré à l'échelle des forces. Ces paraboles sont représentées en pointillé, ainsi que les représentatives des efforts tranchants correspondants, lesquelles sont les droites $x_0x'_1 - x_1x'_2 - x_2x'_3$ qui détachent, toutes, sur les verticales d'appui des segments égaux à la moitié, 1/2 P, de la charge de chaque travée.

Solidarisons les travées et cherchons comment seront modifiés les moments et les efforts tranchants.

(*b*) **Moments sur piles.** — On les calculera à l'aide de l'équation de Bertot et Clapeyron (v. n° 295, form. B). Elle s'écrit en y faisant

$$\delta = 0, \qquad P = P', \qquad l = l'.$$

$$\text{(C)} \qquad M + 4M' + M'' = -\frac{Pl}{2}.$$

La poutre étant libre sur les culées, on aura $M_0 = 0$, et $M_6 = 0$. De plus, à cause de la symétrie, on aura : $M_1 = M_5$ et $M_2 = M_3$; de sorte que les seules inconnues à calculer sont les moments M_1 et M_2.

Dès lors, écrivons l'équation C pour l'appui A_1 ; on y fera $M = 0$, $M' = M_1$ et $M'' = M_2$: elle deviendra

$$\text{(1)} \qquad 4M_1 + M_2 = -\frac{Pl}{2}.$$

Ecrivons l'équation (C) pour l'appui A_2 ; on y fera $M = M_1 \ldots\ldots M' = M_2$ et $M'' = M_3$ et puisque $M_3 = M_2$, on fera $M'' = M_2$; elle deviendra donc :

$$\text{(2)} \qquad M_1 + 5M_2 = -\frac{Pl}{2}.$$

En résolvant les équations (1) et (2) on obtient :

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = -\frac{4}{38}\,Pl \quad \text{avec} \quad M_1 = M_5, \\ M_2 = -\frac{3}{38}\,Pl \quad \text{avec} \quad M_2 = M_3. \end{array} \right.$$

(*c*) **Moments définitifs.** — On porte, négativement (fig. 279), de A_1 en M_1, de A_2 en M_2, etc... les moments sur piles qui viennent d'être calculés ; cela permet de tracer en A_0, M_1, M_2..... le polygone des moments de correction. Il

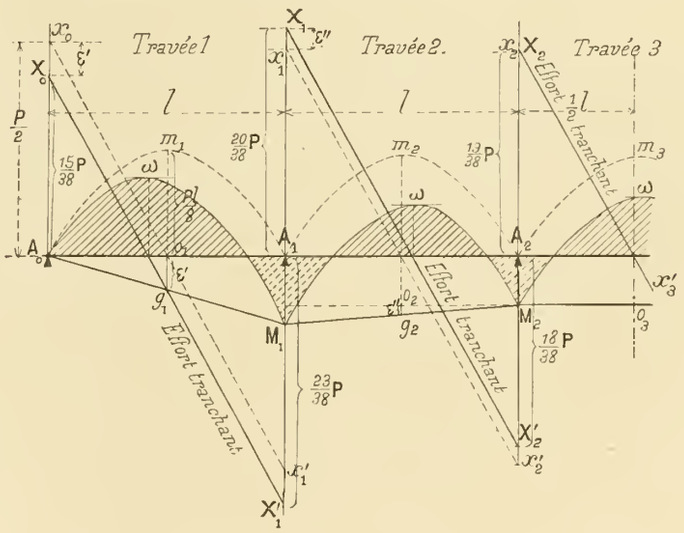


Fig. 279

ne reste plus qu'à descendre les paraboles primitives en les ajoutant analytiquement aux droites $A_0M_1 - M_1M_2$.... etc. de ce polygone. Les aires de moments sont indiquées par des hachures ; celles-ci sont pleines pour les moments positifs et pointillées pour les moments négatifs.

(*d*) **Efforts tranchants et réaction des appuis.** — Dans la première travée, la pente de la représentative de correction A_0M_1 est *négative* ; elle a pour expression $M_1 : l$; c'est-à-dire, en donnant à M_1 sa valeur tirée des formules (3), et en désignant cette pente par ε',

$$\varepsilon' = \frac{M_1}{l} = -\frac{4}{38}\,P.$$

La représentative primitive, x_0x_1', de l'effort tranchant, doit donc être *descendue* en $X_0X'_1$ de toute cette quantité ε'.

Nota. — Avec le tracé Collignon, nous avons vu (v. n° 47) que ε' était précisément égal au segment O_1g_1 intercepté sur la verticale milieu par la ligne de correction A_0M_1.

La réaction X_0 de la culée, qui était, tout d'abord, égale à 1/2 P est réduite de la quantité ε' ; on a donc finalement :

$$A_0X_0 = +\frac{15}{38}\,P \qquad \text{et} \qquad A_1X'_1 = -\frac{23}{38}\,P.$$

Dans la 2e travée la pente de la ligne de correction M_1M_2 est *positive* et elle a pour expression $(M_1 - M_2) : l$, c'est-à-dire en donnant à M_1 et à M_2 leurs valeurs tirées des formules (3) et en désignant cette pente par ε'',

$$\varepsilon'' = +\frac{1}{38}\,P.$$

Il faut donc *remonter* la représentative primitive $x_1x'_2$ en $X_1X'_2$, de toute la quantité ε'', ce qui donne

$$A_1X_1 = +\frac{20}{38}\,P \qquad \text{et} \qquad A_2X'_2 = -\frac{18}{38}\,P.$$

La réaction de la pile A est (v. n° 290-*e*) égale à la différence algébrique entre les efforts tranchants arrière et avant de cette pile ; on aura donc, pour cette réaction X_1,

$$X_1 = \frac{20+23}{38}\,P = \frac{43}{38}\,P.$$

D'une manière générale, sur l'épure, la réaction d'un appui s'obtient en mesurant, à l'échelle des forces, la distance X'_1X_1 qui sépare le point d'arrivée de la représentative des efforts tranchants de gauche et le point de départ de celle de droite. On pourrait calculer directement les réactions en appliquant la formule (2) du n° 290-*e*.

297. **Tableau résumé.** — Le tableau ci-dessous donne les réactions et les moments sur piles pour des poutres à travées égales, uniformément chargées et posées sur appuis en ligne droite. Il s'étend jusqu'à 9 travées, c'est-à-dire jusqu'à 10 appuis.

NOMBRE des appuis	N° 0.	N° 1.		N° 2.		N° 3.		N° 4.	
	X_0	X_1	M_1	X_2	M_2	X_3	M_3	X_4	M_4
(Signes)	+	+	—	+	—	+	—	+	—
2	$\frac{1}{2}$ P.	Comme le n° 0.		»	»	»	»	»	»
3	$\frac{3}{8}$ P.	$\frac{10}{8}$ P.	$\frac{1}{8}$ Pl.	Comme le n° 0.		»	»	»	»
4	$\frac{4}{10}$ P.	$\frac{11}{10}$ P.	$\frac{1}{10}$ Pl.	Comme le n° 1.		Comme le n° 0.		»	»
5	$\frac{11}{28}$ P.	$\frac{32}{28}$ P.	$\frac{3}{28}$ Pl.	$\frac{26}{28}$ P.	$\frac{2}{28}$ Pl.	Comme le n° 1.		Comme le n° 0.	
6	$\frac{15}{38}$ P.	$\frac{43}{38}$ P.	$\frac{4}{38}$ Pl.	$\frac{37}{38}$ P.	$\frac{3}{38}$ Pl.	Comme le n° 2.		Comme le n° 1. (etc...)	
7	$\frac{41}{104}$ P.	$\frac{118}{104}$ P.	$\frac{11}{104}$ Pl.	$\frac{100}{104}$ P.	$\frac{8}{104}$ Pl.	$\frac{106}{104}$ P.	$\frac{9}{104}$ Pl.	Comme le n° 2. (etc...)	
8	$\frac{56}{142}$ P.	$\frac{161}{142}$ P.	$\frac{15}{142}$ Pl.	$\frac{137}{142}$ P.	$\frac{11}{142}$ Pl.	$\frac{143}{142}$ P.	$\frac{12}{142}$ Pl.	Comme le n° 3. (etc...)	
9	$\frac{153}{388}$ P.	$\frac{440}{388}$ P.	$\frac{41}{388}$ Pl.	$\frac{374}{388}$ P.	$\frac{30}{388}$ Pl.	$\frac{392}{388}$ P.	$\frac{33}{388}$ Pl.	$\frac{386}{388}$ P.	$\frac{32}{388}$ Pl.
10	$\frac{209}{530}$ P.	$\frac{601}{530}$ P.	$\frac{56}{530}$ Pl.	$\frac{511}{530}$ P.	$\frac{41}{530}$ Pl.	$\frac{535}{530}$ P.	$\frac{45}{530}$ Pl.	$\frac{529}{530}$ P.	$\frac{44}{530}$ Pl.

Nota. — 1° Ce tableau ne donne les résultats que pour la première moitié de la poutre, l'autre moitié étant symétrique.

2° Si p est la charge par mètre courant, et si l est la longueur de chaque travée, on peut remplacer P par pl et Pl par pl^2.

3° Pour la culée n° 0, on suppose la poutre simplement posée ; le moment fléchissant y est donc nul ($M_0 = 0$).

§ 6. — Poutres en double potence

298. Poutre en double potence uniformément chargée. — On nomme ainsi une poutre reposant sur deux appuis avec encorbellements égaux de chaque côté des appuis (fig. 280-I).

(*a*) **Moments fléchissants.** — Soient L la longueur totale de la poutre ;

l la distance entre les appuis ;

l' la longueur de chaque encorbellement ;

p la charge par mètre courant.

On aura : $L = l + 2l'$ et la charge totale sera égale à pL. Enfin, en raison de la symétrie, les réactions X_0 et X_1, sur les appuis, seront égales entre elles et l'on aura :

$$X_0 = X_1 = \frac{pL}{2}.$$

Considérons les corbeaux extérieurs ; les moments fléchissants y sont représentés (fig. II) par une parabole dont l'ordonnée maxima CC′ ou BB′ correspond à l'appui et a pour valeur, mesurée à l'échelle des moments, $-1/2\, pl'^2$ (v. n° 209).

Quant à la représentative des moments entre B et C, si la poutre était coupée sur ses appuis, elle serait une parabole BGC passant par les appuis ; et cette parabole aurait son sommet à une hauteur égale à $+1/8\, pl^2$ (évaluée à l'échelle des moments) ; mais nous venons de voir que les moments en A et en B sont égaux à $-1/2\, pl'^2$. Il faudra donc descendre en B′IC′, de toute cette quantité, la parabole primitive des moments BGC, pour avoir la représentative définitive B′IC′ des moments fléchissants entre B et C. Dès lors, le moment M_{max} au milieu de la portée BC aura pour valeur

$$(1) \qquad M_{(max)} = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl'^2}{2} = \frac{p}{8}(l^2 - 4l'^2),$$

les moments sur les appuis restant égaux à $-1/2\, pl'^2$.

(*b*) **Disposition la plus favorable.** — Lorsque l'on est libre de faire varier le rapport de l à l' il y a intérêt à choisir ces longueurs de manière à rendre minimum le plus grand moment fléchissant développé dans la poutre ; et cette condition sera remplie lorsque les moments sur piles auront la même valeur que le moment au milieu de la portée BC, c'est-à-dire lorsque l'on aura

$$(2) \qquad \frac{p}{8}(l^2 - 4l'^2) = \frac{pl'^2}{2}$$

Cette équation résolue donne : $l' = \dfrac{l}{2\sqrt{2}}$, d'où

$$l' = 0{,}353l = 0{,}207\,L,$$

ce qui veut dire que, pour être dans les meilleures conditions, les corbeaux doivent avoir une longueur légèrement supérieure au tiers de la partie moyenne, c'est-à-dire au cinquième de la longueur totale.

Dans ces conditions, un calcul très simple ferait voir que

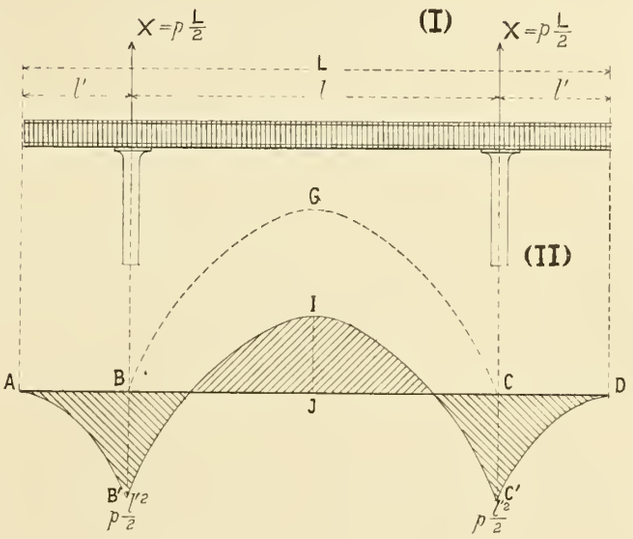


Fig. 280

le moment fléchissant maximum est environ six fois plus petit que si les appuis étaient placés aux extrémités en A et en D, et qu'il est exactement deux fois moindre que si la poutre n'était chargée qu'entre les points B et C.

299. Poutre surchargée à ses extrémités. — Les résultats qui précèdent justifient les dispositions, si usitées au Moyen Age et à la Renaissance, de maisons en encorbellement sur les rues (fig. 281) ; seulement, dans ce dernier cas, les extrémités des poutres supportent en général le mur de face dont la surcharge vient s'ajouter, comme ferait un poids isolé, à la charge continue due au plancher. Il est facile, connaissant cette charge isolée, de calculer, comme tout à l'heure, la meilleure proportion à donner à l'encorbellement. Soient :

Q la charge totale transmise aux extrémités des deux corbeaux, chacun d'eux ne prenant que $1/2\,Q$;

$P = pL$, la charge totale, uniformément répartie, que le plancher transmet à la totalité de la poutre ;

$K = Q : P$ le rapport de ces deux charges totales.

La partie milieu, dont la longueur est l, ne reçoit qu'une fraction $P' = P \times \dfrac{l}{L}$ de la charge du plancher, tandis que chaque corbeau reçoit la fraction $P'' = P \times \dfrac{l'}{L}$.

Le moment M_0 produit par chaque corbeau au-dessus de son appui est:

$$M_0 = P''\frac{l'}{2} + \frac{Q}{2}l' = \frac{l'}{2}\left[\frac{Pl'}{L} + Q\right].$$

Le moment M' au milieu de la poutre, si cette dernière était coupée au-dessus des appuis, serait

$$M' = P'\frac{l}{8} = \frac{Pl^2}{8L}.$$

Pour être dans les meilleures conditions il faut que

$$M' = 2M_0.$$

Dans cette relation, remplaçons M_0 et M' par leurs valeurs ci-dessus, elle devient :

$$(1) \qquad \frac{Pl^2}{8L} = \frac{Pl'^2}{L} + Ql'.$$

Divisons les deux membres par PL et remplaçons le rapport Q : P par K ; chassons le dénominateur 8 ; il vient

$$8\frac{l'^2}{L^2} + 8K\frac{l'}{L} - \frac{l^2}{L^2} = 0.$$

Posons $x = \frac{l'}{L}$; et remarquons que l'on a

$$l = L - 2l', \qquad \text{d'où} \qquad \frac{l}{L} = 1 - 2x;$$

Mettons ces valeurs dans l'équation (1) ; elle s'écrit :

$$8x^2 + 8Kx - (1 - 2x)^2;$$

développant, réduisant, elle devient :

$$(2) \qquad x^2 + 2x(0,5 + K) - 0,25 = 0.$$

Telle est l'équation qui donnera le rapport $x = l' : L$ le plus avantageux ; ses racines sont réelles, puisque le dernier terme est négatif : l'une d'elles est positive et l'autre est négative ; la première seule convient et elle a pour expression :

$$(3) \qquad x = \frac{l'}{L} = -(0,5 + K) + \sqrt{(0,5 + K)^2 + 0,25}.$$

300. **Application numérique.** — (*a*) **Données.** — On veut établir, au premier étage d'une construction, un grenier à blé (fig. 281) de 8^m de largeur ; son plancher DE sera construit à travures composées et ses poutres (fig. II) seront espacées de 3^m ($\delta = 3^m$) : il pourra supporter, *par mètre carré*, une charge totale de 1000^k, ainsi décomposée :

1° Poids dû au poutrage (v. 231)	84^k
2° Poids dû au solivage (v. 219)[*b*] 17×3.	51
3° Poids dû au garnissage (id.)	200
4° Surcharge de blé en tas (id.)	600
Total par m^2 de plancher	935^k
Soit en forçant	1000^k

Le comble D'E' de l'étage supérieur pèsera 150^k par m^2, y compris une faible surcharge prévue pour la neige.

Les murs, ou les pans de bois, qui reporteront son poids sur les poutres pèseront 140^k par m^2; leur hauteur sera de 4^m. On demande :

1° Quelle doit être la longueur l' de l'encorbellement pour avoir une poutre dans les meilleures conditions possibles ;

2° Quel sera l'équarrissage de cette poutre.

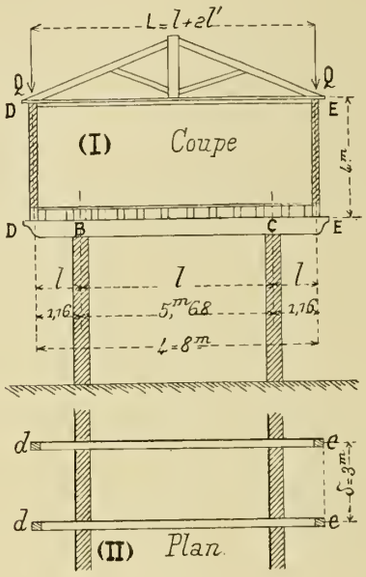


Fig. 281

1° *Charge totale* P *du plancher.*

Plancher...	Par m^2	1000^k	..... 24000^k
	Longueur.....	8	
	Espacement....	3	

2° *Charge totale* Q *des corbeaux.*

Comble....	Par m^2	150^k	3600	6960^k
	Longueur	8		
	Espacement ...	3		
Murs	Par m^2	140	3360	
	Hauteur (2×4)	8		
	Espacement .	3		

$$K = \frac{Q}{P} = \frac{6960}{24000} = 0,29.$$

(*c*) **Calcul des longueurs.** — Substituons cette valeur de K dans l'équation du second degré du numéro précédent, ou plutôt dans l'expression (3, n° 299) de la racine, nous obtenons

$$x = -0,79 + \sqrt{0,79^2 + 0,25}, \qquad \text{d'où}$$

$$x = \frac{l'}{L} = 0,145, \qquad \text{on en déduit}$$

$$l' = 1^m,16 \qquad \text{et} \qquad l = 5^m,68.$$

(*d*) **Comparaisons.** — Le moment maximum est aussi bien M_0, sur la pile, que M_1 au milieu de la portée; il résulte de la théorie précédente que sa valeur est *la moitié* de

ce qu'elle serait si la poutre avait une longueur l et si elle reposait librement sur les appuis. On aura donc

$$M_0 = \frac{1}{16} p l^2,$$

p étant la charge par mètre courant de poutre. Si les murs avaient été placés aux extrémités, c'est-à-dire à une distance L, le moment maximum M″ eût été

$$M'' = \frac{1}{8} p L^2,$$

on aura, en prenant le rapport de M_0 à M″ et en remarquant que $l = 5{,}68$ et $L = 8{,}00$

$$\frac{M_0}{M''} = \frac{1}{2} \times \frac{l^2}{L^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{5{,}68}^2}{\overline{8{,}00}^2} = 0{,}252.$$

L'amélioration est donc considérable.

(*e*) **Dimensions des poutres.** — Dans le cas actuel, en faisant dans l'expression précédente de M_0,

$$p = 3000^k, \quad \text{et} \quad l = 5^m{,}68, \quad \text{on aura :}$$

$$M_0 = \frac{3000 \times \overline{5{,}68}^2}{16} = 6049^{km}.$$

Nous supposerons que la poutre est en bois. L'équation d'équarrissage donne en prenant pour résistance de sécurité $R = 600\,000$, et en appelant a et b les dimensions de la section droite

$$\frac{M}{R} = \frac{6049}{600000} = \frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}, \qquad \text{d'où}$$

$$ab^2 = 0{,}06049.$$

Si nous adoptons l'équarrissage normal $b^2 = 2a^2$ (v. n° 234), en substituant, il vient :

$$2a^3 = 0{,}06049, \qquad \text{d'où} \qquad a^3 = 0{,}030245, \qquad \text{et}$$

$$\text{Equarrissage..} \begin{cases} a = \ldots\ldots\ 0{,}312, \\ b = a\sqrt{2} = 0{,}441, \\ D = a\sqrt{3} = 0{,}540. \end{cases}$$

D est le diamètre de l'arbre dans lequel il faudrait débiter la poutre.

(*f*) **Nota.** — En refaisant un calcul analogue pour le cas où la poutre aurait eu 8^m de portée, sans encorbellements, on trouverait des dimensions d'équarrissage 1,584 fois plus fortes et un cube de bois 3,968 fois plus grand. (1,584 est la racine cubique de l'inverse du nombre 0,252 trouvé ci-dessus (*d*) pour le rapport de M_0 à M″). Cela conduirait, on le voit, à des bois tout à fait hors mesure, $D = 0^m{,}855$.

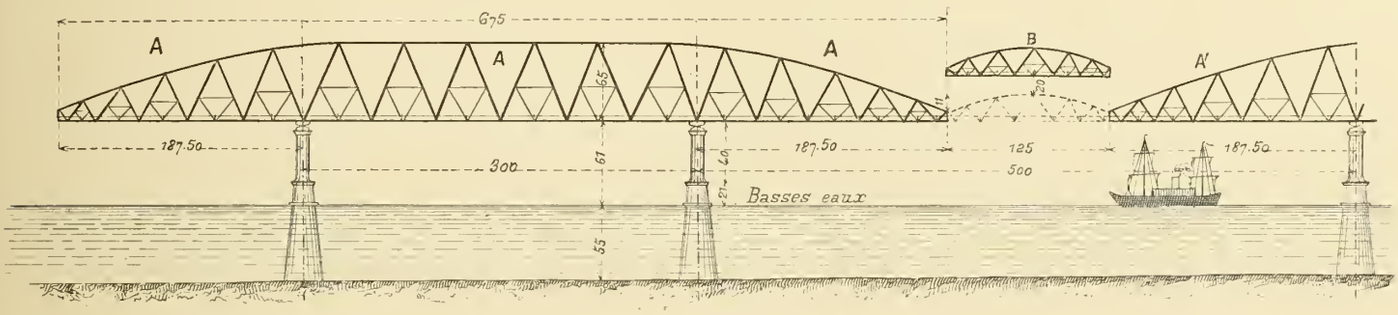


Fig. 282

301. **Projet de pont sur la Manche.** — Le principe des poutres en double potence a été appliqué dans le projet gigantesque étudié par les Ingénieurs du **Creusot** pour le pont à construire au-dessus du **Pas-de-Calais** (fig. 282). Une grande poutre A, de 675^m de longueur, de 65^m de hauteur au milieu, de 11^m de hauteur à ses extrémités, reposera sur deux piles distantes entre elles de 300^m. Elle débordera donc, en porte-à-faux, de $187^m{,}50$ à gauche et à droite de ces piles. Une poutre analogue A′ sera construite de la même manière ; il restera entre les deux un espace libre de 125^m qui sera franchi par une poutre *indépendante* B reposant librement sur les extrémités des deux grandes poutres A et A′ ; dans ces conditions les travées seront alternativement de 300^m et de 500^m.

La fig. 282 fait connaître les principales dimensions du projet de MM. **Schneider** et **Hersent**. Le pont du Forth, de 518^m de portée, a été construit sur un principe analogue.

Le système de ponts en double potence permet donc de franchir des espaces considérables. Un de ses avantages est de pouvoir supporter de légers tassements sans que ses conditions statiques soient changées ; dans une poutre continue, au contraire, le moindre tassement d'une pile entraîne des modifications profondes dans les moments fléchissants et dans les efforts tranchants, ce qui peut la mettre en danger.

° CHAPITRE VIII

POUTRE CONTINUE. — SURCHARGES DÉFAVORABLES

§ 1. — Préliminaires

302. — **Position de la question.** — On se propose, connaissant la nature et l'intensité des surcharges susceptibles d'agir sur une poutre continue, d'étudier les combinaisons à réaliser avec elles, sur les différentes travées, pour obtenir les moments fléchissants et les efforts tranchants les plus grands en chaque point. Voici la marche que nous suivrons :

1° Nous supposerons que toutes les travées, *sauf une seule*, la quatrième par exemple, sont libres de toute charge, même de leur poids propre (fig. 283).

2° Sur la travée considérée, nous ferons agir toutes les surcharges qu'elle peut avoir, à un instant donné, à supporter.

3° Nous opérerons de même pour chaque travée ; après quoi ;

4° Nous prendrons toutes les combinaisons possibles des travées ainsi chargées ou, plutôt, toutes les combinaisons les plus défavorables ; nous ajouterons analytiquement les représentatives qui leur seront dues et les enveloppes des contours ainsi obtenus nous donneront les représentatives les plus défavorables ; c'est en se basant sur elles que nous calculerons les dimensions de la poutre en chaque point.

303. **Effets produits par une seule travée chargée.** — (*a*) **Moments de** *répercussion* **dans les travées vides.** — On rappelle (v. n° 290) que, si l'on connaît le Foyer F d'une travée, pour avoir son correspondant F′ dans la travée contiguë il faut joindre le premier foyer au centre de correction G de l'appui intermédiaire et prendre son point de rencontre F′ avec la focale suivante. Le centre de correction est situé sur la contre-verticale et sa hauteur, H, est donnée par la formule connue (v. n° 286-*d*)

$$\frac{H}{\mu} = \frac{\alpha + \alpha' + \gamma}{\Phi + \Omega_1},$$

dans laquelle α et α' sont les pentes que prendraient sur l'appui les élastiques dues aux charges, en supposant la poutre coupée sur les appuis ; γ est la pente de dénivellation, μ est un moment unitaire arbitrairement choisi ; Φ et Ω_1 sont les pentes des élastiques μ, c'est-à-dire des élastiques que le moment μ, supposé appliqué d'une manière générale sur toute la poutre, ferait prendre à sa fibre neutre au-dessus de l'appui.

Par conséquent, s'il n'existe pas de charges, α et α' sont nuls ; si les appuis sont en ligne droite, γ est nul, le numérateur du second membre est donc nul et il en est de même de la hauteur H.

En résumé : le centre de correction de toute pile qui sépare deux travées non chargées et de niveau est à une hauteur nulle, c'est-à-dire se confond avec le pied de la contre-verticale.

Cela étant établi, supposons (fig. 283) que nous ayons une poutre continue à 7 travées, c'est-à-dire à 8 appuis de niveau et que une seule de ces travées, la quatrième par exemple, soit chargée d'une manière quelconque.

Pour plus de généralité nous admettons que la poutre est encastrée horizontalement (c'est-à-dire sous un angle d'encastrement nul $\gamma_0 = 0$), sur la culée A_0, tandis qu'elle est librement posée sur la culée A_7.

Nous savons dès lors que, dans la travée de rive n° 1, le pied f_1 de la trisectrice de gauche est un foyer, car le moment trisecteur correspondant (v. n° 288) a pour valeur

$$N = \frac{\alpha_0 + \gamma_0}{\Omega_1}.$$

Or $\alpha_0 = 0$ puisque la travée de rive n'est pas chargée, $\gamma_0 = 0$ puisque l'encastrement est horizontal ; donc $N = 0$.

Dans la travée d'extrémité n° 7, c'est la culée A_7 qui est un foyer.

Ainsi donc, à gauche comme à droite de la travée chargée, il existe un foyer f_1 et un foyer f_7 de hauteur nulle. Rai-

° *Ce chapitre intéresse surtout les Ingénieurs.*

sonnons en partant de l'un d'eux, f_1 par exemple, qui est le foyer de gauche de la travée n° 1.

Pour avoir le foyer de gauche de la travée n° 2, on joindra le point f_1 au centre de correction de l'appui A_1; mais comme ce centre est à une hauteur nulle, la ligne ainsi menée sera l'horizontale A_0A_1 et sa rencontre avec la focale de gauche de la travée n° 2 donnera le pied f_2 de cette focale *de gauche*. Il en sera de même, tant que nous aurons des appuis dont les centres de correction seront à des hauteurs nulles.

Du côté droit, la culée A_7 sera le dernier foyer, et aussi les pieds f'_6 et f'_5 de toutes les focales *de droite* de chaque travée.

Par conséquent, supposons que nous ayons trouvé en M_3 et M_4 (nous dirons comment, v. n° 304) les moments sur piles de la seule travée chargée (travée n° 4), les moments de *répercussion* dans les travées non chargées seront figurés, *à gauche*, par la ligne brisée $M_3M_2M_1M_0$ et *à droite* par la ligne brisée $M_4M_5M_6A_7$.

Ces lignes brisées vont d'un pied à l'autre des focales, en se retournant sur les verticales d'appui.

La fig. 283 nous conduit à faire les remarques suivantes.

(*b*) **Remarques.** — 1° Les moments sur piles M_3 et M_4 de la travée qui est seule chargée sont toujours négatifs.

2° Sur les autres piles ils sont successivement positifs et

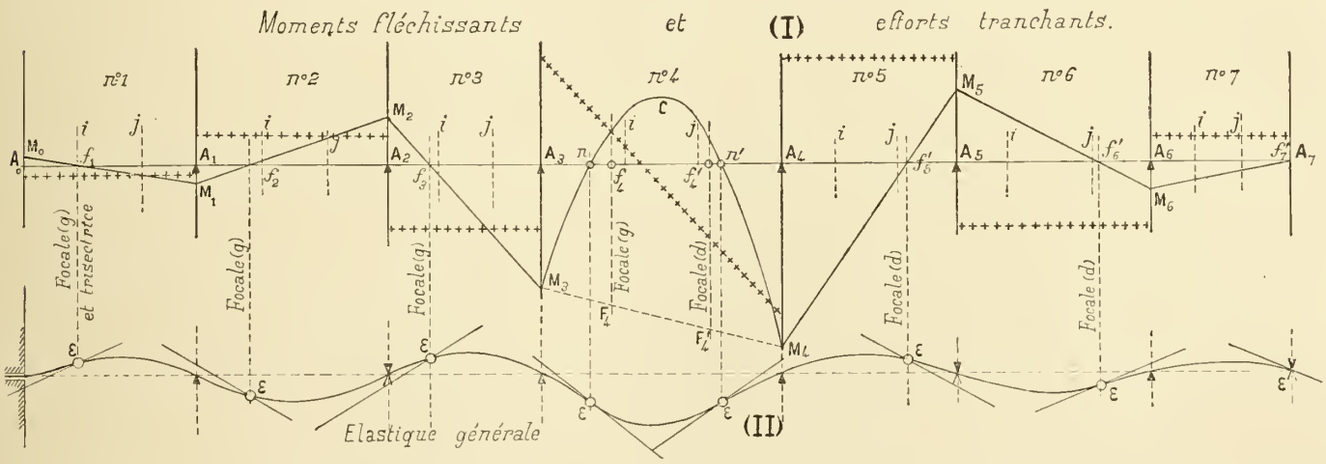


Fig. 283

négatifs, ce qui entraîne que ces appuis jouent alternativement le rôle de *supports* et *d'ancrages*.

3° En valeur absolue, les moments sur piles décroissent très rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la travée chargée, ce qui tient à ce que les focales sont toujours comprises entre les appuis et les trisectrices eïfiées. Si la poutre est à section constante, ces trisectrices sont placées au tiers de chaque travée, par conséquent le rapport de deux moments sur piles consécutifs est toujours plus petit que 1/2 et l'on peut dire, dans ce cas, que les moments sur piles décroissent plus vite que les termes d'une progression géométrique dont la raison serait égale à 1/2.

En résumé, les moments produits dans la travée qui est seule chargée se *répercutent* dans les autres suivant des représentatives rectilignes qui forment comme une sorte d'onde, allant en s'affaiblissant extrêmement vite, si bien, qu'au delà de la troisième ou quatrième travée elle n'est presque plus sensible.

4° Dans la travée chargée, les points n et n', où la représentative des moments recoupe l'axe des x, ne se confondent pas avec les pieds f_4 et f'_4 des focales. Nous démontrerons plus loin (v. n° 305) qu'ils sont toujours compris entre les appuis et les focales.

En ces points ε, ε (fig. II) l'élastique présentera une inflexion, puisque le moment fléchissant y sera nul. C'est pourquoi nous les nommerons les *points d'inflexion* de la travée chargée.

5° Dans les travées non chargées, aux foyers f_3, f_2, f_1, etc... répondront aussi (fig. II) des points d'inflexion ε, ε, ε de l'élastique. C'est pourquoi quelques Auteurs donnent également aux points f_1, f_2, f_3..... le nom de *points d'inflexion* de chaque travée ; cela peut donner lieu, suivant nous, à quelque confusion, c'est pourquoi nous adopterons les dénominations suivantes.

(*c*) **Définitions.** — Les points tels que f_1, f_2, f_3..... seront les *points focaux de gauche*, f'_4, f'_5, f'_6..... seront les *points focaux de droite*.

Les *points d'inflexion*, n ou n' d'une travée seront les points pour lesquels le moment fléchissant est nul, en supposant cette travée chargée autant qu'elle pourra jamais l'être (poids propre et surcharge maxima réunis), toutes les

autres ne supportant aucune charge, même pas leur poids propre.

(*d*) **Efforts tranchants de *répercussion* dans les travées vides.** — L'effort tranchant est toujours donné, en grandeur et en signe, par la *pente vraie* de la représentative des moments. Or ces représentatives dans les travées vides sont des lignes droites qui possèdent, par conséquent, une pente constante. Il en résulte que :

1° *A gauche :* dans la travée qui précède l'unique travée chargée, la représentative des efforts tranchants de *répercussion* est une horizontale négative ; il en est de même dans toutes celles qui la précèdent de deux en deux. Dans toutes les autres elles sont positives ;

2° *A droite :* dans la travée qui suit immédiatement l'unique travée chargée, la représentative des efforts tranchants de *répercussion* est une horizontale positive et il en est de même dans toutes celles qui la suivent, de deux en deux. Elle est négative dans toutes les autres.

Sur la fig. 283, les efforts tranchants sont figurés par des lignes en traits croisés.

304. **Moments de correction de la travée qui est seule chargée.** — (*a*) **Premier tracé, par les centres de correction.** — On connaît, fig. 284, les centres de correction G_3 et G_4 de chacune des piles de la travée, ainsi que ses focales, f_4 et f'_4 ; par conséquent (v. n° 290) :

1° On joint le point focal de gauche f_2, de la travée précédente, au centre G_3 et on prolonge jusqu'en F_4, à la rencontre de la focale de gauche f_4, ce qui donne en f_4F_4 le moment focal de gauche ;

2° On joint, de même, le point focal de droite, f'_5, de la travée suivante au centre G_4 et on prolonge jusqu'en F'_4 à la rencontre de la focale de droite f'_4, ce qui donne en $f'_4F'_4$ le moment focal de droite ;

3° On joint enfin les deux moments focaux, ce qui donne en $F_4F'_4$ la droite représentative des moments de correction, laquelle, prolongée jusqu'aux verticales d'appui, donne en M_3 et en M_4 les moments sur piles.

Nota. — Pour la recherche des hauteurs des deux centres de correction G_3 et G_4, il faut faire bien attention, si l'on applique la construction expliquée plus haut (v. n° 286 — fig. 267) de remarquer : 1° qu'une seule travée est chargée et que le segment n° 1 de la *sécante* μ qui donne la hauteur de centre n'est à prendre qu'entre la ligne BC (fig. 267-IV) et la tangente BT′ de l'élastique de la travée chargée ; 2° que le segment n° 2 (fig. 267-V) est nul puisque la pente de dénivellation, γ, est nulle.

Ce premier tracé est très simple ; néanmoins nous allons en donner un second qui aura surtout de la valeur par les conséquences théoriques importantes que nous en déduirons.

(*b*) **Second tracé, par les moments limites.** — On va se proposer de trouver directement un quelconque des moments focaux sans se servir du centre de correction. Raisonnons pour le moment focal de gauche.

Remarquons, d'abord, qu'il est indépendant des travées de droite n° 5, n° 6 et n° 7. Si ces dernières étaient chargées d'une manière quelconque, comme ces charges auraient pour effet de modifier le centre de correction G_4, ainsi que tous ceux qui le suivent, G_5, G_6. . . ., sans rien changer au centre G_3, non plus qu'à tous ceux qui le précèdent G_2, G_1. . . . ., cela ne modifierait pas la ligne f_2G_3, ni, par conséquent, la position du foyer de gauche F_4, c'est-à-dire la grandeur du premier moment focal de correction.

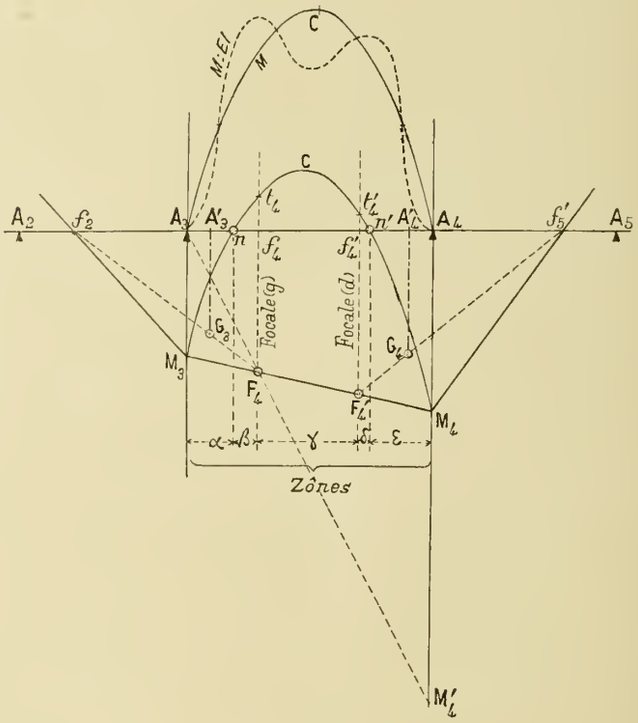


Fig. 284

Or (même fig. 284), joignons A_2F_4 et prolongeons en M'_4 jusqu'à la rencontre avec la verticale de l'appui A_4 ; nous pouvons imaginer que les charges exercées sur les travées de droite soient telles que le moment sur la pile A_4 soit précisément représenté par $A_4M'_4$. S'il en était ainsi, le moment sur la pile M_3 serait nul et par suite, aussi, tous les moments sur toutes les travées de gauche. Autrement dit, la poutre resterait droite sur toutes les travées de gauche, et elle aurait une tangente horizontale au-dessus de l'appui A_3, avec un moment nul sur cet appui.

Appelons le *moment limite* de la pile A_4 et désignons par M'_4 le moment qui réaliserait tout cela. Nous pouvons donc dire :

Définition du moment limite. — « Si l'on considère une

« travée seule, le *moment limite* d'une de ses piles est celui « qui, appliqué au-dessus de cette pile tandis que l'autre « pile n'en supporterait aucun, détruirait sur cette dernière « la pente de l'élastique que la poutre, *supposée coupée au-* « *dessus des appuis*, aurait prise sous l'influence des charges « qui agissent sur la travée considérée. »

Son emploi pour déterminer les moments focaux. — Connaissant ce moment limite d'un appui, en joignant l'extrémité de son ordonnée à l'appui opposée, on aura, par recoupement avec la focale, le moment focal de correction cherché.

Nous donnons plus loin (v. n° 306) le tracé des moments limites : nous allons d'abord utiliser les notions acquises à leur égard pour démontrer le théorème suivant, très important.

305. **Théorème des points d'inflexion.** — (*a*) **Lemme.** — « Si une *charge unique* agit dans une travée d'une poutre « continue, de section variable ou constante, à appuis de « niveau, encastrée horizontalement ou non encastrée à ses « extrémités, toutes les autres travées étant vides :

« 1° Le moment focal de correction, lequel est négatif, « est toujours plus petit en valeur absolue que le moment « focal de charge, lequel est positif ;

« 2° Le moment focal définitif est toujours positif, et

« 3° Les points d'inflexion de la travée sont placés entre « les piles et la focale correspondante. »

En effet : soit AcB (fig. 285-I), obtenu comme on sait (v. n° 273), le triangle représentatif des moments dus à une charge unique concentrée, qui serait appliquée au point C. Prolongeons le côté Ac jusqu'en D, sur la verticale d'extrémité et, considérant BD comme un moment appliqué sur la pile B, l'autre extrémité A étant libre, cherchons à construire la pente δ_0 que ce moment BD imposerait à l'élastique au-dessus de l'appui A.

Il faudrait pour cela eïfier le triangle AcD, ce qui donnerait, par exemple, l'aire curviligne Ac_1D_1, et chercher ensuite la réaction de cette aire sur l'appui A ; on sait que cette réaction serait précisément δ_0. Notre épure ne l'indique pas.

Cherchons, de même, la pente α_0 que les moments représentés par le triangle AcB imposeraient à l'élastique sur la pile A. Il faudrait eïfier le triangle AcB et chercher la réaction α_0 de cette aire eïfiée. Mais lorsque nous eïfierons le côté Ac de ce triangle, nous retrouverons la même courbe Ac_1, et l'eïfication du côté CD donnera une courbe C_1B qui sera logée tout entière dans l'intérieur de la grande courbe Ac_1D_1.

En définitive, l'aire eïfiée Ac_1B sera égale à l'aire Ac_1D_1, diminuée de l'aire c_1D_1B et, par conséquent, sa réaction α_0 sera plus petite que la réaction δ_0 du triangle eïfié Ac_1D_1.

Il résulte de là que le moment limite M', c'est-à-dire celui qui, appliqué sur la pile B, produirait sur l'autre pile A la même pente α_0 que la charge concentrée qui nous est

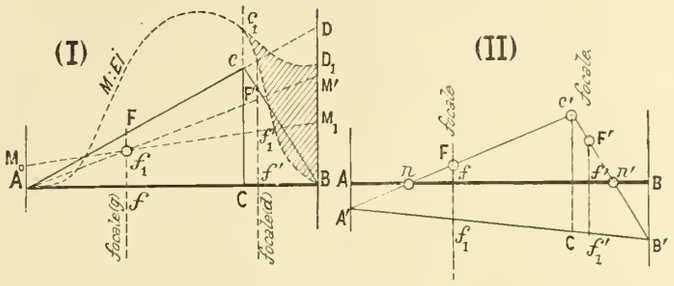


Fig. 285

donnée devra être inférieure à BD ; par conséquent, lorsque nous joindrons le point M' représentatif de ce moment limite au point A pour avoir, sur la focale fF, le moment focal de correction ff_1, cette ligne M'A sera située tout entière au-dessous de la ligne cA. Elle donnera donc sur la focale un moment focal de correction ff_1 qui sera plus petit que le moment focal de charge fF, ce qui démontre la première partie du lemme.

Il en sera de même pour les autres moments focaux ; on aura

$$f'f'_1 < f'F'_1.$$

La seconde partie est évidente.

Quant à la troisième partie elle résulte de ce que la représentative définitive A'C'B' (fig. 285-II) s'obtient en retranchant algébriquement le triangle AcB (de la fig. I) du trapèze ABB'A' (de la fig. II) ; et, puisque le moment focal de charge f_1F est plus grand, en valeur absolue, que le moment focal de correction ff_1, il en résulte que le moment focal définitif fF sera positif, ce qui entraîne que le point d'inflexion n soit compris entre l'appui A et la focale f. C. Q. F. D.

Ce qui vient d'être dit s'applique évidemment à l'autre point d'inflexion n'. Démontrons maintenant le théorème.

(*b*) **Théorème.** — « Les points d'inflexion d'une travée « chargée *d'une manière quelconque*, toutes les autres étant « vides, sont toujours compris entre l'appui et la focale cor- « respondante. »

En effet, nous pouvons décomposer une charge quelconque, continue ou non, en un nombre plus ou moins grand de charges isolées. Chacune de ces charges isolées donnera lieu à des moments focaux définitifs qui seront positifs tandis que les moments sur piles seront négatifs. En ajoutant tous ces effets, il en résultera en f_1f_1 ou $f'_1f'_1$ (fig. 284) un moment focal total positif tandis que le moment total sur pile sera négatif. Cela entraîne forcément, puisque la courbe des moments de charges est toujours convexe vers le haut, que le point d'inflexion n ou n' soit compris entre l'appui et la focale. C. Q. F. D.

(*c*) **Les cinq zônes de toute travée.** — En résumé, si l'on considère une travée quelconque (fig. 284) chargée autant qu'elle pourra jamais l'être, tant sous l'influence de son poids propre que de la surcharge maxima qu'elle pourra subir, toutes les autres travées étant vides, tous les appuis étant en ligne droite, la section étant constante ou variable, les culées étant libres ou encastrées, pourvu que ce soit horizontalement, ce qui veut dire que les pentes d'encastrement y sont nulles, cette travée pourra se diviser en cinq zônes, savoir (Suivre sur la fig. 284) :

La zône extrême, de gauche, dite *zône* α, comprise entre la pile d'origine et le premier point d'inflexion ;

La zône intermédiaire, de gauche, dite *zône* β, comprise entre le premier point d'inflexion et le premier point focal ;

La zône moyenne, dite *zône* γ, comprise entre les deux points focaux ;

La zône intermédiaire de droite, dite *zône* δ, comprise entre le second point focal et le second point d'inflexion ;

La zône extrême de droite, dite *zône* ε, comprise entre le second point d'inflexion et la pile d'extrémité.

Les surcharges produiront des effets très différents sur chacune de ces zônes, ainsi que nous le verrons plus loin.

§ 2. — Effets produits sur une seule travée chargée

306. **Détermination des moments limites et des moments focaux pour une poutre à section variable.** — 1° On prend un moment unitaire quelconque μ (fig. 286-I). On en déduit (v. n° 196) le rectangle unitaire eïfié de la travée et le funiculaire $\widetilde{\Phi\Omega}$, qui, on le sait, est toujours un trapèze. On complète en AA'B'B le rectangle sur ce funiculaire et la diagonale AB' de ce rectangle fait connaître la pente φ de l'élastique que le moment μ, appliqué sur un seul des appuis, aurait fait prendre à la fibre neutre sur l'autre appui. Le tout est fait en employant des coefficients d'échelle d, d' et d''.

2° On connaît la représentative AMB (fig. II) des moments sur la travée supposée libre ; on en déduit en A — M : EI — B la représentative de ces mêmes moments eïfiés ; on construit un funiculaire sur l'aire de ces moments eïfiés et on en déduit, avec les mêmes coefficients d'échelle d, d' et d'' que ci-dessus, la pente α_0 de l'élastique de charge, sur un des appuis, celui de gauche par exemple.

Cela fait, il est évident que le *moment-limite* M' est au moment unitaire μ, comme la pente α_0 qu'il a pour fonction de détruire est à la pente φ que le moment μ peut produire ; d'où la construction suivante :

3° On mène en SS' une *sécante* μ, c'est-à-dire une verticale sS (fig. I) interceptant la longueur μ entre les deux côtés de l'angle φ ; on prolonge cette sécante (fig. II) jusque dans l'angle α_0 et la longueur S'm' qu'elle y intercepte représente le *moment-limite* cherché M'.

Pour obtenir le moment focal de gauche, on porte en BM' (fig. II), sur la verticale d'extrémité, la longueur S'm' ainsi trouvée ; on joint M' au point d'origine A et la rencontre avec la focale donne en fF le moment focal de gauche.

On opère de même pour obtenir le moment-limite de gauche M'', duquel on déduit ensuite le moment focal de droite f'F'.

Connaissant les moments focaux fF et f'F', on joint les points F et F', ce qui donne en M_0 et en M_1 les moments de correction sur pile. La droite M_0M_1 est la représentative des moments de correction.

On ajoute analytiquement cette droite et la première

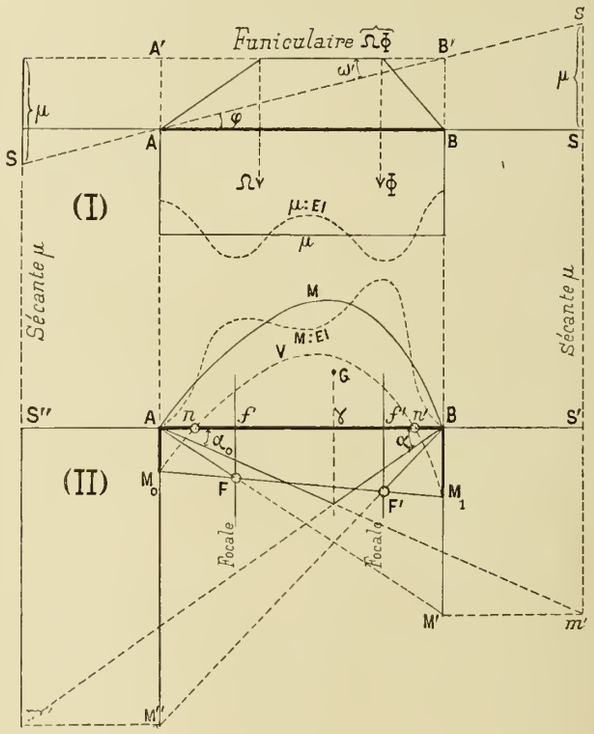


Fig. 286

courbe, AMB, des moments, ce qui donne en M_0VM_1 la représentative des moments pour la travée considérée, en la supposant *seule chargée*. Sa rencontre en n et en n' avec la base donne les *points d'inflexion* de la travée.

307. **Même question pour une poutre à section constante.** — (*a*) **La charge est quelconque.** — La construction

se simplifie, car il est inutile d'ériger les aires de moments. Soit (fig. 287) AMB l'aire des moments naturels; G son centre de gravité et h la force fictive qui, en prenant pour base de réduction $d' = 1/2\,l$, serait équivalente à l'aire des moments; la force fictive h est appliquée au centre de gravité G de cette aire. Soit x la distance de la verticale du point G à l'appui B.

L'élastique de charge aurait pour pente α_0, sur l'appui A, la réaction de cette force fictive; ce qui veut dire, en écrivant que la somme des moments par rapport à l'appui B est nulle, que l'on a la relation

$$\alpha_0 l + hx = 0. \tag{1}$$

Soit M′ le moment limite de l'appui B; il donne lieu à

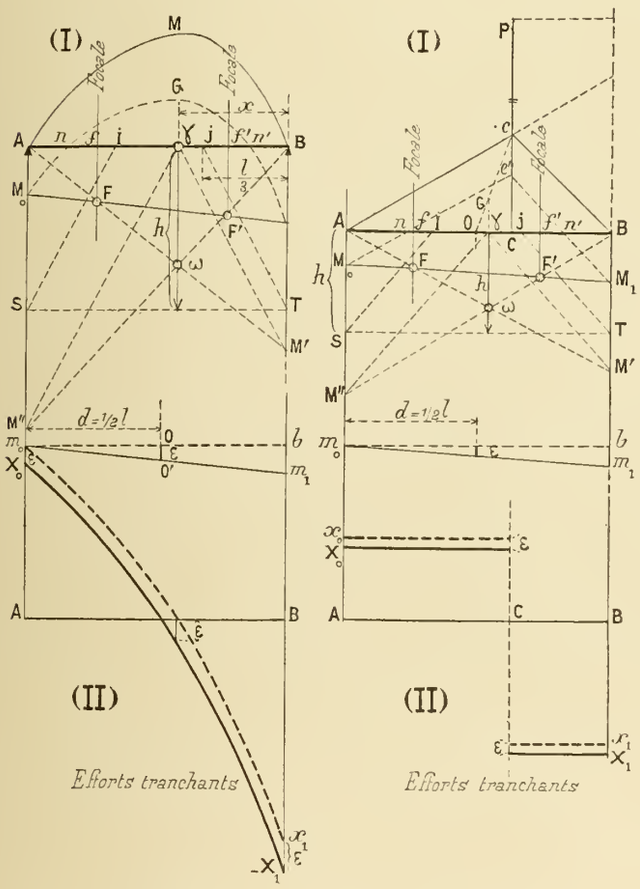


Fig. 287 Fig. 288

une aire triangulaire dont la force fictive d'équivalence h' sera, en prenant la même base de réduction $d' = 1/2\,l$,

$$h' = M'$$

et qui sera appliquée sur la trisectrice de droite. Or, par définition, ce moment limite doit donner sur l'appui A la même pente d'élastique, α_0; on aura donc une équation analogue

$$\alpha_0 l + M'\frac{l}{3} = 0. \tag{2}$$

Comparant les équations (1) et (2) on tire

$$\frac{M'}{h} = \frac{x}{l/3}. \tag{3}$$

D'où le tracé suivant qui n'est que la réalisation évidente de l'équation (3).

1° Ayant choisi une base de réduction $d' = 1/2\,l$, on représente l'aire des moments de charge par une force d'équivalence h, dirigée suivant la verticale du centre de gravité G de cette aire. Soit γ le pied de cette verticale.

On a vu plusieurs fois (n° 182, etc.) comment un funiculaire Collignon donnait tous ces éléments.

2° On porte cette hauteur h sur chacune des verticales d'appui, ce qui donne des points S et T que l'on joint par des droites aux pieds I et J des trisectrices qui en sont les plus voisines.

3° Par le point γ, établi ci-dessus, on mène des parallèles aux droites précédentes. Ces lignes détachent sur les verticales d'appui des longueurs qui, à l'échelle voulue, sont égales aux moments limites M′ et M″.

4° On joint par des droites chacun des appuis aux extrémités M′ et M″ des ordonnées de ces moments limites et les droites ainsi tracées détachent sur les focales des longueurs Ff et F′f' qui, à l'échelle voulue, sont égales aux moments focaux. Les droites M′A et M″B se nomment *les lignes en croix*.

Remarque. — Les lignes IS et JT font un même angle avec l'horizontale, car les points I et J sont aux tiers de la travée; il en est donc de même des lignes γM′ et γM″ qui leur sont parallèles. Il en résulte que les triangles AγM″ et BγM′ sont semblables ; on a donc la relation

$$\frac{AM''}{BM'} = \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

Ce qui prouve que les lignes en croix AM′ et BM″ se recoupent en un point ω qui est situé sur la verticale Gγ du centre de gravité de l'aire des moments.

En descendant la courbe primitive des moments, AMB, de manière à lui donner pour base la ligne M_0M_1, on aura en $M_0nn'M_1$ la représentative définitive des moments, dans la travée supposée seule chargée.

(a bis) **Efforts tranchants.** — Soit m_0x_1 (fig. 287-II), tracée en gros pointillé, la représentative des efforts tranchants en supposant la poutre coupée sur ses appuis. On sait que ses ordonnées sont égales aux *pentes vraies* de la courbe des moments AMB.

Quand cette dernière a été descendue dans sa position définitive ses pentes ont été augmentées, algébriquement, de la pente, ε, de la ligne M_0M_1 et comme, sur la fig. 287, cette pente est *négative*, cela produit un *abaissement* de la ligne primitive laquelle prend la position X_0X_1.

Tout revient donc à mesurer les *pentes vraies*, soit des

tangentes à la ligne des moments AMB, soit de la ligne de correction M_0M_1. L'opération se fait comme suit :

Soit m_0m_1 (fig. 287-II), parallèle à M_0M_1, la droite dont on veut mesurer la pente vraie. On mène par un de ses points, m_0, une horizontale m_0b sur laquelle on porte de m_0 en O la distance polaire d (ici égale à $1/2\,l$). Je dis que le segment vertical $OO' = \varepsilon$ intercepté entre cette horizontale et la ligne m_0m_1 donne la pente vraie, p. En effet, la *pente-épure* p' est $p' = OO' : d$; mais la pente vraie p est égale à la pente-épure p' multipliée par la distance polaire. On a donc $p = OO'$. C. Q. F. D.

(*b*) **La charge est un poids unique** (fig. 288). — Soit PC le poids appliqué en un point quelconque C de la poutre. Par un funiculaire Collignon (ou autrement), nous déterminerons en AcB le triangle représentatif des moments dus à cette charge en supposant la poutre coupée sur ses appuis. Appliquons la construction précédente ; à cet effet :

La hauteur C*c* du triangle des moments est précisément la hauteur h qui, en prenant pour base de réduction $1/2\,l$, représenterait une force fictive équivalente à l'aire de ce triangle. Cette force fictive est à appliquer au centre de gravité G. Elle passe donc par le point γ situé au tiers de OC. Dès lors :

1° On porte la hauteur d'équivalence h de A en S et de B en T sur les verticales d'appui ;

2° On joint les points trisecteurs I et J à ces points S et T ;

3° On mène par le point γ, pied de la verticale du centre de gravité du triangle des moments, des parallèles $\gamma M'$ et $\gamma M''$ à ces droites ; elles interceptent sur les verticales d'appui des longueurs qui, à l'échelle voulue, sont égales aux moments limites des piles ;

4° On mène les *lignes en croix* AM′ et BM″, ce qui donne par recoupement avec les focales, en fF et f'F′ les moments focaux ;

5° On joint les extrémités des moments focaux, ce qui donne en $M_0FF'M_1$ la représentative des moments de correction, et en M_0 et M_1 par prolongement, les moments sur piles, de la travée considérée supposée soumise à la charge unique P, toutes les autres travées étant vides.

La représentative définitive des moments sera $M_0nc'n'M_1$ obtenue en donnant pour base au triangle primitif AcB la ligne de correction M_0M_1.

(*b* bis) **Efforts tranchants.** — Si la poutre était libre, les efforts tranchants seraient représentés par les horizontales x_0 et x_1 ; la première a son ordonnée *positive* égale à la *pente vraie*, obtenue comme ci-dessus, de la ligne inclinée A*c* ; la seconde, x_1, a son ordonnée *négative* égale à la *pente vraie* de la ligne *c*B.

La représentative définitive est X_0 et X_1, obtenue en abaissant la première ligne de la pente vraie ε (négative ici) de la ligne de correction M_0M_1, ou de sa parallèle m_0m_1 (fig. II).

(*c*) **La charge est uniformément répartie sur toute la travée.** — Soit p (fig. 289) la charge par mètre courant. La représentative des moments est une parabole dont l'ordonnée maxima OC est, en grandeur vraie, égale à $1/8\,pl^2$ (à l'échelle des funiculaires Collignon, avec la distance polaire $d = 1/2\,l$, elle serait égale à $1/4\,pl$). Appliquons la construction générale :

Le centre de gravité de la parabole est sur la verticale milieu ; le point γ coïncide donc avec le milieu O. L'aire de la parabole est égale aux 2/3 de l'aire du rectangle enveloppant ; par conséquent, en prenant pour base de réduction $d = 1/2\,l$ ainsi qu'il faut le faire, la hauteur d'équivalence h de l'aire de la parabole, sera égale aux 4/3 de la hauteur O*c* de cette parabole, car on devra avoir :

$$h \times \frac{l}{2} = \frac{2}{3}\,l \times \overline{OC}, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{4}{3}\,\overline{OC}.$$

Dès lors : 1° On porte cette hauteur h sur les verticales d'appui et l'on joint les points S et T, ainsi obtenus, aux points trisecteurs I et J ;

2° On mène par le point γ, confondu ici avec O, des parallèles aux droites précédentes ; ce qui donne les moments limites M′ et M″ qui sont évidemment égaux entre eux.

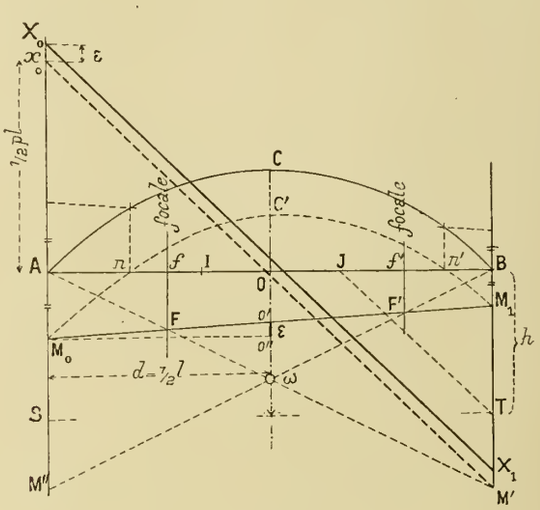


Fig. 289

On a, d'après la similitude : $BM' = 3/2\,BT$, et comme $BT = 4/3\,\overline{OC}$, il en résulte que : $BM' = 2.\overline{OC}$; autrement dit :

Le moment limite est le double du moment maximum dû à la charge uniformément répartie ;

3° On mène *les lignes en croix* M′A et M″B, en ayant soin de remarquer qu'elles se croisent en ω, sur la verticale milieu, à une hauteur négative Oω égale à l'ordonnée maxima de la parabole. Les lignes en croix détachent sur les focales les moments focaux fF et f'F′ ;

4° En joignant les moments focaux on obtient en $M_0FF'M_1$

la droite représentative des moments de correction dus à la charge uniformément répartie appliquée sur la travée considérée, toutes les autres étant vides ;

5° En donnant pour base à la parabole primitive la ligne de correction M_0M_1, on obtient en $M_0nC'n'M_1$ la représentative finale. Elle recoupe l'axe des x aux points n et n' qui sont les points d'inflexion.

(*c* bis) **Efforts tranchants.** — La représentative primitive était l'oblique x_0M', qui détache sur les verticales d'appui des longueurs égales à $+1/2pl$ et $-1/2pl$. La ligne de correction M_0M_1 ayant ici une pente positive, il faut construire en $o'o'' = \varepsilon$ sa *pente vraie*, comme il a été dit ci-dessus, et surélever, de la quantité ε, la représentative primitive qui devient ainsi la droite X_0X_1.

Etudions maintenant les effets d'une charge uniforme, mais partiellement engagée.

308. Digression. — Poutre posée sur deux appuis et soumise à une charge uniforme partiellement répartie. — Ce cas est surtout important à étudier en vue des efforts tranchants les plus dangereux.

(*a*) **Moments fléchissants.** — Je dis tout d'abord que la représentative des moments fléchissants est la même parabole que pour la charge totalement répartie, avec cette restriction que l'on n'en prend qu'un segment, prolongé, à gauche et à droite, par ses tangentes.

En effet, soit AcB (fig. 290) la parabole représentative en supposant que la charge règne sur toute la poutre. Ne prenons de D en E qu'une partie de cette charge. Menons les ordonnées D*d* et E*e* des extrémités de la charge et traçons les tangentes *dg* et *eg* aux points *d* et *e* de la parabole ; prolongeons ces tangentes jusqu'en A′ et B′ sur les verticales d'appui et menons la ligne de fermeture A′B′. Nous savons que la résultante de la charge partielle DE passerait par le point *g* où se coupent les tangentes, et que si cette charge partielle était concentrée en son propre centre de gravité G, la représentative des moments fléchissants, auxquels elle donnerait lieu, serait l'aire triangulaire A′*g*B′. De A′ en *d* la ligne droite A′*d* est à conserver, parce que les moments ne proviennent que de la réaction, *positive*, de l'appui A. Mais à partir de *d*, il faut retrancher les moments dus à la charge proprement dite. Par exemple, sur la section N, il faut retrancher les moments, par rapport au point N, de la portion de charge DN et nous savons, d'après le théorème sur les funiculaires représentatifs des moments de transport (v. n° 34), que ce moment est représenté par l'ordonnée extérieure *nn*′ de la parabole ; par conséquent, la représentative définitive sera :

1° La ligne droite A′*d* ;

2° L'arc *dne* de parabole qui lui est tangent ;

3° La tangente *e*B′ à ce même arc de parabole.

Nota. — Les ordonnées sont à mesurer à partir de l'oblique A′B′ prise comme base. Si l'on voulait les mesurer à partir de l'axe des x, il suffirait de descendre le point A′ en A et le point B′ en B, en entraînant toute la représen-

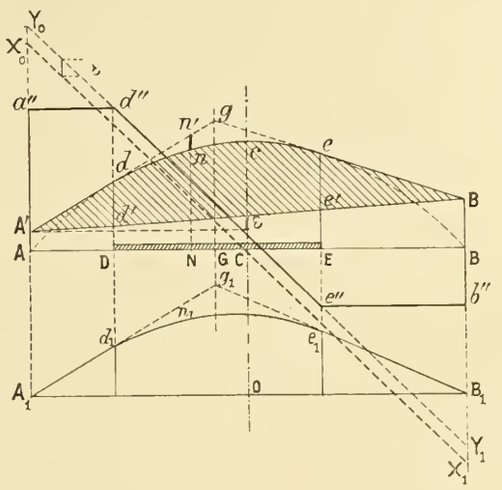


Fig. 290

tative, ce qui reviendrait à *retrancher* analytiquement la droite A′B′ du contour mixtiligne A′*dne*B′. Cette représentative est figurée au-dessous en $A_1d_1n_1e_1B_1$.

(*b*) **Efforts tranchants.** — Si la charge était totale, l'effort tranchant serait représenté par la ligne oblique X_0X_1 qui intercepte des longueurs égales à $+1/2pl$ et $-1/2pl$ sur les ordonnées d'appui.

Mais à cause de la soustraction algébrique précédente, il faut remonter cette représentative d'une quantité ε égale à la *pente-vraie* de la ligne A′B′, obtenue comme il est dit ci-dessus. (On a *remonté* parce que la pente ε est positive).

La nouvelle représentative des efforts tranchants serait donc la ligne Y_0Y_1 ; mais elle n'est à conserver qu'entre les points *d*″ et *e*″, c'est-à-dire aux limites de la charge partielle ; en deçà et au-delà, elle est horizontale, puisque la représentative des moments fléchissants y possède une pente constante, comme étant une ligne droite.

En définitive, la représentative des efforts tranchants est la ligne brisée *a*″*d*″*e*″*b*″.

Nota. — On voit que dans la région négative les efforts tranchants sont plus petits, en valeur absolue, que ceux qui seraient dus à la charge totale ; mais dans la région positive, sur une partie du moins, de C en D, ils sont plus grands ; d'où il résulte que pour certaines sections une charge partielle peut donner des efforts tranchants plus grands en valeur absolue et, par suite, plus dangereux qu'une charge totale.

Cet effet d'aggravation sera d'autant plus prononcé que la pente de la ligne A′B′ sera plus grande, ce qui aura lieu

lorsque la charge partielle s'étendra à partir d'un appui, ainsi que nous allons le montrer. Supposons maintenant que la poutre soit continue.

309. **Effets d'une charge partiellement engagée sur une travée de poutre continue.** — (*a*) **Moments limites.** — Soit (fig. 291) une charge uniforme de p, par mètre courant, engagée *depuis l'origine* A jusqu'en un point D sur une longueur $l' = \mathrm{K}l$, c'est-à-dire sur une fraction K de la longueur totale de la travée. (Sur l'épure fig. 291, on a $\mathrm{K} = 3/5$).

AC'B étant la parabole qui représenterait les moments pour la charge totalement répartie, l'arc de parabole AC'd, continué par sa tangente dB', est la représentative relative à la charge partielle, et elle a été obtenue comme il vient d'être dit au numéro précédent.

Cherchons d'abord les moments limites m' et m'' sur la pile B et sur la pile A. Par définition, ce sont les moments qui, agissant seuls, donneraient sur l'appui opposé la même pente d'élastique que la charge ; et comme les pentes sur un appui sont les réactions d'aire de moments sur cet appui, les équations qui donneront m' et m'' s'obtiendront en écrivant que le moment par rapport à B de l'aire du triangle ABm' et que le moment par rapport à A du triangle Am''B sont égaux aux moments, par rapport à B et par rapport à A, de l'aire AC'dB' des moments de charge. Evaluons chacun de ces moments.

Le triangle ABm' a pour aire $m' \times 1/2\,l$; son centre de gravité est au second tiers de la portée ; son moment par rapport à B est donc :

$$\frac{m'l}{2} \times \frac{l}{3} = \frac{m'l^2}{6},$$

Le triangle Am''B a pour aire $m'' \times 1/2\,l$; et son moment par rapport à A est

$$\frac{m''l^2}{6}.$$

L'aire mixtiligne Ac'C'B' s'obtiendrait en retranchant du grand triangle AA'B' le petit triangle AA'd et en y rajoutant le segment parabolique A$c'd$.

La flèche cc' du petit segment de parabole est à la flèche CC' du grand segment comme le carré des largeurs ; on a donc

$$\overline{cc'} = \mathrm{K}^2\overline{\mathrm{CC}'}$$

et comme $\overline{\mathrm{CC}'} = 1/8\,pl^2$, on a $\overline{cc'} = 1/8\,\mathrm{K}^2pl^2$.

La sous-tangente cc'' est le double de l'ordonnée $\overline{cc'}$; et de plus $\overline{\mathrm{AA}'} = 2\overline{cc''}$; par conséquent

$$\overline{\mathrm{AA}'} = 4.\overline{cc'} = \frac{\mathrm{K}^2pl^2}{2}.$$

Evaluons les surfaces. 1° Le petit segment de parabole a pour surface les 2/3 du parallélogramme enveloppant, ce qui donne pour expression de cette surface :

$$\frac{2}{3}\mathrm{K}l \times \overline{cc'} = \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{12};$$

son centre de gravité est à la distance $1/2\,\mathrm{K}l$ du point A et à la distance $(l - 1/2\,\mathrm{K}l)$ du point B.

2° Le grand triangle AA'B' a pour surface :

$$\mathrm{AA}' \times \frac{l}{2} = \frac{\mathrm{K}^2pl^3}{4},$$

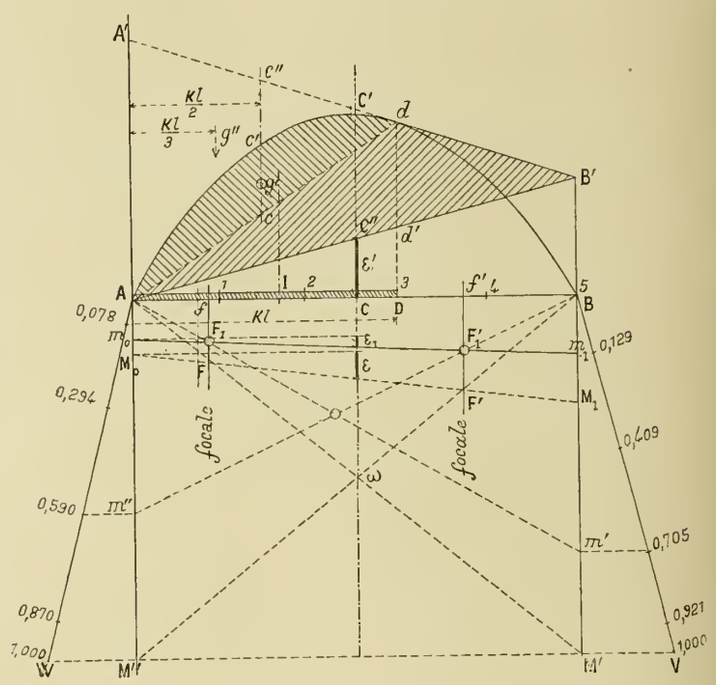


Fig. 291

son centre de gravité est à la distance $1/3\,l$ du point A et à la distance $2/3\,l$ du point B.

3° Le petit triangle AA'd a pour surface

$$\mathrm{AA}' \times \frac{\mathrm{K}l}{2} = \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{4};$$

son centre de gravité est à la distance $1/3\,\mathrm{K}l$ du point A et à la distance $(l - 1/3\,\mathrm{K}l)$ du point B.

Cela posé, évaluons m'. En écrivant l'égalité des moments des surfaces ci-dessus par rapport au point B, cela donne l'équation

$$\frac{m'l^2}{6} = \frac{\mathrm{K}^2pl^3}{4} \times \frac{2l}{3} - \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{4} \times \left(l - \frac{\mathrm{K}l}{3}\right) + \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{12} \times \left(l - \frac{\mathrm{K}l}{2}\right)$$

qui devient après simplifications

$$m' = \mathrm{K}^2pl^2\left(1 - \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}^2}{4}\right) \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad m' = \frac{pl^2}{4}\mathrm{K}^2(2 - \mathrm{K})^2.$$

Evaluons m''; à cet effet écrivons l'égalité des moments par rapport au point A ; cela donne l'équation

$$\frac{m''l^2}{6} = \frac{\mathrm{K}^2pl^3}{4} \times \frac{l}{3} - \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{4} \times \frac{\mathrm{K}l}{3} + \frac{\mathrm{K}^3pl^3}{12} \times \frac{\mathrm{K}l}{2}$$

qui devient après simplifications

(2) $$m'' = \frac{pl^2}{4} K^2(2 - K^2).$$

(*b*) **Rapports de réduction.** — Si l'on compare ces valeurs m' et m'', qui répondent à une charge partiellement engagée, aux valeurs M' et M'' qui répondaient à la charge complètement engagée, on aura, en se rappelant que

$$M' = M'' = 1/4\, pl^2,$$

(3) $$\frac{m'}{M'} = K^2(2 - K)^2,$$

(4) $$\frac{m''}{M''} = K^2(2 - K^2).$$

Ces *rapports de réductions* sont faciles à calculer ; en voici le tableau pour des valeurs de K progressant par cinquièmes :

K	$\frac{m'}{M'} = K^2(2 - K)^2$	$\frac{m''}{M''} = K^2(2 - K^2)$
1/5	0,1296	0,0784
2/5	0,4096	0,2944
3/5	0,7056	0,5904
4/5	0,9216	0,8704
5/5	1,0000	1,0000

Sur la fig. 291 nous avions $K = 3/5$. Dès lors, pour obtenir les moments focaux de correction F_1 et F'_1 répondant à la surcharge AD qui occupe les 3/5 de la longueur, on procède comme suit :

1° On détermine, comme ci-dessus, les moments limites M' et M'' répondant à une charge totale, et l'on en déduit les moments focaux maxima F et F'.

2° Sur deux échelles BV et AW on a porté des longueurs proportionnelles aux nombres du tableau ci-dessus.

3° Par les points de ces échelles répondant au rapport $K = 3/5$ (ces points portent inscrits les nombres 0,705 et 0,590), on mène des parallèles à la base des échelles, ce qui détermine en m' et m'' les moments limites répondant à la charge partielle.

4° On mène les lignes en croix Am' et Bm'', lesquelles donnent à la rencontre en F_1 et F'_1 avec les focales, les moments focaux de correction.

Nous n'étudierons pas davantage les moments fléchissants définitifs développés sous l'influence de la charge partielle AD dans la travée considérée, mais nous allons nous rendre compte, en détail, des efforts tranchants et commencer par eux l'étude des épures définitives de surcharges.

§ 3. — Epure définitive des efforts tranchants maxima

310. Epure des efforts tranchants maxima. — (*a*) **Efforts tranchants négatifs.** — Si la poutre était coupée sur ses appuis et si la surcharge était totale ($K = 1$), la représentative des efforts tranchants serait l'oblique x_0y_1 (fig. 292) qui passerait par le milieu O et qui détacherait $+1/2\,ql$ et $-1/2\,ql$ sur les verticales d'appui. (q est la surcharge par mètre.)

Si la poutre, tout en restant coupée, subissait la surcharge partielle sur la longueur Kl, la représentative précédente devrait : 1° être descendue de toute la pente ε' de la base AB' de la figure précédente 291, et 2° être limitée en d' (fig. 292) au droit du point D, extrémité de la charge ; 3° se continuer, à partir de d', par une horizontale $d't'$.

Si, maintenant, la travée est solidarisée avec le reste de la poutre, en supposant que toutes les autres travées soient vides, la continuité ainsi rétablie aura pour effet de faire, en outre, descendre ou monter la représentative précédente de toute la pente ε_1 de la ligne de correction m_0m_1 trouvée comme il est dit ci-dessus (fig. 291), ce qui amènera le point d' en d.

Nota. — Dans le cas actuel, il faut descendre, parce que la pente ε_1 est négative.

Si nous faisons la même construction pour le cas de surcharge totalement répartie, nous sommes amenés à descendre la représentative x_0y_1 de la hauteur ε, ce qui l'amène en X_0Y_1 ; mais il n'est plus alors question de la pente ε'.

Si nous considérons la section D de la poutre, nous voyons donc que, dans le cas de surcharge partielle, son effort tranchant est Dd, tandis que, avec la surcharge totale, il est Dd''; ce qui prouve que le cas de surcharge partielle est, au point de vue des efforts tranchants, plus défavorable que celui d'une surcharge totale.

Ce n'est pas tout ; il arrivera qu'en surchargeant complètement certaines travées, on développera par répercussion dans celle que nous étudions (voir plus haut fig. 283 et plus loin fig. 294-II) des efforts tranchants de répercussion (constants sur toute la travée) de même signe que ceux que nous venons d'étudier. Dès lors, on les totalisera et on descendra le point d de toute la grandeur ainsi trouvée, ce qui l'amènera plus bas encore, par exemple en D'. Résumons la marche à suivre ; en ce qui regarde les efforts tranchants négatifs, il faudra (fig. 292) :

(*b*) **Résumé.** — 1° Chercher le lieu des points d', c'est-à-dire la représentative des efforts tranchants qui se développeraient *en tête* d'une surcharge uniforme qui s'avancerait de *gauche à droite* sur la poutre supposée coupée sur les appuis. Ce lieu est une parabole Ay_1 tracée en pointillé (1).

(1) **Efforts tranchants développés, dans une travée libre, en tête d'une charge uniforme mobile** (fig. 292). (*v. page suivante.*)

2° Elever (ou abaisser) de d' en d, chaque point de ce lieu, d'une hauteur égale à la pente vraie ε_1 de la représentative

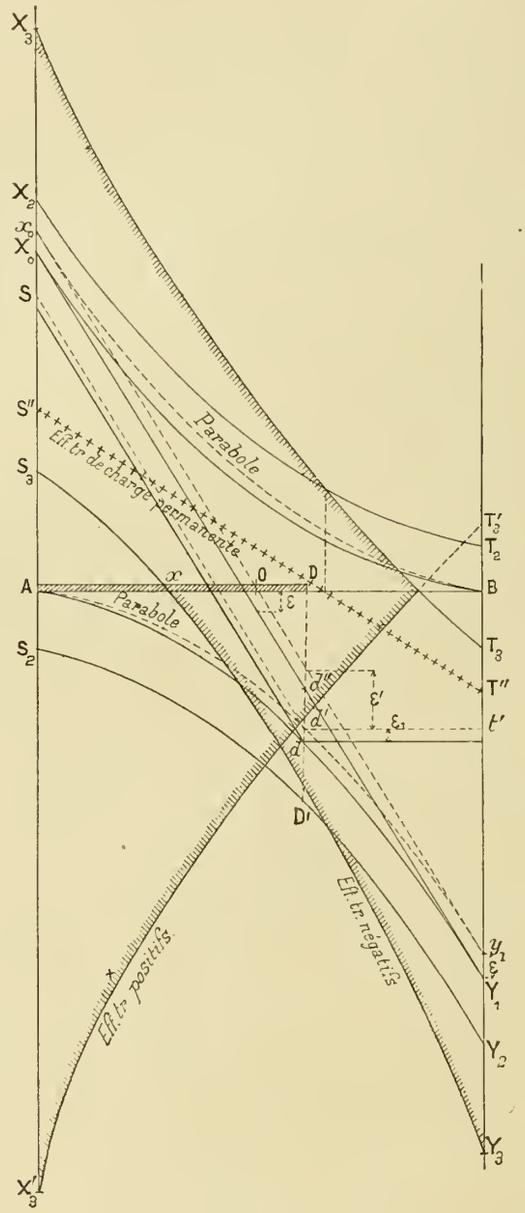


Fig. 292

des moments de correction qui serait due à la surcharge mobile, toutes les autres travées étant vides.

(*Suite de la note* (1) *de la page précédente.*)

Soit $AD = x$ la longueur de surcharge; son poids est qx; il est appliqué à la distance $1/2\,x$ du point A. La réaction X_0 de cet appui est donc :

$$X_0 = qx\frac{l-\frac{x}{2}}{l} = qx\left(1-\frac{x}{2l}\right).$$

Soit y l'effort tranchant Dd' développé en tête de la surcharge ; il a pour expression

$$y = X_0 - qx,$$

ou, en remplaçant X_0 par sa valeur

$$y = -\frac{qx^2}{2l}.$$

Le lieu des points d' est donc une parabole $Ad'y_1$. Elle est tangente en A à l'axe des x; elle recoupe la verticale d'extrémité à une hauteur y_1 obtenue en faisant $x = l$, ce qui donne

$$y_1 = -\frac{ql}{2}.$$

C'est précisément l'effort tranchant répondant à la surcharge totalement répartie. En ce point elle a pour tangente l'oblique x_0y_1 représentative des efforts tranchants de cette surcharge totale.

Le lieu des points d' est une courbe d'un degré supérieur; ce n'est plus une parabole ; elle va du point A au point Y_1.

3° Placer sur les autres travées des surcharges totalement réparties distribuées de telle sorte qu'elles donnent toutes, sur la travée considérée, des efforts tranchants négatifs. En regardant la fig. 283, et aussi, plus loin, la fig. 294-II, on voit de suite qu'il faudra, pour cela :

A gauche charger la travée qui la précède de deux rangs; et aussi toutes les autres de deux en deux;

A droite charger celle qui la suit immédiatement et aussi toutes les autres de deux en deux.

4° Totaliser les efforts tranchats de répercussion ainsi obtenus et descendre, de tout le total trouvé, la courbe du degré supérieur précédemment obtenue.

(*c*) **Efforts tranchants positifs.** — On procédera de la même façon, seulement c'est de *la droite* vers la *gauche* que l'on fera avancer la charge mobile et, afin d'avoir le maximum des efforts tranchants de répercussion, on chargera les travées que l'on avait laissées vides et inversement. On devrait, théoriquement, construire la représentative positive au-dessus de AB ; mais comme la valeur absolue des efforts tranchants est ce qui nous importe on la retournera symétriquement autour de AB.

(*d*) **Efforts tranchants maxima définitifs.** — Tout ce que nous avons dit ne s'applique qu'aux surcharges : il faut tenir compte, en outre, de la charge permanente que l'on suppose toujours uniforme et des efforts tranchants qui lui sont dus. Or la représentative pour cette dernière est toujours une droite à pente négative telle que S″T″ (traits croisés). Nous avons appris à la déterminer.

On l'ajoutera analytiquement aux deux courbes précédentes, ce qui donnera les représentatives définitives telles que S_3Y_3 (négative) et X_3T_3 (positive). Sur la positive on opérera le retournement par symétrie, comme à l'ordinaire, ce qui donnera $X'_3T'_3$.

Passons maintenant aux moments fléchissants; mais donnons d'abord quelques détails sur l'exécution des épures, détails que nous n'avons pas indiqués en tête de ce paragraphe 3 afin de ne pas perdre la suite des idées en ce qui regardait les efforts tranchants.

§ 4. — Epure définitive des moments fléchissants maxima

311. **Détails d'exécution des épures.** — (*a*) **Choix des échelles.** — Adopter une échelle pour les longueurs, une pour les forces et efforts tranchants et une pour les moments fléchissants; les dessiner immédiatement sur la feuille.

En général l'unité de force sera la *tonne* de 1 000^k et l'unité de moment le *tonne-mètre*, c'est-à-dire le produit de une tonne par un mètre. Afin de ne pas avoir de suprises relativement à la place que les épures occuperont, en hauteur, on peut remarquer que les moments maxima ne dépasseront et même n'atteindront jamais ceux qui se produiraient au milieu de la plus grande travée supposée coupée au-dessus des appuis et soumise, à la fois, à la charge permanente et à la surcharge. Par conséquent, si p est la charge permanente par mètre linéaire, q la surcharge, L la longueur de la plus grande travée, les paraboles de moments qui leur correspondraient auraient pour ordonnées maxima

$$\frac{1}{8}pL^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{8}qL^2, \qquad \text{ensemble } \frac{1}{8}(p+q)L^2.$$

On calculera donc, en *tonne-mètres*, ce dernier total et l'on choisira l'échelle des moments de manière à disposer sur l'épure de l'espace voulu pour le loger.

Pour les efforts tranchants, au contraire, on remarquera que $1/2\,pL$ et $1/2\,qL$ (ensemble $1/2\,(p+q)L$ qui donneraient les réactions maxima des appuis pour la grande travée, supposée indépendante, seront toujours majorés par le fait de la continuité. En évaluant à un tiers cette majoration on disposera, en général, d'une marge suffisante pour éviter les surprises dans les dimensions.

(*b*) **Distance polaire répondant aux échelles choisies.** — Nous avons vu qu'il fallait pouvoir transformer graphiquement en effort tranchant la *pente-épure* CB : AB d'une représentative de moments. Il faut pour cela prendre en AB′ sur une horizontale, la distance polaire d, mesurée à l'échelle

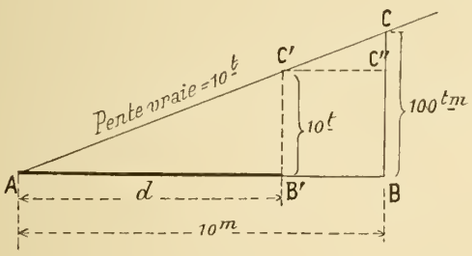


Fig. 293

des longueurs, après quoi la hauteur B′C′, mesurée à l'échelle des forces, doit donner l'effort tranchant. Voici la règle :

1° Prendre (fig. 293) à l'échelle des moments une verticale BC égale à 100 tonne-mètres par exemple ;

2° Prendre à l'échelle des longueurs une horizontale BA égale à 10 mètres ; joindre AC. Cette ligne a une pente vraie égale à $100t^m : 10^m = 10^t$;

3° Couper l'angle CAD par une horizontale $c'c''$ qui soit à une hauteur B′C′ (mesurée à l'échelle des forces) égale à 10 tonnes.

La longueur AB′ sera la distance polaire d cherchée.

312. **Epure des moments dus aux charges permanentes.** — (*a*) **Tracé des patrons paraboliques.** — En général la charge permanente (p par mètre) sera la même dans toute les travées. Dès lors les paraboles représentatives des moments seront toutes taillées sur le même patron que nous nommerons le *patron p*. On commencera par le tracer et par le découper soigneusement dans une feuile de carton mince, bien laminé. On aura à s'en servir comme il est dit au n° 270, c'est-à-dire à l'orienter verticalement et ensuite à faire passer sa courbe par deux points donnés qui, généralement, ne seront pas sur une même horizontale. C'est pourquoi il devra être assez grand. Nous conseillons de lui donner une base L′ égale à environ 3/2 de L (L étant la plus grande longueur de travée) ; de calculer sa hauteur $H' = 1/8\,pL'^2$, *à l'échelle des moments*, et de le tracer ensuite sur ces données.

Sur le même patron (fig. 295-I) on tracera la représentative *oa* de ses efforts tranchants ; on en aura la *pente-épure* *a*O en prenant de O en A une longueur quelconque, $1/2\,l$ par exemple à l'échelle des longueurs, en calculant la valeur $1/2\,pl$ et la portant de A en *a* à l'échelle des forces.

Nous nommerons cette ligne *ao* l'oblique T*p*, ce qui voudra dire : *Oblique représentative de l'effort tranchant* T *dû à la charge* p *par mètre.*

(*b*) **Ordre des constructions.** — Dès lors on peut exécuter une première épure dans l'hypothèse qu'il n'y a pas de surcharge. Voici l'ordre à suivre :

1° Déterminer les contre-verticales de chaque pile. Elles ont pour pieds les tiers intervertis (v. n° 295-*b*).

2° Sur ces lignes placer les centres de correction.

On calculera leur hauteur H plutôt qu'on ne la construira (pour cette construction, v. n° 295-*c*, fig. 278), ce sera plus exact et tout aussi rapide. On se servira de la formule (3) du n° 295-*c*.

$$H\left(\frac{l+l'}{2}\right) = \frac{Pl^2 + P'l'^2}{24},$$

qui devient en faisant $P = pl$ et $P' = p'l'$

$$H = \frac{pl^3 + p'l'^3}{12(l+l')}.$$

3° Déterminer les focales de chaque travée. Dans la pratique, les poutres seront toujours libres sur les culées ; par

conséquent ces culées seront les foyers extrêmes f_1 et f'_7 (fig. 294). On mènera par les pieds des contre verticales des obliques quelconques, de préférence à 45° pour l'exactitude des recoupements, et l'on construira les focales comme il est dit au n° 289.

4° Déterminer les moments focaux $F'_1 - F_2F'_2 - F_3F'_3$, etc... (v. la construction n° 290-*d*).

5° En déduire les représentatives des moments de correction et par suite les moments sur piles M_1, M_2, M_3... (fig. 294-I).

6° Par les extrémités de ces moments sur piles, faire passer les paraboles dont le patron *p* a été construit. A la rigueur, il n'est pas nécessaire de tracer ces paraboles car, à cause des surcharges, ce ne sont pas elles qui indiqueront les moments dangereux.

7° Descendre ou remonter, suivant le signe, comme l'indique la fig. 295, les obliques T*p*, qui représentent les efforts tranchants, d'une hauteur ε égale à la pente vraie de la ligne des moments de correction, cette hauteur ε étant obtenue graphiquement comme il est dit ci-dessus.

La fig. 294-I donne l'aspect de cette première épure dite des *charges permanentes*; les efforts tranchants y sont figurés par des lignes obliques tracées en pointillé.

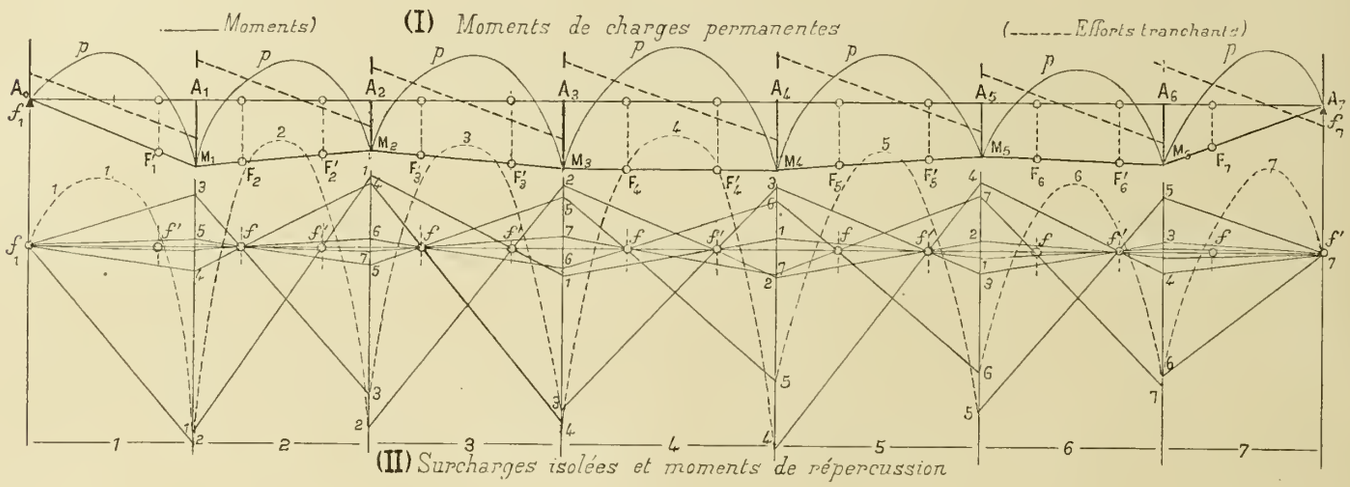


Fig. 294

313. **Epure des moments maxima.** — (*a*) **Moments de répercussion.** — Prendre chaque travée séparément et, en supposant que la surcharge (*q* par mètre) y est appliquée sur toute sa longueur, tandis que les autres travées seraient vides, déterminer les moments limites (v. n° 307-*c*), en déduire les moments focaux, les moments sur piles et les moments de répercussion dans chacune des autres travées. On obtient alors une épure dont nous donnons l'aspect (fig. 294-II).

Dans chaque travée, les effets des surcharges qui seraient susceptibles d'agir sur les autres travées sont traduits par des lignes droites de répercussion qui divergent des points focaux *f* et *f'*. Si toutes les travées étaient surchargées, il faudrait ajouter analytiquement toutes les représentatives de moments (moments de charge, de surcharge et de répercussion). Dans cette addition, les moments négatifs viendraient en déduction des moments positifs et nous n'aurions pas les cas les plus défavorables. C'est pourquoi, sauf pour les moments de charge permanente qui subsisteront toujours tels qu'ils sont, il faut combiner les surcharges de manière à obtenir, par addition algébrique, les plus grandes valeurs absolues de moments.

(*b*) **Epure d'une travée quelconque.** — Redessinons en plus grand (fig. 295) ce qui se passe dans une travée, la

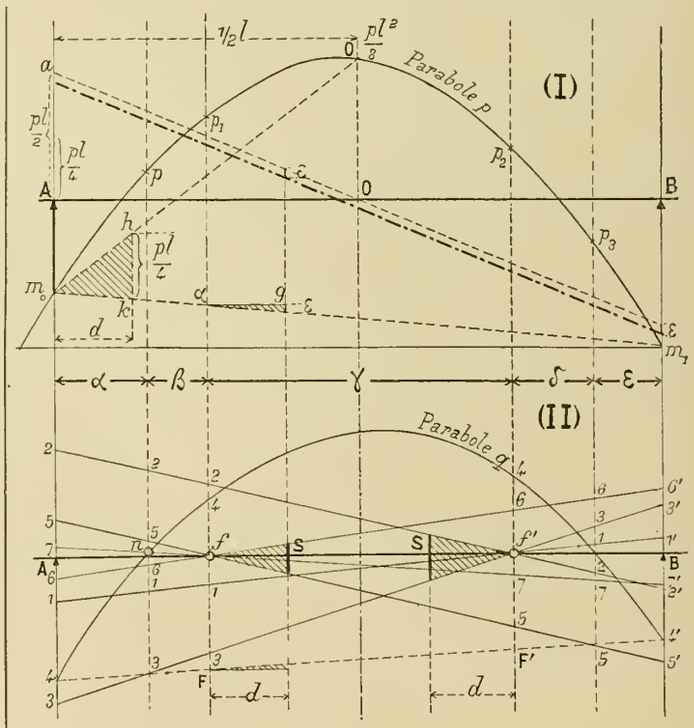


Fig. 295

quatrième par exemple; nous supposerons qu'il y en a sept en tout.

La fig. I donne les effets de la charge permanente p; la fig. II donne ceux de la surcharge q appliquée sur la seule travée n° 4 et fait voir les lignes de répercussion qui proviendront des autres travées, quand on les surchargera.

Ces droites de répercussion portent les numéros de travées à la surcharge desquelles elles doivent leur existence.

L'étude attentive des fig. I et II montre comment dans chacune des zônes α, β, γ, δ et ε il faut combiner les surcharges pour avoir les plus grandes ou les plus petites valeurs algébriques des moments.

(*c*) **Zône** α. — 1° *Moments maxima.* — Ne prendre que ce qui est positif, c'est-à-dire les droites de répercussion 2-5 et 7 (fig. II) auxquelles on ajoutera la parabole m_0p_1 (fig. I). On ne fera pas agir la surcharge, car dans la zône α elle donne des moments négatifs. En faisant l'opération, on obtient (fig. 296) la courbe MC, tracée avec le patron p.

2° *Moments minima.* — Ne prendre (fig. 295) que ce qui est négatif, c'est-à-dire les droites de répercussion 1-3 et 6; y ajouter la parabole de surcharge, puisqu'elle est négative, et la parabole de charge m_0p_1, comme tout à l'heure, puisque cette dernière ne peut jamais être supprimée. On obtient (fig. 296) la courbe M'C' tracée avec le patron $(p+q)$.

Remarque. — Les combinaisons 2-5-7 qui donnaient la courbe MC sont précisément toutes celles qui n'entrent pas dans la combinaison 1-3-6 et 4, qui donnent la courbe M'C'. Il en sera de même pour toutes les zônes; les combinaisons qui donneront les maxima seront les *complémentaires* de celles qui donneront les minima.

(*d*) **Zône** β. — 1° *Moments maxima.* — C'est (v. fig. 295) la combinaison des droites 2-5 et 7 avec la surcharge 4; elle donne la courbe CD tracée avec le patron $(p+q)$ (fig. 296).

2° *Moments minima.* — Combinaison complémentaire 1-3 et 6, donnant la courbe C'D' (fig. 296) tracée avec le patron p.

Remarque. — Les courbes CD et C'D' doivent rencontrer les courbes précédentes MC et M'C', en des points C et C' situés sur les lignes d'inflexion. En effet, voyons ce qui se passe pour le point C. La courbe MC résulte de la combinaison 2-5-7 (nous ne comptons pas p qui existe toujours); et la courbe CD résulte de la combinaison 2-4-5 et 7. Il semble donc qu'il y ait ici la courbe 4 en plus. Mais sur le point d'inflexion, la parabole 4 de surcharge a une ordonnée nulle (v. fig. 295-II); on obtient donc pour la courbe CD au point C la même ordonnée que pour la courbe AC.

(*e*) **Zône** γ. — 1° *Moments maxima.* — Combinaison 2-6 et 4 (v. fig. 295-II), ce qui donne la courbe DE, tracée avec le patron $(p+q)$.

2° *Moments minima.* — Combinaison complémentaire 1-3-5-7, donnant la courbe D'E' tracée avec le patron p.

Remarque. — Les courbes CD et DE se rencontrent au point D sur la focale. En effet CD résulte de la combinaison 2-4-5-7, tandis que DE résulte de la combinaison 2-6-4.

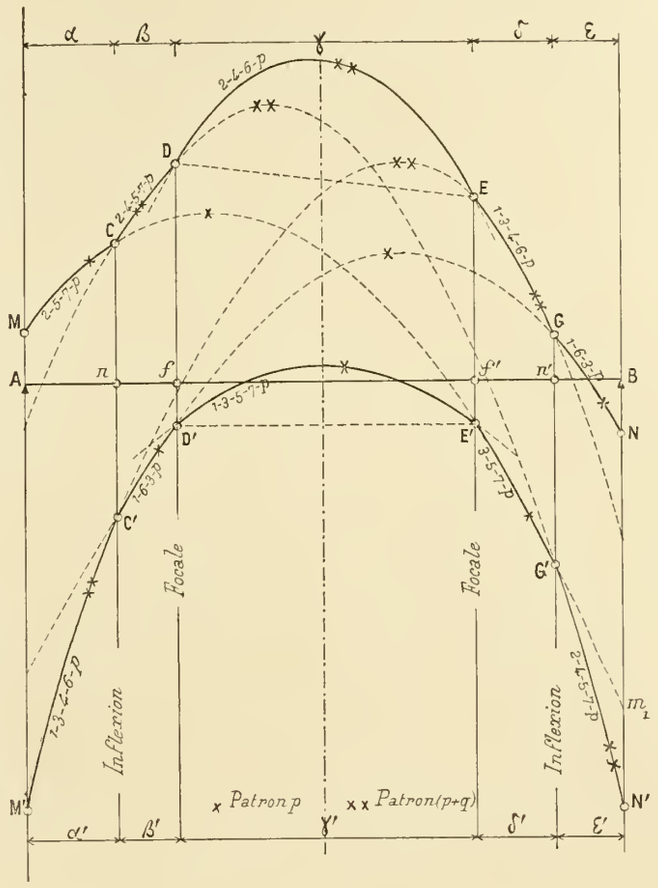


Fig. 296

Il semble qu'il doive y avoir une différence d'ordonnée due à ce que la combinaison 5-6-7 n'est pas commune aux deux courbes; mais (fig. 295-II) au foyer f les ordonnées des droites 5, 6 et 7 s'annulent; donc, la différence n'existe pas.

(*f*) **Zône** δ. — 1° *Maxima.* — Combinaison 1-3-4-6 donnant la courbe EG (patron $p+q$).

2° *Minima.* — Combinaison complémentaire 2-5-7 donnant la courbe E'G' (patron p).

Remarque. — Les deux combinaisons de la zône δ sont les mêmes que celles de la zône α; par conséquent, les patrons placés dans la position voulue pour la zône α serviront aussi pour la zône δ; cela donne lieu à des vérifications qu'il ne faut pas négliger.

(*g*) **Zône** ε. — 1° *Maxima.* — Combinaison 1, 6-3, et courbe GN (patron p); 2° *minima.* — Combinaison complémentaire 2-4-5-7, et courbe G'N', patron $(p+q)$.

Remarque. — Les courbes de la zône ε sont le prolongement de celles de la zône β.

Il resterait à replier la partie négative de la fig. 296, autour de la ligne de base AB, afin de connaître les maxima

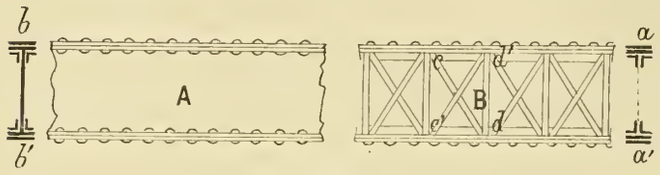


Fig. 297

en *valeur absolue*. Nous ne l'avons pas fait pour ne pas compliquer la figure.

(Pour les efforts tranchants, v. plus haut, n° 310.)

314. **Conclusions.** — Nous savons donc trouver, pour chaque section de la poutre, le moment et l'effort tranchant maxima qu'elle sera, ne serait-ce que pendant un instant, susceptible de supporter.

Si la poutre est à âme pleine (fig. 297-A), on calcule ses dimensions par la formule d'équarrissage et l'on fait supporter l'effort tranchant par l'âme. Si la poutre est à âme évidée B (croisillons, triangles, etc....), nous verrons plus loin comment le moment fléchissant impose plus particulièrement les dimensions des *bandes a* et *a'* (fig. B) tandis que l'effort tranchant sert à déterminer celles des barres telles que *cd* et *c'd'*.

NOTE

ÉPURES RELATIVES AU TRAIN-TYPE

315. **Règlement officiel français relatif aux épreuves à faire subir aux ponts. — Epures des épreuves.**

I. — MOMENTS FLÉCHISSANTS

(*a*) **Train type.** — Le règlement officiel du 29 août 1891 prévoit le passage, sur les ponts de chemins de fer, d'un *train type* composé comme l'indique le tableau ci-dessous.

TRAIN TYPE.

DÉSIGNATION	MACHINE	TENDER	WAGON CHARGÉ
Nombre d'essieux	4	2	2
Charge par essieu	14^t	12^t	8^t
Distance du tampon d'avant au premier essieu	$2^m,60$	$2^m,00$	$1^m,50$
Ecartement des essieux entre eux.	$1^m,20$	$2^m,50$	$3^m,00$
Distance du dernier essieu au tampon d'arrière	$2^m,60$	$2^m,00$	$1^m,50$
Poids total	56^t	24^t	16^t
Longueur totale	$8^m,80$	$6^m,50$	$6^m,00$

Le nombre de wagons qui composent le train pouvant être considérable, il n'existe pour ainsi dire pas de ponts, à une seule travée, qui ne soient sujets, à un instant donné, à être couverts de wagons sur la totalité de leur longueur.

(*b*) **Funiculaire initial.** — Pour calculer les valeurs maxima des moments fléchissants ainsi que celles des efforts tranchants, voici comment nous opérons :

Nous supposons que la machine de tête est placée sur la culée d'origine A ou du moins très près de cette culée, et que le train type est placé derrière elle sur toute la longueur du pont. Dans l'exemple choisi (fig. 298) le pont ayant $41^m,10$ de portée, il tient sur lui deux machines, deux tenders et deux wagons.

Pour cette position initiale nous construisons en ACDEF...KSB le *funiculaire initial* des moments fléchissants. Nous recommandons d'employer la méthode de M. Collignon (v. n° 42). Elle donne une grande précision, elle est très rapide et elle demande très peu de place.

Sur l'épure les échelles sont :

Longueurs	5^{mm} pour 1 mètre.
Forces	2^{mm} pour 1 tonne.
Moments	$9^{mm},7$ pour 100 tonne-mètres.
Distance polaire	$d = 20^m,55$.

L'échelle des moments est une conséquence de l'échelle des forces et de la distance polaire, laquelle est ici égale à la demi-portée.

1 tonne (soit 2^{mm}) représente donc $20^{tm},55$, ce qui pour 100 tonne-mètres, donne une échelle de $200^{mm} : 20,55 = 9,7$ millimètres.

(*c*) **Funiculaires de dégagement.** — Nous allons maintenant faire dégager le train par la droite ; les essieux vont donc sortir dans l'ordre S, R, Q,... etc... Nous désignerons par δs, δr, δq... les distances de chaque essieu à l'extrémité B : nous ferons donc parcourir successivement au train les *distances de dégagement* δs, δr, δq... et, chaque fois qu'un essieu nouveau arrivera sur la pile B, nous construirons le funiculaire des moments. Mais, ainsi qu'on peut le prévoir, il sera inutile de construire chaque fois le funiculaire tout entier, puisque les seules lignes qui nous intéresseront seront celles qui délimiteront le contour extérieur du diagramme définitif des moments maxima.

Raisonnons pour un essieu, l'essieu E, par exemple :

Dans la première position du train son *curseur* (1) est E ; dans la seconde position, c'est-à-dire lorsque l'essieu S est arrivé en B, son curseur est arrivé en E*s* ; dans son passage de la position E à la position E*s*, il aurait décrit un arc de parabole que nous devrions tracer (v. 274); mais la flèche de cet arc serait tellement petite que, pour l'instant, nous nous contenterons de tracer sa corde E — E*s*; et il en sera de même pour toutes les trajectoires des curseurs.

Graphiquement, nous devons donc nous contenter de tracer les trajectoires qui concourront à former le contour extérieur ; on va voir que cela se réduit à peu de chose et s'obtient par un tracé très simple et très rapide que nous allons expliquer.

(1) Pour abréger nous avons nommé *curseur* d'un essieu (v. n° 274-*b*) l'extrémité M, ou M*s*, ou M*r*... de l'ordonnée représentative du moment qui est développé à un instant donné, au-dessous de cet essieu.

Chaque position de curseur est indiquée par une double lettre ; *exemple* : M*s* indique le curseur de l'essieu M au moment où l'essieu S va sortir ; H*q* indique le curseur de l'essieu H au moment où l'essieu Q va sortir.

Épure des moments fléchissants maxima

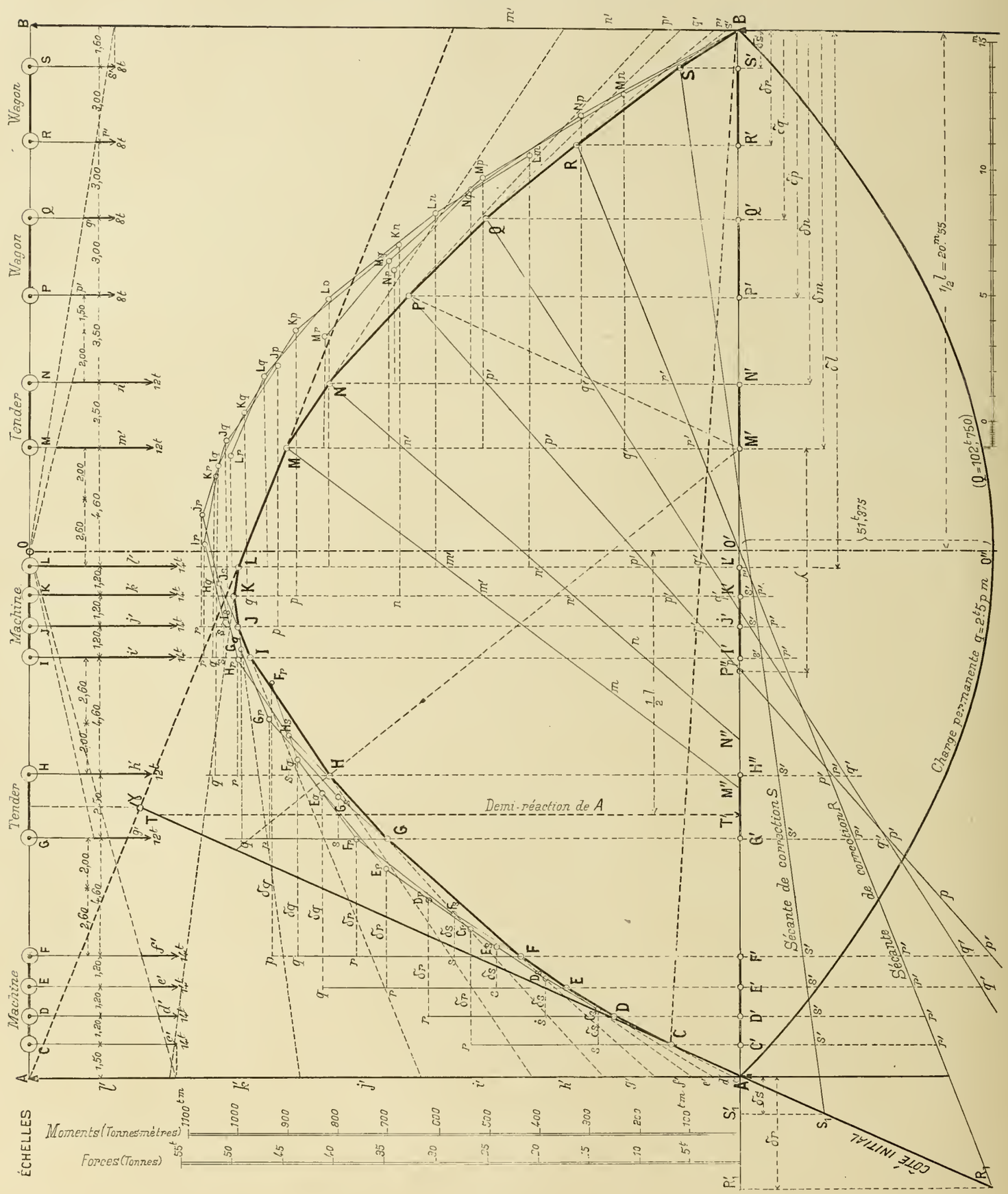


Fig. 298

(*d*) **Trajectoires successives des curseurs d'essieux.** — Cherchons les positions et, par suite, les trajectoires successives $Es - Er - Eq$... du curseur d'un essieu quelconque, E par exemple. Sa première position est E ; — faisons voyager le train et amenons le dernier essieu, S, au-dessus de B, par un parcours égal à δs.

Pour avoir le funiculaire des moments répondant à cette position nouvelle du train nous n'avons pas à refaire une nouvelle construction ; il nous suffit de prendre le *funiculaire initial* mais de lui donner pour base la ligne oblique SS_1 qui passe à droite par le curseur S et à gauche par un point S_1 situé sur le *côté initial* $R_1 A\gamma$, du funiculaire ACDE...RSB, à une distance, comptée horizontalement, égale à la distance de dégagement δs.

Nous nommerons cette ligne SS_1, la *sécante de correction* S.

Nous pouvons donc dire, lorsque l'essieu S va dégager :

1° Le moment sous l'essieu E aura pour valeur l'ordonnée $s'E$, comptée entre le curseur primitif E et la sécante de correction S ; nous prendrons donc sur l'ordonnée du point E et au-dessus de lui une hauteur $sE = s'E'$;

2° Mais, comme le train s'est déplacé de toute la distance δs, il a entraîné avec lui l'essieu E et son curseur ; nous tracerons donc, dans le sens du mouvement du train, l'horizontale $s - Es$ égale à δs et nous obtiendrons en Es la seconde position du curseur E.

Le tracé est général et fait connaître immédiatement n'importe quelle position d'un curseur quelconque. On peut le résumer ainsi :

On mène d'abord toutes les sécantes de correction $SS_1 - RR_1 \ldots PP''$ $NN'' - MM''$ (comme ces dernières eussent recoupé le côté initial en dehors des limites de l'épure, nous dirons plus loin comment on a procédé pour les obtenir).

Cela fait : pour avoir la position d'un curseur répondant au dégagement d'un essieu donné :

1° On remonte (ou on descend suivant les cas) le curseur primitif de toute la longueur de l'ordonnée correspondante de la sécante de correction de l'essieu dégageant ; c'est l'*ordonnée de correction* ;

2° On le déplace ensuite, dans le sens de la marche du train, de la longueur de dégagement de ce même essieu dégageant.

Ces opérations se font rapidement en reportant les ordonnées de correction ou les longueurs de dégagement sur une bande de papier.

On remarquera qu'en cherchant trois positions successives pour chaque curseur, cela suffira généralement pour voir se dessiner très nettement le contour enveloppant.

(*e*) **Parabole de charge permanente.** — On tracera, au-dessous, en AO''B, la parabole des moments de charge permanente, et les ordonnées définitives seront à compter entre cette parabole et le contour enveloppe des moments maxima de charge mobile, que nous venons de déterminer.

Dans le cas actuel, nous avons admis que la charge permanente, q, due au poids propre du pont, était de $2^t,5$ par mètre courant, ce qui pour une longueur de $41^m,10$ donnait une charge totale

$$Q = 41,10 \times 2^t,5 = 102^t,750,$$

et, à l'échelle des funiculaires Collignon ($d = 1/2l$) nous avons pris la hauteur de cette parabole égale au quart de la charge Q, c'est-à-dire égale à $25^t,798$, mesurée à l'échelle des forces.

(*f*) **Trajectoires paraboliques partielles.** — Si le pont est à grande ou à moyenne portée, comme est celui que nous étudions, il est inutile de joindre par les arcs voulus de parabole deux positions successives du curseur d'un même essieu, car la flèche de ces arcs est si petite qu'elle est négligeable par rapport à la grande représentative des moments maxima.

Pour les ponts à petite portée il n'en serait pas de même. Il faudrait calculer les flèches de chacun de ces arcs. On y arrivera comme suit :

1° A chaque intervalle partiel de dégagement répond un patron de parabole qui, s'il avait pour base la portée totale, l, de la poutre, aurait, à l'échelle des funiculaires Collignon, une hauteur de flèche $H = 1/2P$, P étant la surcharge agissant sur la poutre pendant la phase correspondante du dégagement. On calcule d'abord cette flèche H du patron total.

2° La flèche h du patron partiel est à la flèche précédente H comme le carré l'^2 de la largeur de ce patron partiel est au carré l^2 de la largeur du patron total.

Exemple : Pendant la phase de dégagement P — N, l'essieu P vient de dégager, l'essieu N va dégager à son tour ; la surcharge agissant sur la poutre est égale à 192 tonnes, poids total du train BCD...RS, diminué du poids des essieux dégagés S (8^t), R (8^t) et P (8^t) : elle est donc égale à $192 - 24 = 168^t$. Le patron total de la parabole correspondante aurait pour hauteur :

$$H = 1/2 \times 168 = 84^t, \quad \text{mesurée à l'échelle des forces.}$$

Mais, la distance partielle l' de dégagement P — N est égale à 3^m, distance entre les essieux P et N, tandis que la portée de la poutre, c'est-à-dire la base du grand patron précédent est $l = 41^m,10$; on aura donc

$$\frac{h}{H} = \frac{l'^2}{l^2}, \qquad \text{où} \qquad h = 84 \times \frac{3^2}{41,10^2} \qquad \text{d'où}$$

$$h = 84 \times 0,0054 = 0^t,4536.$$

On voit que, mesurée à l'échelle des forces, cette flèche est très peu sensible. Sa faible valeur tient à la grandeur du dénominateur $(41,10)^2$; c'est pourquoi si la portée l étant faible la flèche, h, ne serait pas négligeable et il faudrait tracer l'arc de parabole ; on le fait très simplement de la manière suivante.

(*g*) **Tracé des paraboles partielles** — Soit Ep, En deux positions d'un même curseur répondant à un intervalle de dégagement l' (fig. 299) ; soit h la petite flèche calculée comme ci-dessus.

1° On partage (à vue d'œil, cela suffit presque) la corde en 4 parties égales aux points f' et g' et on porte en $f'f = h$ et $g'g$, sur les trois verticales de ces points, la flèche h ; cela donne le point milieu de l'arc de parabole et en fg la tangente en ce point.

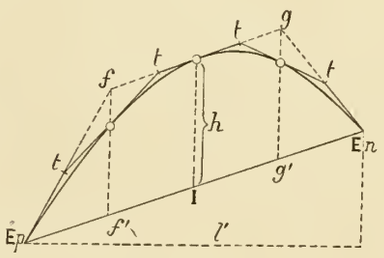


Fig. 299

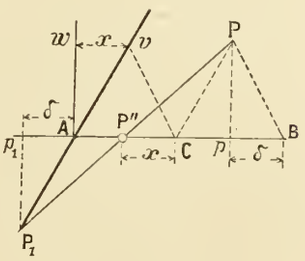


Fig. 300

2° On prend en t, t, t, t les milieux des lignes $Epf - fg - gEn$; on joint les points t ; ce qui donne deux nouvelles tangentes dont les points de contact sont placés au milieu de leur longueur.

(*h*) **Détails d'exécution.** — Le côté initial AT (fig. 298) du funiculaire initial joue un rôle considérable dans cette épure et demande à être tracé très exactement. Comme vérification on remarquera que, si l'on considère la première machine, son tender et la machine suivante, c'est-à-dire les essieux BCDE — FG — HIJK, la résultante de leurs poids doit, à cause de la symétrie, passer à égale distance des essieux F et G ; mais, d'autre part, cette résultante doit passer par le point de rencontre γ du côté initial R_1A et du côté $K\gamma$ du funiculaire, lequel est, sur notre épure, le côté moyen, déterminé avec beaucoup de précision. Cela nous donne avec A un second point γ, très exact, pour le côté initial.

Les sécantes de correction, à partir de celle du sommet P, rencontreraient le côté initial γAR, très en dehors de l'épure. Nous les avons tracées en cherchant les points tels que P'', où elles recouperaient la base AB (v. fig. 300) ; voici le tracé :

1° On joint BP, et on mène PC parallèle au côté initial Av.

2° On mène la droite Cv parallèle à BP et on prend en v sa rencontre avec le côté initial.

3° La distance x du point v à la verticale d'origine Aw, donne, en la reportant de C en P'', le point P'' où la sécante de correction P_1 doit rencontrer la base AB ; ce qui dispense de chercher le point P_1. (Démonstration très facile ; nous ne la donnerons pas.)

Épure des efforts tranchants maxima

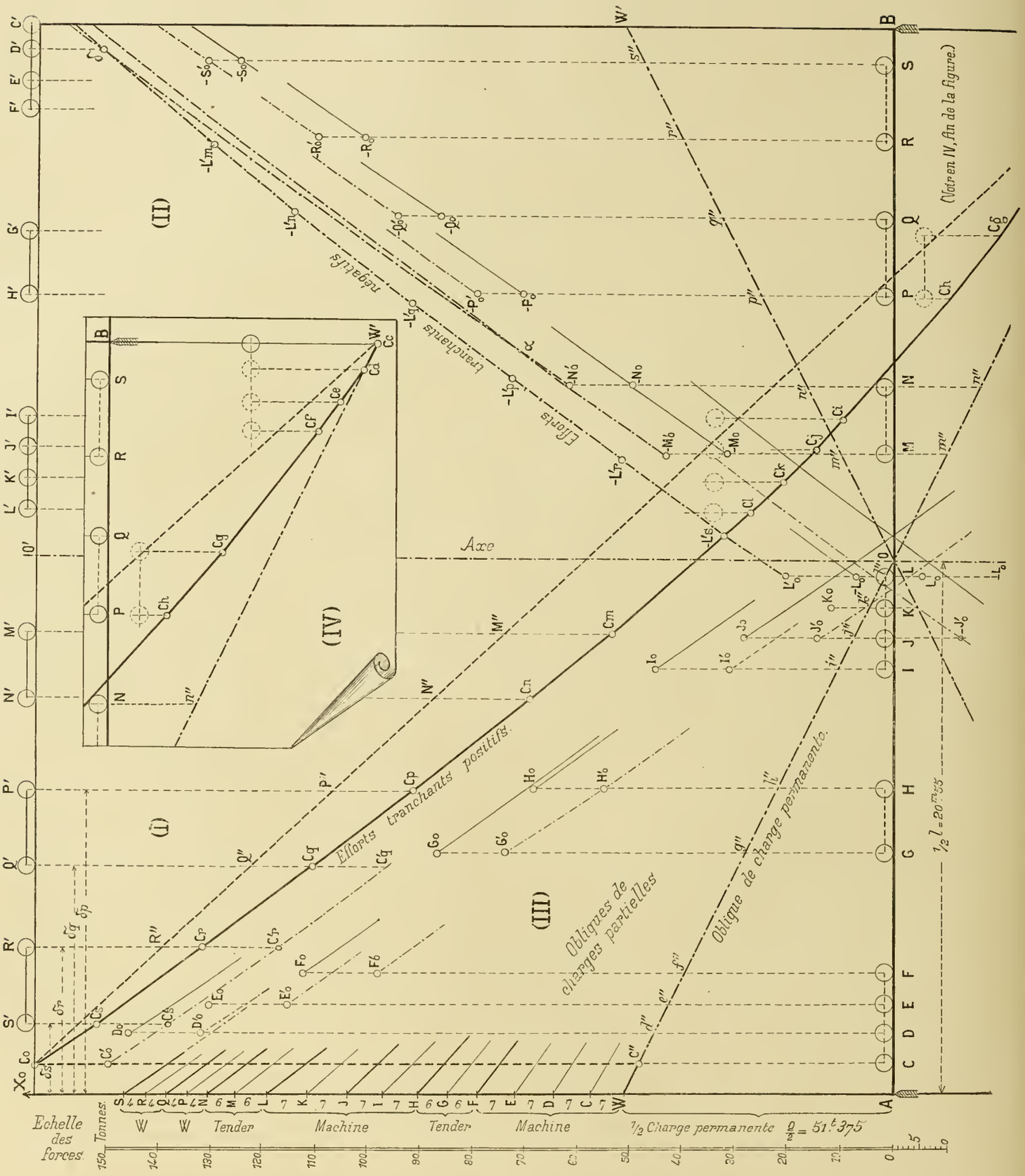


Fig. 4

II. — EFFORTS TRANCHANTS

(*a*) **Efforts tranchants de charge permanente.** — La fig. 301 donne l'épure des efforts tranchants ; afin de disposer de la place voulue nous avons adopté, pour les forces, l'échelle de 1mm par tonne, c'est-à-dire une échelle moitié de celle adoptée pour l'épure des moments. Nous traçons d'abord l'oblique de charge permanente WO... ; sa moitié inférieure a été retournée symétriquement en OW′ par rapport à la base AB, à cause du manque de place et, aussi, parce que les efforts tranchants négatifs devront être, suivant l'usage, retourués autour de AB comme charnière.

Cette oblique intercepte sur les verticales d'origine et d'extrémité des longueurs AW et BW′ égales à la moitié de la charge permanente, soit 51t,375.

(*b*) **Curseurs des efforts tranchants initiaux.** — Cherchons les positions initiales C_0, D_0, E_0....S_0 des *curseurs d'efforts tranchants* de chaque essieu.

Conventions. — Nous nommons ainsi les extrémités des ordonnées représentatives des efforts tranchants développés au-dessous de chaque essieu. L'indice zéro indique que l'essieu appartient au convoi dans sa position initiale. Les indices s, r, q,....n, m.... indiqueront que l'effort tranchant est pris au moment où l'essieu S, ou R, ou Q.... est sur le point de se dégager.

Enfin, un accent indiquera qu'il s'agit de l'effort tranchant de droite de l'essieu.

Exemple. — 1° Cp (fig. I) est le curseur de l'effort *tranchant gauche* de l'essieu C à l'instant où l'essieu P est arrivé sur l'extrémité B de la poutre.

2° $L'q$ (fig. II) est le curseur de l'effort *tranchant droite* de l'essieu L à l'instant où l'essieu Q est en dégagement.

Le signe — qui précède ce dernier indique que ce curseur aurait dû être placé au-dessous de AB, c'est-à-dire dans la région négative, et que c'est un retournement qui nous l'a donné.

Cela posé : cherchons l'effort tranchant C_0 sous le premier essieu. Si la charge permanente n'existait pas il serait égal à la réaction WX_0 du convoi sur l'appui A. Le funiculaire de la fig. 298 nous donne cette réaction.

Réaction de l'appui d'origine.

En effet, s'il nous était possible de prolonger sur cette figure 298 le côté initial AT du funiculaire jusqu'à sa rencontre avec la verticale milieu il intercepterait sur cette verticale une longueur précisément égale à la réaction cherchée (v. n° 45), il faudrait ensuite en prendre la moitié pour la ramener à l'échelle de la fig. 301. Par conséquent, traçons en TT′ (fig. 298) une verticale située *au quart* $(1/4\,l)$ de la portée et elle interceptera une longueur TT′ qui, à l'échelle des forces de la fig. 301, sera égale à la réaction cherchée.

Positions initiales des curseurs. — Dès lors, pour avoir le curseur C_0, nous portons la longueur précédente de C'' en C_0, à partir de l'oblique de charge permanente.

Faisons cette opération à l'aide d'une bande de papier, sur laquelle le point C'' sera marqué comme un point de repère que nous ferons, tout à l'heure, glisser sur les obliques de charge permanente WO et OW′.

Pour avoir l'effort tranchant de droite C'_0 et ensuite tous les efforts tranchants tant de gauche (D_0, E_0.....) que de droite (D'_0, E'_0....), portons sur cette bande de papier les poids successifs des essieux dans l'ordre C (14t) D (14t) E (14t) F (14t) G (12t), etc... Plaçons alors le repère C'' successivement en d'', e'', f''.... et, en retrogradant chaque fois d'une charge d'essieu, nous marquerons les points $D_0D'_0$ — $E_0E'_0$ — $F_0F'_0$, etc.... qui seront les positions initiales cherchées.

Lorsque nous arriverons à l'essieu L, c'est-à-dire en l'', puis ensuite en m'' n''....., nous nous repérerons sur l'oblique retournée OW′ et nous retournerons aussi notre bande de papier ; cela nous donnera (fig. II) les curseurs négatifs — $L_0L'_0$, — $M_0M'_0$, — $N_0N'_0$ etc.....

(*c*) **Trajectoire type des curseurs.** — Suivons maintenant le premier curseur C_0, lorsque le train se dégage par la droite.

On sait (v. n° 282-*b*) que les curseurs décrivent des obliques dont la pente diminue au fur et à mesure que les essieux se dégagent. Nous avons cherché (fig. III) les directions successives de ces obliques et, à cet effet, nous conformant à ce qui a été démontré plus haut (v. n° 282), nous avons opéré comme suit :

1° (fig. III) on a porté à la suite les unes des autres, à partir de W, *la moitié* de chacune des charges des essieux, ce qui a donné les points C, D, E....S sur la verticale d'origine.

2° On a joint les points ainsi obtenus au point O, centre de la poutre, ce qui a donné les directions des *obliques de charges partielles.*

3° On a placé (v. en haut de l'épure) en S′, R′ Q′, P′.... C′ les essieux dans l'ordre de dégagement, c'est-à-dire « *Tête en queue* », et, par ces points S′ M′....., on a mené des verticales.

4° Partant alors du curseur C_0, on a tracé C_0C_s (fig. I) parallèle à l'oblique OS (fig. III) jusqu'à sa rencontre avec la verticale S′, ce qui a donné le curseur C_s. — On a tracé C_s — C_r parallèle à l'oblique OR (fig. III) jusqu'à sa rencontre avec la verticale R′ et ainsi de suite, de proche en proche, ce qui a donné la trajectoire du premier curseur C_0 — Cs — Cr..... Ci — Ch..... Cf — Ce — Cd — Ce. Telle est la *trajectoire-type*. Nous la piquons sur une feuille de papier fort et nous la découpons afin de nous en servir comme patron pour les autres curseurs.

(*d*) **Remarques.** — 1° La place nous faisant défaut, nous avons dû reporter ailleurs (fig. IV) la partie inférieure de droite de notre épure totale.

2° La dernière position Cc du curseur doit se confondre avec le point W′ (fig. IV) qui forme l'extrémité inférieure de l'oblique de charge permanente. En effet, comme à cet instant il n'y a plus de convoi sur le pont, on ne doit plus trouver comme effort tranchant que celui qui est dû à la charge permanente. Cela fournit une vérification précieuse du tracé.

3° En y regardant de près, on voit que cette *trajectoire-type* n'est autre chose qu'un funiculaire qui, avec la distance polaire $d = 1/2\,l = AO$, serait construit sur les *demi-charges* des essieux. Par conséquent, on pourrait avantageusement le déduire du grand funiculaire de la fig. 298.

On reconnaîtra facilement que les ordonnées $R''Cr$ — $Q''Cq$ — $P''Cp$... etc. de cette trajectoire, comptées à partir de la corde C_0W', sont égales *au quart* des ordonnées du grand funiculaire de la fig. 298 ; en prenant ce dernier « *tête en queue* ». Ce coefficient un quart provient : 1° de ce que l'échelle des forces est la moitié de celle de la fig. 298, et 2° de ce que les forces du funiculaire qui constitue cette trajectoire-type sont moitié aussi de celles du grand funiculaire de la fig. 298, tandis que la distance polaire est la même.

En résumé, on voit que le tracé (fig. III) des obliques de charges partielles est inutile, et qu'il suffit de prendre à partir de C_0W' (fig. 301) des ordonnées égales au quart des ordonnées du funiculaire initial ACD...DSB de la fig. 298, *mais en comptant ces dernières à partir de la base* BC (1).

(*e*) **Trajectoires des autres curseurs.** — Il résulte de la théorie exposée aux nos 281 et 282, que les autres curseurs décriront des trajectoires de même patron que celle du curseur C_0. Par conséquent, on n'aura, pour les obtenir, qu'à placer le point C_0 du patron découpé, indiqué ci-dessus, successivement en C_0' — D_0 et D'_0 — E_0 et E'_0.... etc. On l'orientera convenablement, ce qui sera facile en traçant des verticales et des horizontales de repère, aussi bien sur l'épure que sur le patron. En suivant alors, avec un crayon, le contour du patron, on aura toutes les trajectoires.

(*f*) **Diagramme définitif.** — 1° Nous n'avons pas tracé les trajectoires lorsqu'il était évident qu'elles restaient à l'intérieur de la trajectoire-type ; nous n'avons fait que les amorcer.

2° Lorsque nous sommes arrivés aux curseurs L_0 et L'_0, nous avons dû retourner le patron.

3° Il est à remarquer que, sur notre épure, tandis que pour les efforts positifs (fig. I) c'est la trajectoire de gauche de l'essieu de tête C qui l'emporte sur les autres, pour les efforts négatifs (fig. III), c'est la trajectoire de droite L'_0 — $L's$ — $L'r$.....du 4e essieu de la 2e machine, qui se trouve en dehors et que même, vers l'extrémité, à partir du point z, c'est la trajectoire de l'essieu N (2e essieu du 2e tender) qui l'emporte à son tour.

4° Néanmoins, en retournant la figure autour de la verticale milieu OO′, on reconnaît que ce sont les efforts tranchants de gauche C_0 — Cs — Cq.... du 1er essieu de la 1re machine qui sont les plus importants et que ces efforts sont positifs.

Ce sont eux qui imposeront les dimensions de l'âme de la poutre, si celle-ci est pleine, ou celles de ses barres, si elle est évidée, c'est-à-dire à croisillons, à triangles ou en treillis.

(1) M. *Bertrand de Fontviolant* a donné une démonstration directe, fort élégante, de ce tracé. (Société des Ingénieurs civils. Séance du 19 février 1892).

CHAPITRE IX

SUPPORTS ET PIÈCES CHARGÉES DE BOUT

1re SECTION

INTRODUCTION

§ 1. — Frottement

316. **Lois du frottement.** — (*a*) **Description du phénomène.** — Lorsqu'un corps A repose sur un autre corps B par l'intermédiaire d'une certaine étendue de surface et qu'il exerce sur ce corps une certaine pression, on constate qu'un effort oblique par rapport à la surface de contact, appliqué au corps A, n'amène pas toujours le déplacement de ce corps ; il faut pour que le mouvement se produise que l'effort soit suffisamment grand. Il y a entre les deux corps une sorte d'adhérence.

On se fera une idée exagérée de ce qui se passe au contact des deux corps en opposant deux brosses, crin contre crin, et en essayant de les déplacer *tangentiellement*, c'est-à-dire parallèlement à la surface de contact ; on aura ainsi à vaincre la résistance des crins qui ont pénétré d'une brosse à l'autre dans les interstices les uns des autres et l'*effort tangentiel* qu'il faudra développer pour obtenir le mouvement sera d'autant plus grand que les brosses auront été pressées davantage l'une contre l'autre, c'est-à-dire que l'*effort normal* N aura été plus considérable.

(*b*) **Lois.** — Les lois du frottement ont été établies par **Coulomb** et par le général **Morin** ; en voici l'énoncé.

Nous désignons par *résistance de frottement* ou simplement par *frottement* la force tangentielle qu'il faut développer pour opérer le déplacement tangentiel relatif de deux surfaces en contact.

1° Le frottement dépend de la nature des surfaces en contact ; il est proportionnel à la composante normale de la pression qui s'exerce entre les deux corps.

2° Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

3° Il est indépendant de la vitesse du mouvement relatif.

On remarque aussi que le *frottement au départ*, c'est-à-dire celui que provoque le mouvement, est plus grand que le frottement qui se maintient pendant ce mouvement, et que l'on nomme le *frottement au mouvement*.

Dans les études que nous faisons, nous avons donc à tenir compte des frottements qui sont de véritables forces de réaction ; mais afin d'augmenter la sécurité nous considérerons de préférence la résistance de frottement au mouvement, qui est plus petite que celle du frottement au départ.

Si, en effet, un organe, qui était en équilibre, vient à être soumis à un effort accidentel qui le déplace d'une quantité si petite que ce soit, le frottement sur lequel nous serons en droit de compter ne sera plus que le frottement en mouvement.

Pour déterminer les valeurs du frottement dans les différents cas, voici comment on a procédé.

(*c*) **Expériences.** — Sur un plan horizontal constitué par

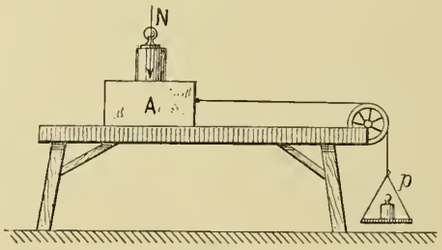


Fig. 301

une matière déterminée (dans une expérience, c'était du bois, dans une autre, du fer, etc.) on a placé une caisse A chargée d'un poids connu N et l'on a déterminé l'effort *p*

avec lequel il fallait tirer sur la caisse A pour obtenir le mouvement.

Le rapport $f = \frac{p}{N}$ donne le *coefficient de frottement* des deux surfaces en contact.

Dans le cas où le dessous de la caisse A était en bois et pressait sur un plan horizontal constitué également par du bois, on a trouvé $p = 0{,}50 \times N$ pour obtenir le démarrage et $p = 0{,}36\,N$ pour entretenir le mouvement.

En variant les conditions de l'expérience on a obtenu les nombres inscrits sur le tableau du nº 318.

On peut aussi se proposer de résoudre les deux problèmes suivants.

317. — **Problèmes sur le frottement.** — (*a*) **1er Problème.** — « Sous quelle inclinaison donnée à un plan de subs- « tance connue, un corps de substance également connue, « placé sur ce plan, commencera-t-il à démarrer ? »

Soient CA (fig. 302) le plan donné, G le centre de gravité du corps reposant sur ce plan, P le poids appliqué au point G.

Nous pourrons décomposer P en deux forces, l'une N normale à AC, l'autre T parallèle à ce plan. La force N sera la pression normale exercée par le corps sur le plan AC, tandis que T sera une force tangentielle appliquée au corps G et, si nous appelons f le coefficient de frottement dans ce cas, le mouvement commencera dès que nous aurons

$$T = fN \qquad \text{ou} \qquad \frac{T}{N} = f.$$

Mais la considération des triangles semblables GPN et ADC, nous donne :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{T}{N} = f.$$

Le démarrage se produira donc dès que le rapport AD : CD sera égal au coefficient de frottement ; mais ce rapport c'est la pente par mètre de la droite CA, pente qui est liée invariablement à l'angle ACD ; on peut donc dire que le *démarrage commence dès que la pente du plan incliné est égale au coefficient de frottement.*

L'angle ACD qui correspond à cette pente, et que nous désignerons par φ, est appelé *angle de frottement.*

(*b*) **Expérience à faire sur le chantier.** — Cette considération de l'angle de frottement permet, sur un chantier, de déterminer avec une approximation suffisante le coefficient de frottement relatif à deux substances données, deux pierres par exemple.

On place l'une au-dessus de l'autre les deux pierres considérées, en ayant soin de mettre en contact deux faces taillées ; puis, à l'aide d'un cric, ou par tout autre moyen, on soulève une des extrémités de la pierre inférieure jusqu'à ce que l'autre commence à démarrer ; on mesure alors avec la règle et avec le niveau la pente par mètre du plan de glissement de la pierre inférieure, cette pente par mètre est

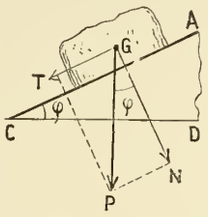


Fig. 302

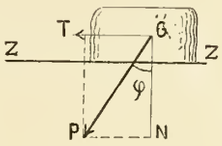


Fig. 303

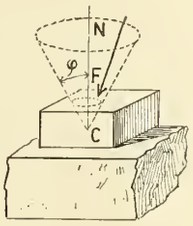


Fig. 304

précisément égale au coefficient de frottement des deux pierres.

(*c*) **2e Problème.** — « Quelle est l'inclinaison que devra « avoir une force appliquée à un corps de substance con- « nue, reposant sur un plan de substance également con- « nue, pour que le démarrage se produise ? »

Soit P (fig. 303) la force appliquée au centre de gravité G d'un corps reposant sur un plan ZZ, que nous pouvons supposer horizontal.

Décomposons cette force en deux autres, l'une N normale au plan de contact, l'autre T tangentielle.

D'après ce que nous avons vu plus haut, le mouvement ne se produira que lorsqu'on aura $T = fN$ (en désignant par f le coefficient de frottement) ou bien $T : N = f$.

Mais T : N, c'est la pente correspondant à l'angle PGN ; cet angle est donc l'angle de frottement φ.

(*d*) **Cône de sécurité au frottement.** — Nous pouvons donc dire que, lorsque deux corps sont pressés l'un contre l'autre (fig. 304), le glissement ne peut se produire que si la direction de la force fait avec la normale à la surface de contact des deux corps un angle supérieur à l'angle de frottement.

De telle sorte que si, autour de la normale ON, nous décrivons un cône de révolution ayant pour demi-angle au sommet l'angle de frottement φ, nous aurons ce qu'on pourrait appeler un *cône de sécurité* et tout effort tel que F situé à l'intérieur de ce cône ne produira pas de glissement, quelle que soit d'ailleurs son intensité.

En résumé, le frottement est un aide puissant pour la stabilité des constructions, puisqu'il empêche le glissement des matériaux sous l'action des forces obliques, quand l'inclinaison de ces forces ne dépasse pas une certaine limite.

318. **Coefficients de frottement.** — Nous avons réuni dans le tableau ci-dessous les coefficients de frottement que le constructeur a intérêt à connaître.

NATURE DES CORPS		Coefficients de Frottement au départ $f =$	au départ $\varphi =$	en mouvement $f =$	en mouvement $\varphi =$
Bois sur bois...	sans enduit	0,50	27°	0,36	20°
Bois sur métal..	sans enduit	0,60	31°	0,42	23°
Bois sur pierre .	sans enduit	0,64	32°	0,38	21°
Métal sur métal.	sans enduit	0,19	11°	0,18	10°
Métal sur pierre.	sans enduit	0,42	23°	0,30	17°
Bois sur bois...	avec graisse ou huile.	0,12	7°	0,07	4°
Bois sur métal.	avec graisse ou huile.				
Métal sur métal.	avec graisse ou huile.				

NATURE DES CORPS		Coefficients de Frottement au départ $f =$	au départ $\varphi =$	en mouvement $f =$	en mouvement $\varphi =$
Pierre sur pierre	à sec, sans mortier.	0,70 à 0,78	35° à 38°	0,60 à 0,65	31° à 32°
Brique sur pierre	à sec, sans mortier.	0,67	33°	0,60	31°
Pierre sur pierre avec mortier frais.		0,66	33°	0,49	26°
Pierre sur argile sèche		0,51	27°	»	»
Pierre sur argile humide...		0,34	19°	»	»
Chanvre sur bois.....		0,50 à 0,63	27° à 32°	0,45	24°

§ 2. — Théorie des polaires réciproques

319. Polaire d'un point. — (*a*) **Définitions.** — Etant donnés, dans un plan (fig. 305), un point M et une conique (ellipse, cercle, hyperbole, parabole), on appelle *polaire* du point M par rapport à la conique le lieu des points de rencontre F ou F′ des tangentes CF et DF ou C′F′ et D′F′ menées à la courbe aux points C et D ou C′ et D′, où elle est coupée par une transversale quelconque, MCD ou MC′D′, menée par le point M. On démontre que ce lieu est est une droite FF′. (V. Complément.)

Si le point M est extérieur à la courbe sa polaire FF′ passe par les points de contact T et T′ des tangentes menées de ce point à la courbe.

Inversement le point M est le *pôle* de la droite FF′. Si l'on se donnait, *a priori*, la droite FF′, pour obtenir son pôle M, il suffirait : 1° de prendre sur cette droite deux points quelconques F, ou F′; 2° de mener par ces points deux tangentes FC et FD, ou F′C′ et F′D′ ; 3° de tracer les cordes de contact CD et C′D′. Le pôle serait à la rencontre, M, de ces cordes de contact.

(*b*) **Equation de la polaire d'un point.** — Supposons que la courbe soit une ellipse rapportée à ses axes ; *a* et *b* étant les demi-axes, l'équation de l'ellipse est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soient X et Y les coordonnées du point M, l'équation de la polaire FF′ est

$$(2) \qquad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1. \qquad (\textit{Polaire})$$

Si l'on mène le diamètre MO, la polaire est parallèle au diamètre conjugué de cette ligne MO ; c'est-à-dire est parallèle aux tangentes menées aux extrémités de ce diamètre.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aussi bien à un point intérieur qu'à un point extérieur. (V. Complément.)

(*d*) **Antipolaires et antipoles.** — Si l'on prend le point M_1 symétrique du point M par rapport au centre O, sa polaire, F_1, F', se nommera l'*antipolaire* du point M, de même que le point M_1 symétrique de M sera l'*antipole* de la droite FF′ et que le point M sera l'antipole de la droit $F_1F'_1$.

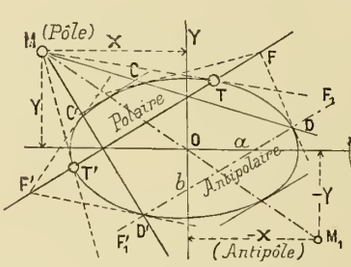


Fig. 305

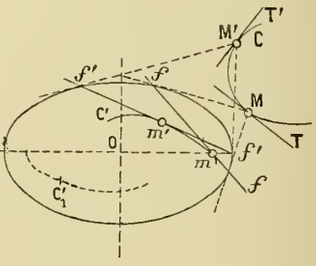


Fig. 306

X et Y étant les coordonnées du point M celles du point M_1 sont $-X$ et $-Y$; en substituant ces valeurs dans l'équation (2) ci-dessus on aura l'équation de l'antipolaire du point M

$$(3) \qquad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = -1. \qquad (\textit{Antipolaire})$$

320. Courbes polaires réciproques. — Supposons (fig. 306) que le point M soit mobile, et qu'on lui fasse décrire une certaine courbe C ; à chaque position M du point mobile répondra une polaire particulière *ff* et quand le

point M décrira la courbe C d'un mouvement continu, sa polaire *ff* enveloppera une autre courbe C′ qui sera le lieu de ses intersections successives. Si l'on mène la tangente MT à la courbe C, le pôle *m* de cette tangente se trouvera sur la polaire *ff* du point M, et ce sera le point où la courbe C′ touche la polaire *ff* dont elle est l'enveloppe. Les courbes C et C′ sont dites *polaires réciproques* ; chacune d'elles peut donc être définie de deux manières, savoir :

1° Comme étant le lieu des pôles *m* ou *m′* des tangentes MT ou M′T′ menées à l'autre courbe ;

2° Comme étant l'enveloppe des polaires *mf* ou *m′f′* des points M ou M′ de l'autre courbe.

De même qu'une courbe C possède sa courbe polaire réciproque C′, de même elle possède son *antipolaire réciproque* C_1' (fig. 306), laquelle est symétrique, par rapport au centre, de la polaire réciproque C′. Elle peut encore être considérée comme la polaire réciproque d'une courbe qui serait symétrique de la courbe donnée C. (La fig. 306 ne donne pas cette symétrique de la courbe C.)

2e SECTION

TRANSMISSION DES PRESSIONS PAR CONTACT

§ 3. — TRANSMISSION DES PRESSIONS PAR SURFACES PLANES

321. Position de la question. — Imaginons (fig. 307-I) que deux solides S et S′ soient en contact réciproque par l'intermédiaire d'une surface plane AB et que le premier solide transmette au second des efforts dont la résultante soit la force P, que nous supposerons appliquée en un point quelconque K et, pour plus de généralité, dirigée d'une manière quelconque. Nous nous proposons d'étudier les déformations éprouvées par le solide S′ aux environs du plan de séparation AB, et de déduire de cette étude la grandeur des efforts moléculaires développés dans ces mêmes environs.

A cet effet nous considérerons la section plane CD infiniment voisine du plan de séparation AB ; nous nous figurerons le *bi-plateau* qui aurait pour faces ces deux plans AB et CD et nous rechercherons la loi suivant laquelle se fera l'extension ou la compression des fibres qui les relient ; nous en déduirons les efforts fibraires.

Nous commencerons par décomposer la force P en deux autres ; l'une sera normale au plateau de séparation ; ce sera la *composante normale* N ; l'autre lui sera parallèle ; ce sera la *composante tangentielle* T.

Dès lors deux cas peuvent se présenter :

1er Cas. — Surfaces posées. — Lorsqu'il y a simplement contact, comme dans le cas de deux pierres posées l'une sur l'autre sans interposition de mortier adhérent, et si, de plus, la composante normale N tend à rapprocher les pierres et non à les écarter l'une de l'autre, il y aura une compression due à la force N tandis que la composante tangentielle T tendra à faire glisser les surfaces l'une sur l'autre et à vaincre le frottement.

On sait (v. n° 317 lois du frottement) que ce glissement n'est pas à craindre tant que la force P reste contenue dans l'intérieur du *cône de sécurité au frottement*, cône qui a pour

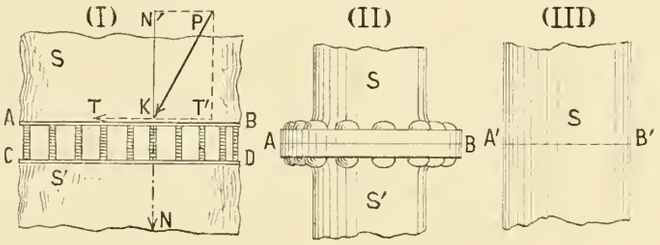


Fig. 307

axe la normale et dont le demi-angle au sommet est égal à l'angle de frottement.

Si la force P tendait à écarter les pierres, rien ne s'opposerait à leur séparation.

2e Cas. — Surfaces rivées. — Supposons que les plans de transmission soient adhérents. Telles seraient par exemple deux surfaces rivées (fig. II) ou bien encore un plan fictif A′B′ (fig. III) que l'on supposerait tracé dans la masse d'une pièce homogène. Alors, quel que soit le sens (traction ou compression) de la composante normale N, elle mettra toujours en jeu des efforts moléculaires de tension longitudinale. Quant à la composante tangentielle, au lieu de tendre à produire un glissement accompagné de frottement, c'est sous forme d'*effort tranchant* qu'elle tendra à produire des

effets de cisaillement, soit sur les rivets de jonction (fig II), soit sur la matière même de la pièce (fig. III).

Nous ne nous occuperons d'abord que de la composante normale N.

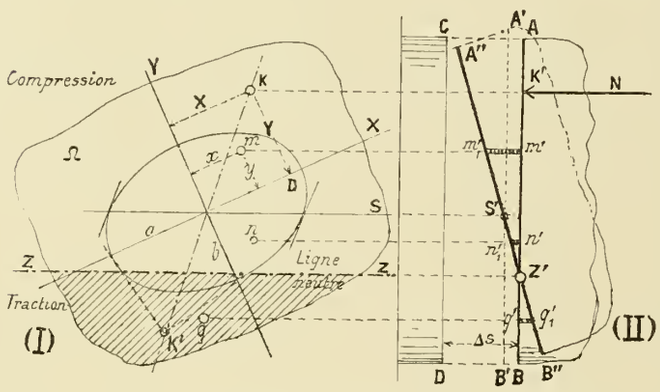
322. **Mise en équation du problème.** — (*a*) **Données.** — Soit AB (fig. 308-II) le plan de séparation de deux solides, plan que nous assimilons à la face supérieure du bi-plateau qui formerait, en quelque sorte, la limite du solide inférieur; soit CD la face inférieure de ce bi-plateau séparée de la première par la distance ΔS. OX et OY sont les axes principaux d'inertie de la surface de séparation ; I_x et I_y sont ses moments principaux d'inertie, a et b sont les demi-axes de son ellipse d'inertie; Ω est sa surface.

Au point K, du plateau supérieur, point que nous nommerons le *centre de pression* et dont les coordonnées seront désignées par X et Y, nous appliquons un force normale N.

Nous prenons une fibre quelconque m (dont les coordonnées sont x et y), et nous allons calculer l'effort unitaire (traction ou compression) auquel elle est soumise.

Pour cela : transportons la force N au centre de gravité O, en la faisant passer d'abord par le pied D de l'ordonnée du centre de pression, et en la déplaçant finalement de D en O.

(*b*) **Compression générale.** — Une fois arrivé en O elle donne lieu à une translation générale du plateau qui ramène ce dernier de la position AB à celle A'B' (fig. II). Cette trans-



Nota. — Ajouter sur cette figure la lettre O, oubliée au croisement des axes X et Y.

Fig. 308

lation a pour effet de comprimer également toutes les fibres, et en particulier la fibre m qui nous occupe.

Elle subit donc de ce chef un premier effort unitaire p' qui a pour expression

$$p' = \frac{N}{\Omega}.$$

(*c*) **Flexion.** — Mais le premier transport de K en D donne naissance à un couple qui a pour bras de levier Y, pour force N, dont le moment est par conséquent $N \times Y$ et qui tend à infléchir le plateau autour de l'axe des abscisses OX.

La formule de l'effort fibraire (v. n° 143) nous fait connaître l'effort unitaire p'' développé sur la fibre m, par le fait de ce couple ; il a pour expression

$$p'' = \frac{N \times Y \times y}{I_x}.$$

Enfin le second transport de D en O, donne naissance, autour de OY comme axe, à un autre couple de flexion qui a pour moment $N \times X$ et qui développe dans la même fibre m un effort unitaire p''' qui a pour expression

$$p''' = \frac{N \times X \times x}{I_y}.$$

(*d*) **Effort fibraire complexe.** — L'effort unitaire total, p, développé dans la fibre est donc égal à la somme algébrique $p = p' + p'' + p'''$, ce qui donne, en remplaçant I_x et I_y par leurs valeurs en fonction des rayons principaux de giration a et b, valeurs qui sont :

$$I_x = \Omega b^2 \qquad \text{et} \qquad I_y = \Omega a^2,$$

$$(1) \qquad p = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2}\right).$$

Telle est la formule dite de l'*effort fibraire complexe;* nous lui donnons le qualificatif « complexe » pour indiquer que cet effort résulte d'une compression générale combinée avec une flexion simple.

La parenthèse est une sorte de coefficient algébrique de majoration, qui montre bien comment l'effort unitaire qui serait $p' = N : \Omega$, si la compression N agissait exactement au centre de gravité, est modifié par ce fait que la compression agit en un point K situé *hors du centre* et dont les coordonnées sont X et Y. On pourrait, à ce titre, lui donner le nom de *coefficient d'excentricité.*

(*e*) **Combinaison de la compression et de la flexion.** — Analysons le phénomène de plus près, et, pour cela, transportons directement la force N du point K au point O sans passer par l'intermédiaire du point D ; nous n'avons plus alors à considérer qu'un seul couple, qui serait d'ailleurs le couple résultant des deux couples de tout à l'heure, et dont le plan aurait pour trace sur le plateau la ligne OK (fig. I).

La force N une fois transportée en O donne naissance à la translation, en bloc, du plateau; le couple donne lieu à une flexion simple qui, d'après la théorie générale de la flexion (v. n° 140-*c*), a pour axe d'infléchissement le diamètre OS, conjugué de OK dans l'ellipse d'inertie.

Cela posé, donnons (fig. II) une élévation des deux solides en contact, sur un plan vertical de projection perpendiculaire à l'axe d'infléchissement OS. On y voit le plateau passant, par translation, de la position AB à la position A'B', et ensuite arrivant, par rotation, à la position définitive A''B''.

Les fibres telles que m qui sont du même côté de l'axe

d'infléchissement OS que la force N sont doublement accourcies et par suite doublement comprimées ; quant aux autres, telles que n, qui sont placées de l'autre côté de l'axe, la translation les accourcit, mais la flexion les allonge ; de sorte que, pour elles, la compression non seulement est diminuée, comme il arrive pour la fibre n, mais encore, comme il arrive pour la fibre q, *si les surfaces sont rivées*, peut être changée en traction, ou bien, *si les surfaces sont posées*, peut être annulée, ce qui ramène la fibre à l'état neutre.

323. Ligne neutre. — Il existera donc, à l'intersection ZZ′ du plateau AB dans sa position initiale et de ce même plateau A″B″ dans sa position finale, une *ligne neutre*, pour laquelle les fibres ne supporteront aucun effort.

Cette analyse élémentaire nous prouve que cette ligne neutre à sa direction conjuguée de celle de la ligne OK qui joint le centre de pression K au centre de gravité O de la surface de séparation. Nous allons en déterminer analytiquement la position exacte.

Il suffit, pour cela, de chercher le lieu des points pour lesquels l'effort unitaire total p, donné par l'équation (1), est nul.

Egalons donc à zéro le second membre de cette équation et nous aurons une relation entre les coordonnées x et y des points qui sont à l'état neutre; on obtient ainsi l'équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = -1. \qquad (2)$$

Elle représente une droite qui est la *ligne neutre*. On voit (v. n° 319-*c*) que cette ligne ZZ′ est, par rapport à l'ellipse d'inertie, *l'anti-polaire* du *centre de pression* K, point dont les coordonnées sont X et Y.

§ 4. — Théorie du noyau central

321. Variations dans la position de la ligne neutre. — Faisons tout d'abord la différence entre les *surfaces rivées* et les *surfaces posées*.

(*a*) **Surfaces rivées.** — Si les surfaces sont rivées et si la ligne neutre recoupe le contour de la surface, comme sur la fig. 308 (ce qui arrivera si le centre de pression est suffisamment éloigné du centre de gravité), elle divisera la surface en deux zônes : la *zône de compression* et la zône de *traction* ou *d'extension*, cette dernière étant moins étendue que la première. Sur la fig. 308-I, cette dernière zône est recouverte par des hachures. Néanmoins, chacune de ces deux zônes est *active* au point de vue des efforts et concourt à la résistance de la pièce ; la fibre la plus fatiguée sera dans la zône de compression et ce sera celle qui est la plus éloignée de la ligne neutre; c'est pour elle que la résistance de sécurité à la compression ne devra pas être dépassée.

(*b*) **Surfaces posées.** — Si les surfaces sont posées, les choses se passeront tout autrement :

1er Cas. — Le centre de pression K (fig. 309) est placé suffisamment près du centre de gravité O pour que la ligne neutre ZZ tombe en dehors du contour; alors toute la surface est comprimée et par conséquent est *active*. En menant au contour de la surface deux tangentes parallèles à cette ligne neutre, les points de contact donneront en D′ la fibre qui fatigue le moins et en D celle qui fatigue le plus; et toutes les deux seront comprimées.

2e Cas. — Le centre de pression s'éloigne peu à peu du centre de gravité. La ligne neutre se rapproche du contour et arrive en Z_1Z_1 à lui être tangente, lorsque le centre de pression est en K_1 ; on dit alors que l'on a une ligne neutre *tangentielle* Z_1Z_1. La surface est encore active dans sa totalité; mais nous sommes à la limite d'activité totale.

3e Cas. — Le centre de pression s'éloigne encore et vient, par exemple, en K_2; alors la ligne neutre théorique Z_2Z_2 (nous entendons par là celle qui existerait si les surfaces étaient rivées) vient à recouper le contour.

A ce moment toute une zône, qui dans le cas des surfaces rivées eût été active, se décolle pour ainsi dire et devient *inerte;* elle ne contribue plus à la résistance générale.

La vraie ligne neutre n'est pas Z_2Z_2, mais une autre ligne $Z'_2Z'_2$ qui ne lui est pas parallèle et qui est plus rapprochée qu'elle du centre de gravité.

En réalité c'est une ligne *de décollement*.

(*c*) **Ligne de décollement.** — Si l'on tient à définir, dans ce cas, la ligne neutre vraie, on dira :

« La *ligne neutre vraie*, ou ligne de décollement, est une « ligne telle que pour la zône active qu'elle détache dans

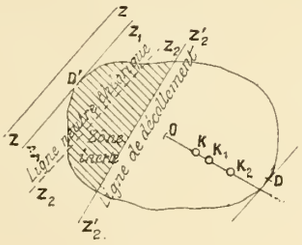


Fig. 309

« l'aire totale elle joue le rôle de ligne neutre tangentielle.»

La détermination rigoureuse de cette ligne de décollement est en général très difficile à faire ; on ne peut y arriver,

plus ou moins facilement d'ailleurs, que dans les cas spéciaux où les surfaces de contact sont simples et définies géométriquement (rectangle, cercle...).

En tout cas, dès que la ligne neutre est sécante il est facile de comprendre que, étant donné qu'une zône devient inerte, et ne contribue plus à la résistance, il faut que la zône active y contribue davantage, ce qui entraîne des chances de plus en plus grandes d'écrasement pour les fibres extrêmes.

Nous verrons plus loin, dans le cas d'un rectangle, suivant quelle loi croissent les efforts de la fibre extrême lorsque, par le fait de l'excentricité de plus en plus grande du centre de pression, la ligne neutre vraie envahit de plus en plus la surface de contact.

325. **Noyau central.** — (*a*) **Définition.** — « Le noyau « central est la zône dans laquelle doit se maintenir le cen- « tre de pression, pour que la ligne neutre correspondante « soit extérieure, ou, à la rigueur, tangentielle au contour « de la surface de contact. »

Il résulte de ce qui précède que pour délimiter le noyau central on devra faire l'inverse du tracé de l'anti-polaire ; c'est-à-dire :

1° Mener toutes les tangentes possible au contour de portée ;

2° Chercher chaque fois le pôle de ces tangentes par rapport à l'ellipse d'inertie.

3° Prendre le symétrique de ce pôle par rapport au centre de gravité; cela donnera l'anti-pôle, lequel sera un point du contour du noyau central.

On pourrait opérer autrement, comme suit :

1° Prendre successivement tous les points du contour extérieur ;

2° Construire la polaire de chacun de ces points ;

3° En prendre la symétrique, ce qui donnera l'anti-polaire ; et

4° Le noyau central sera l'enveloppe de toutes ces anti-polaires.

En un mot le noyau central sera limité par l'*anti-polaire réciproque* du contour extérieur des surfaces en contact.

(*b*) **Formes diverses du noyau central.** — Si le contour de portée ABCDEF, fig. 310, est un polygone, généralement convexe, le noyau central sera formé par les anti-polaires *a*, *b*, *c*, *d*, *e* des sommets. A toute droite du contour de portée correspondra un sommet du noyau central et inversement. Si l'un des côtés rectilignes CD du contour de portée est remplacé par une courbe CMD, il y aura aussi une portion *m* du noyau qui sera curviligne.

(*c*) **Contours symétriques.** — Si, ce qui est le cas presque général, le contour de portée est symétrique (fig. 311) par rapport à un point, lequel sera son centre de gravité, il est inutile de chercher son anti-polaire réciproque, elle se confondrait avec la polaire directe.

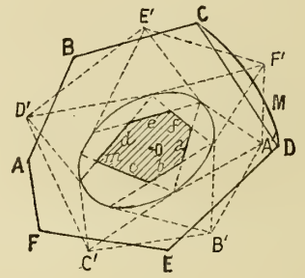


Fig. 310

326. **Contours de portée, à deux axes, chargés symétriquement.** — (*a*) **Largeur α du noyau central.** — Presque toujours les contours de portée sont symétriques par rapport à deux axes OX et OY ; ces derniers sont alors les axes d'inertie. De plus, les charges étant symétriques, le centre de pression tombe sur l'un de ces axes. Calculons la limite du noyau central sur chacun de ces axes et désignons-la par la lettre α. Il est évident que plus cette limite α sera grande et plus le contour de portée aura de valeur au point de vue de la stabilité; moins il y aura de chances pour que le centre de pression sorte en dehors du noyau central et moins il y aura de probabilités de décollement. Calculons α.

Soient a et b (fig. 311) les axes d'inertie d'un contour à deux axes ; soit, comme à l'ordinaire, v la distance de sa fibre la plus éloignée par rapport à l'axe OY.

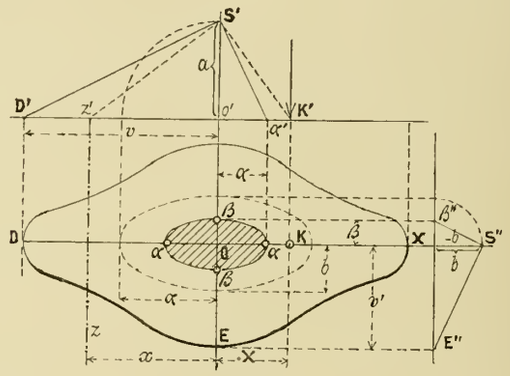


Fig. 311

Faisons voyager le centre de pression sur l'axe OX et soit K le centre de pression dans une position quelconque ; son abscisse est X, son ordonnée Y est nulle.

Cherchons la position de la ligne neutre répondant à ce centre de pression. Dans l'équation générale de la ligne neutre (v. n° 323), qui était

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = -1,$$

faisons $Y = 0$, elle devient, après simplification,

$$xX = -a^2 \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{a^2}{X} \qquad X = -\frac{a^2}{x}.$$

Elle représente une droite ZZ′ parallèle à l'axe OY. Sa distance au centre, x, se construit, comme suit, par une moyenne proportionnelle.

On porte de O′ en S′, sur une verticale passant par le centre, une longueur égale au demi-axe a de l'ellipse d'inertie. On joint par une droite les points K′ et S′, et on mène S′Z′ perpendiculaire à cette droite ; cela donne en Z′Z la ligne neutre.

Si le centre de pression vient en D, c'est-à-dire à la distance $-v$, la construction s'applique encore et donne en $\alpha'\alpha$ la limite du noyau central. On aura donc, en faisant $x = v$ dans la formule qui donne l'abscisse X du centre de pression :

$$(1) \qquad \alpha = -\frac{a^2}{v}.$$

Et en remplaçant a^2 par sa valeur connue $a^2 = I : \Omega$, I étant le moment d'inertie et Ω l'aire du contour de portée,

$$(2) \qquad \alpha = -\frac{I}{v\Omega}.$$

Il résulte de ce qui précède que α est en quelque sorte l'*indice de stabilité* de la section de portée. Si nous nous reportons aux théories précédentes, nous pouvons établir les considérations suivantes :

I (moment d'inertie), donne en quelque sorte, pour une section déterminée, une mesure de la difficulté que l'on éprouve à déformer, par flexion simple, la pièce qui possède cette section. C'est pourquoi nous disions que I était l'*indice d'inflexibilité* de la section.

$I : v$ (moment de résistance) serait l'*indice de résistance* de la section ; enfin :

$I : v$, divisé en outre par Ω c'est-à-dire $I : v\Omega$, serait l'*indice de stabilité*.

327. **Noyau central des sections pleines.** — (*a*) **Rectangle plein.** — Soient α et β (fig. 312-I) les deux limites du noyau central comptées suivant les axes, on aura, d'après ce qui précède, $\alpha = I : v\Omega$ ce qui donne en remplaçant I, v et Ω par leurs valeurs en fonction de a et de b,

$$(1) \qquad \alpha = \frac{a}{6} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{b}{6}.$$

On sait (v. n° 325-*b*) que, aux côtés du rectangle doivent correspondre les sommets α et α', β et β' du noyau, tandis qu'aux sommets du rectangle répondent des droites pour le noyau. Par conséquent le noyau central est un losange $\alpha\beta\alpha'\beta'$, dont les sommets sont placés aux tiers des axes.

La surface du noyau central est très petite, elle n'est que le 1/18ᵉ de celle du rectangle ; cela est facile à démontrer.

(*b*) **Cercle plein** (fig. 312-II). — On a pour le cercle en appelant R son rayon

$$I : v = 1/4\,\pi R^3 \qquad \text{et} \qquad \Omega = \pi R^2, \qquad \text{donc}$$

$$(2) \qquad \alpha = \frac{R}{4}.$$

Le noyau central d'un cercle est un autre cercle dont la surface est le 1/16ᵉ de la sienne. On voit combien, dans

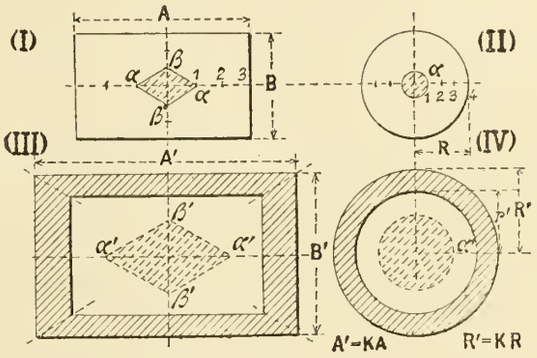


Fig. 312

une colonne en pierre, formée de tambours superposés, la pression a peu d'espace pour se mouvoir si l'on veut éviter des décollements d'assises.

328. **Noyau central des sections évidées** (fig. 312). — Etudions d'abord le cercle évidé et comparons la dimension α' de son noyau central à celle α du noyau central du cercle plein de même surface.

Soient fig. IV R′ le rayon extérieur et r' le rayon intérieur. Le moment d'inertie I′ sera

$$I' = \frac{\pi(R'^4 - r'^4)}{4}. \qquad \text{On a :}$$

$$\Omega = \pi(R'^2 - r'^2) \qquad \text{et} \qquad v' = R'; \qquad \text{par suite}$$

$$(1) \qquad \alpha' = \frac{I'}{\Omega v'} = \frac{R'^4 - r'^4}{4R'(R'^2 - r'^2)} = \frac{R'^2 + r'^2}{4R'}.$$

Pour le cercle plein, on avait

$$\alpha = \frac{R}{4}.$$

Pour apprécier les avantages du cercle évidé, cherchons le rapport $\alpha' : \alpha$; exprimons que la surface est la même, c'est-à-dire que l'on a : $R'^2 - r'^2 = R^2$, ce qui entraîne : $r'^2 = R'^2 - R^2$, il vient, après simplifications, en posant $K = R' : R$,

$$(2) \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = 2\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'} = 2K - \frac{1}{K}.$$

Le tableau suivant donne les valeurs du rapport $\alpha' : \alpha$, pour des valeurs de K variant de 1,5 à 6.

K, Rapport des diamètres ; $\alpha' : \alpha$, rapport des noyaux centraux.

K =	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\frac{\alpha'}{\alpha}$ =	2,33	3,50	4,80	5,67	6,71	7,75	8,78	9,80	10,82	11,83

On voit que les dimensions du noyau central croissent un peu moins vite que deux fois celles de la pièce.

On arriverait au même résultat pour le rectangle évidé (fig. III) à la condition que ses dimensions, aussi bien extérieures qu'intérieures, restassent proportionnelles à celles du rectangle plein de même surface de section.

Cette discussion montre tout l'avantage qu'il y a, malgré une légère majoration de prix pour les pièces de fonte creuses, coulées à noyau, à employer des supports creux plutôt que pleins. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

§ 5. — Pressions de sécurité

329. **Variations de l'effort dangereux avec le déplacement du centre de pression.** — Lorsque le centre de pression coïncide avec le centre de gravité la pression N se répartit également sur toute la surface et l'effort unitaire $N : \Omega$ est le même, aussi bien sur le contour qu'en un point quelconque de son intérieur.

Supposons que le centre de pression se déplace sur l'un des axes de symétrie. Lorsqu'il est arrivé à la distance X, la fibre dangereuse est celle qui, située du même côté que lui, est la plus éloignée du centre de gravité.

v étant l'abscisse de cette fibre, cette pression maxima (p max) a pour valeur (v. n° 322-*b*), en faisant $Y = 0$:

$$(1) \qquad p_{(max)} = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{Xv}{a^2}\right) = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{X}{\alpha}\right).$$

On se rappelle que α, demi-largeur du noyau central, a pour expression

$$\alpha = \frac{I}{v \times \Omega} = \frac{a^2}{v}.$$

C'est une compression ; la fibre opposée subit un effort unitaire que l'on obtiendra en changeant v en $-v$, c'est-à-dire α en $-\alpha$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$(2) \qquad p_{(min)} = \frac{N}{\Omega}\left(1 - \frac{Xv}{a^2}\right) = \frac{N}{\Omega}\left(1 - \frac{X}{\alpha}\right).$$

Et il est à remarquer que la moyenne des deux tensions est

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(p_{max} + p_{min}) = \frac{N}{\Omega}.$$

Lorsque le centre de pression atteint la limite du noyau central, alors $X = \alpha$ et $X : \alpha = 1$, d'où l'on conclut :

$$p_{max} = 2\frac{\Omega}{N} \qquad \text{et} \qquad p_{min} = 0.$$

La pression sur l'arête dangereuse a doublé ; celle sur l'arête opposée s'est annulée et la ligne neutre est alors *tangentielle* au contour.

Si le centre de pression s'écarte encore plus du centre de gravité, la ligne neutre envahit le contour. Dans le cas des surfaces rivées, une zône de traction se déclare ; la fibre dangereuse de cette zône est tirée au lieu d'être comprimée : la parenthèse de la formule (2) devient négative ; mais l'équation (3), de la moyenne des tensions, est toujours satisfaite.

Dans le cas des surfaces posées une zône inerte se déclare, séparée de la zône active par une ligne de décollement. A mesure que le centre de pression se rapproche du contour, la ligne de décollement fait de même, mais elle marche plus vite que lui et tend à le rattraper, ce qu'elle fait à l'instant où le centre de pression atteint le contour. La zône active, qui est tout entière comprimée, voit donc son étendue se réduire de plus en plus. L'arête dangereuse subit un effort qui croît très rapidement et elle s'écrase, entraînant avec elle l'effondrement de toute la pièce, bien avant même que le centre de pression n'ait atteint le contour extérieur.

330. **Position et variation de la ligne de décollement dans un rectangle.** — Au moment où la ligne neutre atteint l'arête CC′ du rectangle (fig. 313) le centre de pression est en K au tiers de la longueur totale. Par conséquent lorsque le centre de pression K′ se rapprochera plus encore de l'arête D, la ligne neutre ZZ′, qui devient alors une ligne de

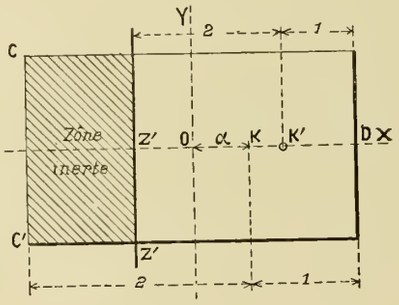


Fig. 313

décollement, doit se placer à une distance DZ′ du point D qui soit toujours le triple de la distance DK′. C'est pourquoi elle parcourt trois fois plus de chemin que le point K′. Une fois commencée cette sorte de poursuite entre la ligne de décollement et le centre de pression, la tension unitaire sur la fibre D est toujours égale à $2N : \Omega'$; Ω' étant la surface active ZZ′D. Or cette dernière surface décroît propor-

tionnellement à Z'D ou encore à K'D qui est le tiers de Z'D; par conséquent la compression unitaire sur la fibre D croît en raison inverse de la distance K'D du centre de pression à l'arête dangereuse.

Remarque. — Inversement, si l'on voulait, à partir de l'instant où le décollement commence, faire en sorte que la pression unitaire sur l'arête extrême restât constante, il faudrait faire décroître la pression normale proportionnellement à la distance DK'. Cette remarque sera utilisée tout à l'heure.

331. Représentative des pressions compatibles avec la sécurité sur l'arête. — Proposons-nous de déterminer, pour chaque position du centre de pression, quelle est la grandeur que doit posséder cette pression pour que l'arête la plus fatiguée ait à supporter un effort unitaire égal à la résistance de sécurité. La représentative de ces pressions sera ce que nous nommerons la *courbe* (ou hyperbole) *de sécurité.*

(*a*) **Rectangle plein.** — Raisonnons d'abord sur un rectangle plein (fig. 314-I). Soit Z la hauteur inconnue de la verticale, K'*m*', représentative de la pression de sécurité répondant à une abscisse X du centre de pression K. Soit R la résistance de sécurité adoptée. Prenons la formule (1) du n° 329 qui donne la pression unitaire sur l'arête SS, dans le cas d'une surface de portée symétrique et chargée symétriquement; faisons dans cette formule $p = R$ et $N = Z$, il vient :

$$R = \frac{Z}{\Omega}\left(1 + \frac{X}{\alpha}\right); \qquad \text{ou}$$

$$(1) \qquad Z\left(1 + \frac{X}{\alpha}\right) = R\Omega.$$

Cette équation entre les coordonnées Z et X de l'extrémité *m*' de l'ordonnée représentative de la pression de sécurité représente une hyperbole (v. Comp^t), qui est la courbe de sécurité cherchée.

Ses asymptotes sont les droites

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{X}{\alpha} = 0, \quad \text{ou} \quad X = -\alpha,$$

c'est-à-dire l'axe des *x* et une verticale $\alpha''L'$ passant par l'extrémité du noyau central qui est opposée à l'arête dangereuse SS.

Ayant les asymptotes et un point N_0, on trace facilement cette hyperbole. Le point N_0 répond à une pression centrale ; il est à une hauteur $nN_0 = R\Omega$, calculable *a priori*. Si dans l'équation (1) de la courbe on fait $X = \alpha$, on obtient

$$Z \quad \text{ou} \quad N_\alpha = \frac{R\Omega}{2}.$$

Cette relation sera toujours vraie, quelle que soit la figure du contour de portée : elle se traduit ainsi :

« Lorsque la pression de sécurité est appliquée à l'extré-
« mité du noyau central, elle doit être moitié de ce qu'elle
« serait si elle était appliquée au centre. »

L'hyperbole de sécurité atteint la verticale d'extrémité en un point S', dont la hauteur C'S' est le quart de l'ordonnée milieu N_0 ; mais cela n'est vrai que pour le rectangle plein.

La fig. I donne la courbe de sécurité pour deux surfaces rivées ; si elles sont simplement posées (fig. II), l'hy-

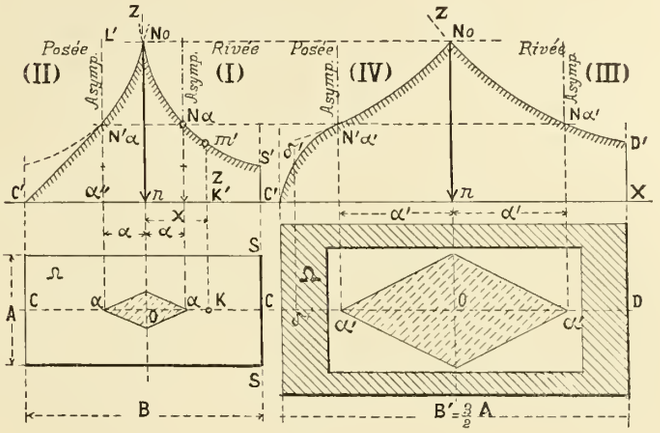


Fig. 314

perbole de sécurité n'est à conserver que jusqu'en N'_α à la limite du noyau central; à partir de ce point (en vertu de la remarque finale du numéro précédent), elle doit se continuer par une droite $N'_\alpha C'$ aboutissant à l'extrémité du rectangle et qui, d'ailleurs, est tangente à l'hyperbole.

(*b*) **Rectangle évidé.** — Sur les fig. III et IV on a figuré les courbes de sécurité pour un rectangle évidé, de même surface que le précédent. Le rapport de similitude est $K = 3/2$; par conséquent, la largeur α' de noyau central est égale à la largeur précédente α multipliée par 2,33. (V. tableau du n° 328.)

La pression de sécurité No pour le centre est la même que tout à l'heure ; seulement les hyperboles ayant leurs asymptotes passant par le sommet du noyau central α' laissent entre elles et l'axe des *x* une plus grande surface de sécurité.

Sur la fig. III (surfaces rivées) l'hyperbole est à conserver jusqu'en D' à la limite du rectangle ; sur la fig. IV (surfaces posées) à partir du point N'_α, limite du noyau central, il faut lui substituer une courbe $N'_\alpha\delta'$ qui lui est tangente et qui se termine par une petite ligne droite $\delta'C'$. Le point de raccordement δ' est situé au tiers de l'épaisseur de la partie pleine ; la pente de cette droite $\delta'C'$ est les 9/4 de la pente de la ligne $C'N'_\alpha$ de la fig. II (9/4 étant le carré du rapport de similitude 3/2).

L'aspect de ces courbes de sécurité montre bien l'avantage du rectangle évidé sur le rectangle plein (1).

(1) Ce tracé des courbes de sécurité a été donné, pour la première fois, en 1864, par notre regretté camarade et ami *Alfred* **Durand-Claye**, alors Elève Ingénieur des Ponts et Chaussées. Il en a fait la base d'une élégante théorie de la stabilité des arcs et des voûtes.

3e SECTION

RÉSISTANCE A L'ABOUTEMENT

§ 6. — Pièces aboutées

332. **Le flambage.** — (*a*) **Définitions.** — On nomme *pièces aboutées* ou encore *pièces chargées de bout* celles qui, ayant une longueur suffisamment grande par rapport à leur largeur ou à leur épaisseur, subissent une compression dans le sens de cette longueur. Tels sont les supports verticaux, les colonnes, les arbalétriers d'une ferme, certaines pièces que nous apprendrons à reconnaître et à calculer dans les poutres en treillis, etc.

Ces pièces sont susceptibles de *flamber*, c'est-à-dire (fig. 315-A) de se courber.

(*b*) **Danger du flambage.** — On comprend que si une flèche initiale f, si petite qu'elle soit, a commencé à se produire en un point quelconque, la compression P, continuant à agir, développe dans la section CD, à laquelle répond cette flèche, un moment fléchissant $M = P \times f$ qui augmente la première flèche prise. Cette flèche augmentant, le moment, qui lui est toujours proportionnel, augmente à son tour et ainsi de suite. On conçoit que si la résistance de la pièce est suffisamment grande une position d'équilibre s'établira et que la fibre neutre prendra une élastique spéciale que l'on pourrait nommer une *élastique de flambage*. Mais, en général, la fibre fatiguée dans la section dangereuse aura dépassé la limite de rupture avant que l'équilibre ne soit établi et la pièce se sera rompue par flexion et par compression combinées.

Nous nommerons ce genre de rupture un *effondrement*.

(*c*) **Réduction à apporter aux résistances de sécurité.** — Si nous avons à faire à ce que nous nommerons une *pièce courte* ou encore un *bloc*, c'est-à-dire à une pièce pour laquelle le flambage ne soit pas à redouter, nous calculerons sa section Ω, en utilisant la résistance ordinaire de sécurité R ; de telle sorte que si P est la charge totale à supporter, on aura :

$$\Omega R = P, \qquad \text{ou} \qquad \Omega = P : R.$$

Mais si nous avons ce que nous nommerons une *pièce longue*, c'est-à-dire susceptible de flamber, nous devrons alors frapper la résistance ordinaire de sécurité, R, d'un coefficient de réduction ; autrement dit, nous devrons adopter une nouvelle résistance de sécurité R′ plus petite et choisie de telle sorte qu'en écrivant :

$$\Omega R' = P, \qquad \text{d'où} \qquad \Omega = P : R',$$

ou bien la pièce ne flambera pas sous cette charge P, ou bien, si elle flambe, la fibre qui dans la pièce tout entière *travaillera le plus*, supportera un effort unitaire égal à l'ancienne résistance de sécurité R.

R′ sera la *résistance de sécurité à l'aboutement*.

Elle variera dans chaque cas ; elle dépendra de la longueur totale L de la pièce, des dimensions et de la forme de sa section ; elle dépendra aussi de son module d'élasticité. Car pour une substance facile à fléchir, c'est-à-dire qui possède un petit module d'élasticité, le flambage sera plus menaçant et la résistance de sécurité à adopter, R′, décroîtra lorsque la longueur augmentera, mais plus vite que pour une pièce possédant un grand module d'élasticité.

333. **Longueur de sinuosité.** — La longueur de la pièce entrera donc dans le coefficient de réduction à imposer à R ; ce ne sera pas toujours la longueur totale L, mais, souvent,

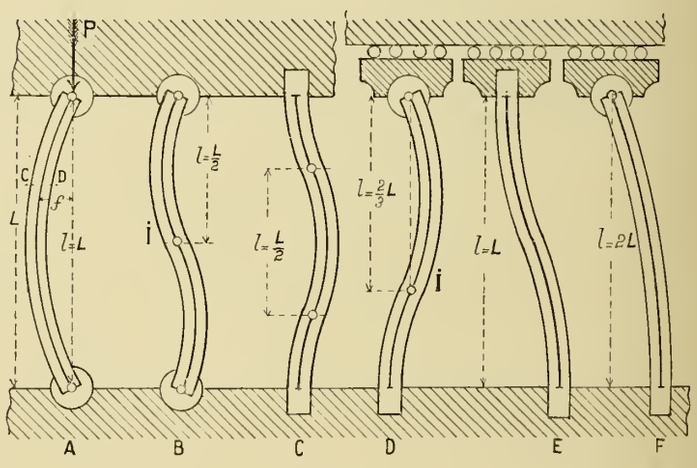


Fig. 315

une longueur théorique que nous nommerons *longueur de sinuosité*, que nous désignerons par la lettre l et que nous allons définir.

La fig. 315 donne, schématiquement, les principaux cas qui peuvent se présenter. En voici la description :

Fig. A. Deux abouts en rotule guidées. La longueur de sinuosité l est égale à la longueur vraie L.

Fig. B. Deux abouts en rotules guidées, avec entretoise au milieu. On a : $l = 1/2$ L.

Fig. C. Deux abouts encastrés et guidés. Le mot guidé veut dire que les abouts ne peuvent se déplacer que suivant une verticale. On a : $l =$ L.

Fig. D. Un about encastré fixe, l'autre en rotule glissante avec une entretoise au tiers ; on a : $l = 2/3$ L.

Fig. E. Un about encastré fixe, l'autre encastré glissant, on a : $l =$ L.

Fig. F. Un about encastré fixe, l'autre en rotule glissante, on a : $l = 2$ L.

D'une manière générale, la longueur de sinuosité l sera la plus grande des distances qui séparera soit deux points d'inflexion consécutifs de l'élastique de flambage, soit deux points à tangentes parallèles à la direction primitive de la pièce.

Dans la construction des édifices, pour les colonnes, on réalise l'encastrement aux extrémités en les munissant (fig. 316-A) d'un chapiteau P aussi étendu que possible dans le sens où le flambage pourrait se produire.

Pour les parties rivées des grandes constructions en métal (fig. B), lorsqu'une pièce, qui doit être comprimée, s'assemble dans une autre pièce beaucoup plus massive qu'elle,

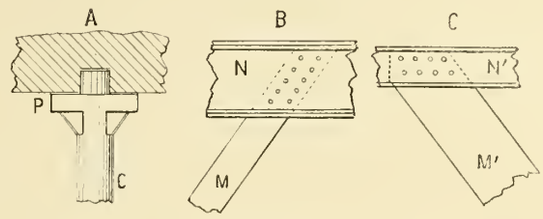


Fig. 316

on peut admettre qu'elle y est encastrée. Si c'est le contraire (fig. C), c'est-à-dire si la pièce comprimée M' est beaucoup plus massive que l'autre N', on admet que cette dernière n'aura pas la force de l'empêcher de changer d'inclinaison et on traitera l'assemblage comme une rotule.

§ 7. — Formules en usage pour les pièces aboutées

334. Formule d'Euler. — (*a*) **Charge minima de flambage.** — *Euler* a démontré et l'expérience a vérifié que si une charge croissante agit bien exactement suivant l'axe d'une pièce terminée par deux rotules guidées (fig. 315-A), tant que cette charge n'atteint pas une certaine valeur le flambage ne peut pas se produire. Il se produit, au contraire, dès que cette valeur est dépassée.

Cette *charge (minima) de flambage* P a pour expression

$$(1) \qquad P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

dans laquelle π est le nombre connu 3,1415... ; E est le module d'élasticité de la matière, I le moment d'inertie de la section, supposée constante ; l, la longueur de sinuosité, telle que nous l'avons définie ci-dessus.

Si Ω est la surface de section,

$$(2) \qquad p = \frac{P}{\Omega} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 \Omega} = \pi^2 E \frac{r^2}{l^2}$$

sera l'*effort de flambage*, c'est-à-dire l'effort unitaire de compression développé lorsque le flambage va commencer.

Dans cette formule r est le rayon de giration ($r^2 = I : \Omega$).

(*b*) **Exemple** : Deux tiges rondes, A et B, en fer, ont leurs dimensions consignées au tableau ci-dessous : calculer leur résistance de flambage.

Le module d'élasticité du fer est 20000^k p. mm²

$\pi = 3{,}1415...$ $\pi^2 = 9{,}869...$ $\pi^2 \times E = 197380$.

	Longueur $l =$	RAYON réel $a =$	RAYON de giration $r = \frac{a}{2}$	RAPPORTS $r : l$	RAPPORTS $r^2 : l^2$	Section Ω
Tige A.	$4^m{,}000$	$0^m{,}020$	$0^m{,}010$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{160\,000}$	1256^{mm^2}
Tige B.	$2^m{,}000$	$0^m{,}050$	$0^m{,}025$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{6\,400}$	5026^{mm^2}

Appliquant la formule (2), on en déduit pour la charge unitaire de flambage p rapportée au millimètre carré :

Tige A... $p = 1^k{,}233$. Charge totale $P = p\Omega = 1\,548^k$.
Tige B... $p = 30^k{,}653$. Charge totale $P = p\Omega = 153\,072^k$.

On voit par cet exemple la différence essentielle entre les tiges longues, comme est A, et les tiges plutôt courtes que longues, comme est B.

A l'instant où la première sera sur le point de flamber, elle ne supportera que $1^k{,}233$ par mm², ce qui est très inférieur à la résistance de sécurité ; par conséquent, la charge totale $P = 1\,548^k$, ou une charge *légèrement* supérieure, n'aura pas d'inconvénient et, même si le flambage commence, il est probable qu'une position d'équilibre se prendra, répondant à une certaine flexion en vertu de laquelle

la fibre qui fatiguera le plus n'atteindra pas encore la résistance de sécurité.

Mais pour la tige courte B, il en est tout autrement. S on la chargeait de $P = 153\,072^k$, on serait à la limite de flambage, avec un effort unitaire partout égal à $p = 30^k,653$; ce qui est déjà très supérieur à la résistance de sécurité. Que le flambage commence et alors l'effort unitaire dans la fibre dangereuse de la section la plus infléchie va augmenter très vite et l'effondrement se produira immédiatement.

(*c*) **Expériences de M. Considère.** — Des expériences récentes exécutées par M. Considère, avec un degré de précision qui n'avait pas été atteint avant lui, ont justifié la formule d'Euler en montrant jusqu'à quelle limite elle est applicable. Elles permettent d'énoncer les conclusions suivantes :

1° Si le module d'élasticité de la matière restait constant, sous n'importe quelle pression, le flambage commencerait toujours pour la charge unitaire donnée par la formule d'Euler. En effet, M. Considère a vu se vérifier cette formule toutes les fois que la pression unitaire restait inférieure à la limite d'élasticité et l'on se rappelle que la phase d'élasticité (v. n° 119) est caractérisée par un module d'élasticité constant.

2° Dès que la pression unitaire dépasse la limite d'élasticité, comme le module E prend alors une valeur décroissante, il en est de même de la charge de flambage, dans l'expression de laquelle E entre au numérateur ; cette charge de flambage diminue donc : autrement dit, le flambage tend alors à se produire plus tôt et même beaucoup plus tôt que ne l'indiquerait la formule ; il entraîne avec lui l'effondrement et cela d'une manière d'autant plus certaine qu'il prend la pièce à l'instant où ses molécules sont dans une phase dangereuse de leur état élastique. Afin d'élucider cette question, reprenons les deux tiges de l'exemple précédent :

Pour la tige A, qui est longue, le flambage commencera réellement sous la charge totale de $1\,548^k$, donnée par la formule d'Euler et il n'entraînera pas l'effondrement immédiat de la pièce, parce que, à cet instant, l'effort unitaire ne sera que $1^k,233$, c'est-à-dire très inférieur à la limite d'élasticité.

Pour la tige B, qui est demi-longue, il commencera bien avant la charge totale de $153\,072^k$ donnée par la formule.

Si nous voulons connaître approximativement sous quelle charge il deviendra menaçant, nous nous baserons sur les expériences de M. Considère ; nous multiplierons l'aire de la section ($\Omega = 5026^{mm^2}$) par 18^k, qui est la limite ordinaire d'élasticité du fer; ce qui donne 90468^k au lieu de 153072. Il est donc probable que le flambage commencera pour la pièce B, sous cette charge totale de 90468^k, et que l'effondrement le suivra immédiatement.

En résumé : 1° Pour les pièces longues ($l : r$ très grand) la formule d'Euler fournit la charge de flambage, précédant de plus ou moins près l'effondrement. 2° Pour les pièces courtes ou demi-longues, c'est la limite d'élasticité (nous ne disons pas la limite de rupture) qui annoncera le flambage, lequel entraînera forcément l'effondrement.

(*d*) **Résistance de sécurité au flambage.** — Quelles seront donc les charges de sécurité à adopter ? Nous ferons le raisonnement suivant : Puisque, d'une part, c'est la limite d'élasticité qui annonce l'instant où la formule d'Euler n'est plus applicable et celui où l'effondrement est imminent et que, d'autre part, la résistance de sécurité est prise ordinairement égale au tiers de la limite d'élasticité, c'est ce coefficient 1/3, dont nous frapperons les nombres donnés par la formule d'Euler pour avoir les résistances de sécurité à l'aboutement et nous prendrons pour cette résistance

$$(1) \qquad R' = \frac{\pi^2 E}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

avec cette restriction que R′ ne sera jamais supérieur à R résistance ordinaire de sécurité. Cette valeur R sera la limite d'application de la formule.

Nous donnerons plus loin les représentatives de cette résistance de sécurité à l'aboutement, pour différents matériaux (acier, fer, fonte, bois), et nous indiquerons comment elles peuvent servir à la détermination des dimensions des pièces aboutées.

335. **Coefficients de la formule d'Euler.** — Dans la formule précédente l'expression $\frac{\pi^2 E}{3}$ est une sorte de *coefficient de substance* puisqu'il ne dépend que du module d'élasticité E de la matière.

Le tableau suivant donne les valeurs de ce coefficient pour les différents matériaux ainsi que les limites d'application de la formule d'Euler.

(*a*) **Coefficients naturels de la formule d'Euler** (*rapportés au millimètre carré*).

Tableau n° 1. — Coefficients naturels

Substances	E	$M^3 = \frac{\pi^2 E}{3}$	Limite d'application pour	
			$R' = R$	$l : r$
1	2	3	4	5
Acier . .	22 000	72 380	10	85,07
			8	95,00
Fer . . .	20 000	65 800	6	104,60
Fonte . .	10 000	32 900	10	57,17
Bois. . .	1 000 à 1 500	3 290	0,6	74,05
		4 935	0,6	90,70

Nota. — 1° Les nombres E et R sont rapportés au mm². Ils sont empruntés aux tableaux des n°s 117 et 136.

2° Les valeurs limites $l : r$ de la dernière colonne ont été calculées en écrivant que $R' = R$; ce qui entraîne :

$$R = \frac{\pi^2 E}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{l}{r} = \pi\sqrt{\frac{E}{3R}}.$$

La limite de $l : r$ au-dessous de laquelle la pièce serait assimilée à un bloc travaillant à la résistance entière de sécurité R serait donc la longueur de la circonférence qui aurait $\sqrt{\frac{E}{3R}}$ pour diamètre. La table des nombres de la fin du livre les donne avec facilité.

(*b*) **Coefficients modifiés. — Excentricité de la charge.** — Nous proposerons plus loin de réduire de 20 0/0 les nombres des colonnes 3 et 4 pour tenir compte de l'excentricité possible de la charge ; excentricité qui a pour effet (v. n° 336) d'augmenter l'effort supporté par la fibre extrême. Dans ce cas le tableau précédent doit être modifié de la manière suivante :

Tableau n° 2. — Coefficients modifiés

Substances	E	$M^2 = 0{,}8\,\frac{\pi^2 E}{3}$	Limite d'application pour	
			$R' = 0{,}8R$	$l : r$
1	2	3	4	5
Acier . .	22 000	57 904	8^k	95,10
			6,4	106,40
Fer . . .	20 000	52 640	4,8	117,15
Fonte . .	10 000	26 320	8	64,03
Bois. . .	2 632 à 3 948	1 000 à 1 500	0,48	83,00
			0,48	101,60

C'est d'après ce dernier tableau que les courbes de l'abaque n° 7 (v. plus loin n° 338) ont été construites.

336. **Formule de Rankine.** — (*a*) **Formule.** — L'ingénieur anglais **Rankine** suppose que dans tous les cas, quelque faible que soit la charge, dès qu'une pièce est aboutée, ou bien elle subit le flambage et par conséquent prend une certaine courbure, ou bien elle subit des effets d'excentricité qui font que la presssion N agit en dehors de son axe. Soit f l'excentricité de la charge, laquelle peut être la flèche prise au milieu, c'est-à-dire au droit de la section CD (fig. 317-I). Reproduisons plus en grand (fig. II) cette section. Elle se trouve dans les conditions indiquées au n° 322, c'est-à-dire qu'elle supporte une compression N appliquée en un point K situé à la distance $X = f$ de son centre de gravité. La fibre la plus comprimée est en C à la distance v et elle supporte un effort unitaire de compression qui est donné par la formule du n° 329 dans laquelle on remplace X par f.

$$(1) \qquad p = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{f}{\alpha}\right),$$

α, est la largeur du noyau central de la section et l'on a, comme on le sait,

$$\alpha = \frac{I}{v\Omega} = \frac{r^2}{v}.$$

r étant le rayon de giration.

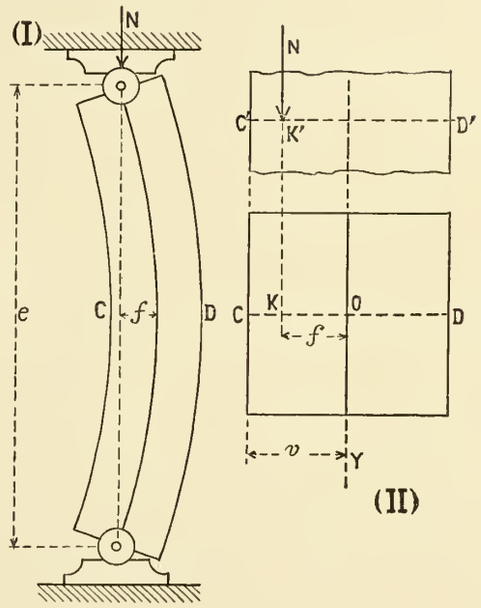


Fig. 317

Or p peut atteindre la résistance ordinaire de sécurité R ; on fera donc $p = R$ dans la formule (1) ; quant à $N : \Omega$ c'est le quotient de la charge totale divisée par la section, c'est donc la résistance apparente de sécurité à l'aboutement R′ telle que nous l'avons définie plus haut ; on aura, par conséquent

$$(2) \qquad R' = \frac{R}{1 + \frac{f}{\alpha}}.$$

Si l'on pouvait connaître la flèche f le problème serait résolu : malheureusement on ne sait pas déterminer f et l'on est obligé de procéder en faisant des hypothèses plus ou moins justifiées.

Rankine admet que cette flèche est : 1° proportionnelle au carré l^2 de la longueur ; et 2° inversement proportionnelle au rayon de giration r.

Cela fait donc entrer l au carré dans le numérateur du terme $f : \alpha$ et comme α est évidemment proportionnel à r, il en résulte que r entre aussi au carré dans le dénominateur de ce même terme.

En définitive, on aura

$$(3) \qquad R' = \frac{R}{1 + K\left(\frac{l}{r}\right)^2} \qquad \textit{(formule de Rankine)}.$$

Telle est la formule de **Rankine** : on voit que pour $l : r$, très petit, c'est-à-dire pour un *bloc*, on aura R′ très voisin de R, résistance entière de sécurité.

Quant au facteur K, il est à déterminer empiriquement d'après les expériences.

Presque tous les ingénieurs qui se sont occupés de la question se sont basés, pour cela, sur les belles expériences de **Hodgkinson**. Malheureusement ils sont loin d'être d'accord entre eux, ainsi que le montrera le tableau ci-dessous.

(*b*) **Coefficients de la formule.** — Le tableau n° 3, ci-dessous, donne les valeurs proposées par divers Ingénieurs pour les coefficients R et K de la formule de Raukine

$$R' = \frac{R}{1+K\left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

Tableau n° 3

	Forme des abouts	FER			FONTE			BOIS		
		R	1 : K	K	R	1 : K	K	R	1 : K	K
A	Ronds Plats. .	$7^k,50$	10 000 ?	0,000 1 ?	15^k	1 250 5 000 ?	0,000 8 0,000 2 ?	$0^k,7$	1 250	0,000 8
B	Ronds . Plats. .	$7^k,50$	2 500 10 000	0,000 4 0,000 1	15^k	312,50 1 250	0,003 2 0,000 8	$0^k,7$	312,50 1 250	0,003 2 0,000 8
C	Ronds . Plats. .	$4^k,16$	18 000 36 000	0,000 054 0,000 027	7^k	1 100 2 200	0,000 908 0,000 454	$0^k,36$	1 500 3 000	0,000 666 0,000 333
D	Ronds . Plats. .	$6^k,50$	8 333 33 333	0,000 120 0,000 030	7^k	555 2 222	0,001 800 0,000 450	$0^k,6$	714 2 857	0,001 400 0,000 350
E	Ronds . Plats. .	$5^k,60$	20 000 40 000	0,000 050 0,000 025						

(*c*) **Représentatives de la formule.** — En posant $R' = y$ et $(l : r)^2 = x$, la formule de Rankine s'écrit

$$y(1 + Kx) = R.$$

Elle représente une hyperbole qui a pour asymptotes :

1° La droite $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des x, et

2° La droite $1 + Kx = 0$, c'est-à-dire une parallèle à l'axe des y située à la distance $x' = -(1 : K)$.

C'est pour connaître cette distance x' de la 2e asymptote que nous avons calculé, dans le tableau, les valeurs $(1 : K)$. D'ailleurs pour $x = 0$, on a $y = R$, ce qui donne le point de la courbe situé sur l'axe des y. Dès lors, connaissant les asymptotes et un point, il serait facile de construire sur l'abaque n° 7 (v. plus loin n° 338) celle des courbes de **Rankine** que l'on adopterait, pour le cas où on la préférerait aux courbes d'**Euler** qui sont dessinées sur ledit abaque.

(*d*) **Observations relatives au tableau.** — *Ligne A.* — Les coefficients sont empruntés à l'aide-mémoire de **P. Huguenin** p. 263 (Baudry et Ce, éditeurs). Ce sont ceux dont se servent les Ingénieurs allemands. Ils se rapportent à la fig. 113 de cet aide-mémoire (p. 262), c'est-à-dire à une colonne à deux bouts libres. (Abouts ronds.)

On ne dit pas, dans l'aide-mémoire, comment il faut modifier le coefficient K pour des abouts plats. Nous basant sur ce que la longueur de sinuosité l (v. n° 333) est la moitié de la longueur vraie pour le cas où les abouts sont encastrés, et que cette longueur entre au carré dans le dénominateur de la formule, nous avons divisé par 4 le premier nombre K pour les bouts plats. Mais il est entendu alors que l serait la longueur vraie et non plus la longueur de sinuosité.

Ligne B. — **Kœchlin**, Statique graphique, p. 514 (Baudry et Ce, éditeurs). — Ce sont les mêmes nombres que ceux des Ingénieurs allemands : seulement M. Kœchlin applique aux pièces avec abouts plats ceux que les Allemands appliquent aux abouts ronds et il dit de quadrupler K pour le cas des abouts ronds. Nous pensons qu'il a fait erreur et que les coefficients de M. Kœchlin devraient être les mêmes que ceux des Ingénieurs allemands (ligne A).

On remarquera les fortes valeurs (fer $7^k,50$ — fonte 15^k — bois $0^k,7$) attribuées par les Allemands au numérateur et, par conséquent, à la résistance de sécurité d'une pièce extrêmement courte.

Nous croyons qu'il y a là une exagération, et voici nos raisons. Il est vrai que si la pièce est très courte elle ne risque pas de flamber et il semble que l'on ait le droit de lui appliquer rigoureusement la résistance entière de sécurité ; mais il faut tenir compte de l'excentricité inévitable de la

charge. Or, nous avons vu (n° 331) que si cette excentricité X atteignait la limite α du noyau central la résistance de sécurité à admettre devrait être réduite de moitié. En supposant qu'elle puisse atteindre le quart de α, ce qui est très peu, cela donnerait en faisant dans la formule $X = 0.25\,\alpha$

$$R' = R : \left(1 + \frac{X}{\alpha}\right) = R : 1{,}25 = 0{,}80\ R.$$

C'est pourquoi il nous semble que le numérateur de la formule de Rankine, loin d'être pris aussi élevé, devrait toujours être une fraction (0,80 par exemple) de la résistance entière de sécurité à la compression.

Cette remarque s'applique aussi à la formule d'Euler ; c'est pourquoi au lieu d'adopter pour résistance de sécurité au flambage

$$R' = \frac{\pi^2 E}{3}\ R,$$

nous avons préféré prendre, dans le second membre, les 0,80 de R et arrêter l'emploi de la formule pour $R' = 0{,}80\ R$; c'est ce que nous avons fait plus haut, et le tableau n° 2 a été établi en conséquence ainsi que l'abaque n° 7 (v. plus loin).

Ligne C. — Les nombres de cette ligne sont empruntés à **M. Resal**, Traité des ponts métalliques, p. 13 (Baudry et Cie, éditeurs). Ainsi que le dit l'auteur, pour avoir les nombres R, nous avons pris, pour le fer, le 1/6 du nombre donné comme charge de rupture, le 1/8 pour la fonte et le 1/10 pour le bois. Les nombres K que donne M. Resal s'appliquent aux colonnes à bouts plats. Pour les colonnes à bouts ronds M. Resal, considérant sans doute qu'un bout plat ne donne lieu qu'à un encastrement incomplet, recommande de diviser par 2 et non pas par 4 le coefficient K des colonnes à bouts ronds pour avoir celui des autres. Cela revient à prendre pour longueur de sinuosité, l, des colonnes à bouts plats.

$$l = \frac{L}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots L \quad \text{au lieu de} \quad l = \frac{L}{2} = 0{,}50L.$$

Nous croyons qu'il est dans le vrai et que cela est plus prudent.

Ligne D. — Les nombres sont empruntés à M. **Flamand**, Résistance des matériaux, p. 444. (Baudry et Cie, éditeurs). Les coefficients K sont à peu près les mêmes que ceux donnés par M. Resal, du moins pour les colonnes à bouts plats. Pour les colonnes à bouts ronds, M. Flamand dit de quadrupler ou de doubler le coefficient K : nous l'avons quadruplé. Pour R, nous avons pris ainsi que le dit M. Flamand la moyenne des valeurs maxima et minima indiquées dans son ouvrage pour les résistances de sécurité.

Ligne E. — Les nombres de cette ligne sont ceux adoptés par les Ingénieurs Américains ; ils sont empruntés à l'ouvrage déjà cité de M. Resal. Ils donneraient une représentative très tendue fournissant pour les grandes valeurs de $l : r$, des résistances de sécurité assez fortes.

337. **Formules de MM. Love, de Leber et Bricka.** — **M. Love**, traduisant les expériences de **Hodgkinson**, a donné deux formules serrant d'aussi près que possible ces expériences et s'appliquant aux colonnes à bouts plats, en fer et en fonte, mais ne s'appliquant qu'à des pièces cylindriques. L'une des formules est relative aux colonnes demi-longues ($L < 25 \times D$) et l'autre aux colonnes longues ($L > 25 \times D$.)

MM. de Leber et Bricka (Calcul des ponts métalliques, p. 104. Baudry, éditeur,) ont modifié la forme des équations de Love et y ont fait entrer la largeur α du noyau central de la pièce, ce qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, nous paraît très rationnel. Leur formule, car ils proposent de ne se servir que d'une seule des formules, est alors tout à fait générale. Ils en ont fait la preuve en l'appliquant à des expériences récentes que M. **Bauschinger** a faites sur la résistance à l'aboutement de fers en T, en double T et en U, et ils ont constaté qu'elles serraient ces expériences d'aussi près que possible.

La formule de MM. **de Leber, et Bricka**, s'appliquant à des pièces avec abouts libres (fig. 315-A), est

Fer :
$$R' = \frac{R}{0{,}8 + 0{,}01\left(\frac{l}{\alpha}\right)}$$

Fonte :
$$R' = \frac{R}{0{,}7 + 0{,}025\left(\frac{l}{\alpha}\right)}$$

dans laquelle $\alpha = I : v\Omega$ est la largeur du noyau central. Dans leur ouvrage, ces Ingénieurs donnent la formule pour des pièces avec abouts encastrés ; le coefficient de $l : \alpha$ est alors réduit de moitié.

338. **Abaque pour le calcul des pièces aboutées par la formule d'Euler.** — Quel parti prendre en présence de tant de formules différentes ? Nous autorisant de l'avis de **M. Collignon** et de la pratique de grandes maisons de construction, de la maison Eiffel entre autres, c'est la formule d'Euler corrigée comme nous l'avons dit (v. n° 335 tableau n° 2) que nous avons adoptée et que nous avons traduite sur l'abaque n° 7.

(*a*) **Construction de l'abaque.** — La partie I de l'abaque, intitulée *abaque des matériaux*, donne en abscisses les résistances de sécurité à l'aboutement $R' = N : \Omega$. Les ordonnées (que d'ailleurs nous n'avons pas chiffrées) sont proportionnelles aux valeurs de $(l : r)^2$. Par conséquent si dans l'équation précédente (v. 335)

$$R' = \frac{0{,}8\pi^2 E}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

nous posons $R' = x$ et $\left(\frac{l}{r}\right)^2 = y$ et $\frac{0{,}8\pi^2 E}{3} = M^2$, il vient

$$xy = M^2,$$

ce qui représente autant d'hyperboles qu'il y a de matériaux considérés.

Nous avons une hyperbole pour la fonte, une pour le fer, une pour l'acier et deux pour le bois.

Pour le bois au lieu de $4 - 5 - 6\ldots$ kilos, il faut lire pour les résistances R', $0^k{,}4 - 0^k{,}5 - 0^k{,}6\ldots$, etc...

Les nombres M^2 qui servent de paramètres à ces hyperboles sont empruntés au tableau n° 2 de la page 269.

Selon nos conventions nous limitons ces hyperboles aux résistances $R' = 0{,}8R$ portées à la colonne 4 du tableau.

Cela veut dire qu'il faut, pour les valeurs de $l : r$ données à la colonne 5 du tableau, abandonner les hyperboles et les continuer par les verticales répondant aux abscisses données par la colonne 4. Les pièces sont alors considérées comme ne devant plus flamber. Le coefficient 0,8 a été adopté pour tenir compte de l'excentricité de la charge.

A ces hyperboles et à ces droites on pourrait substituer d'autres représentatives de la résistance de sécurité R' à l'aboutement. Ces représentatives traduiraient soit des formules demi-empiriques comme celles de **MM. Raukine, Love, de Leber** et **Bricka**, soit des résultats d'expériences comme celles de **MM. Hodgkinson, Considère, Bauschinger**, etc... On s'en servirait comme nous allons l'indiquer pourvu, toutefois, qu'elles fussent traduites dans le même système de coordonnées $x = R'$ et $y = (l : r)^2$.

(*b*) **Problèmes usuels à résoudre.** — Le problème des pièces aboutées se posera toujours sous les deux formes suivantes :

Problème n° 1. — On connaît : 1° la longueur de sinuosité, l, d'une pièce de nature donnée (fonte, fer, acier, bois); 2° les éléments de sa section droite.

Quelle est la charge totale N qui pourra lui être imposée ?

Problème n° 2. — On connaît : 1° la longueur de sinuosité l d'une pièce de nature donnée ;

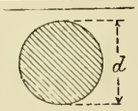
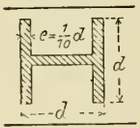
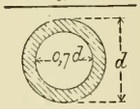
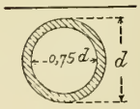
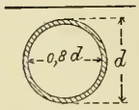
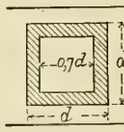
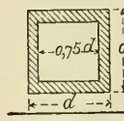
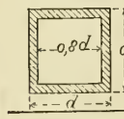
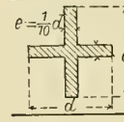
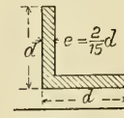
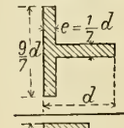
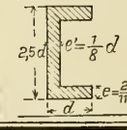
2° La charge totale N qu'elle doit pouvoir supporter.

On demande de déterminer les dimensions de sa section droite.

Le problème n° 2 plus difficile à résoudre que le problème n° 1 n'est déterminé que si la pièce est à *section modulée ;* c'est pourquoi il faut s'entendre à ce sujet.

(*c*) **Sections modulées.** — Pour le bois nous ne considérons que les pièces à section carrée ou ronde : pour les métaux la forme des sections pourrait varier à l'infini. Nous nous sommes bornés aux types indiqués au tableau n° 4 ci-contre ; ils sont au nombre de treize. Pour les cornières (type G), pour les fers à T simple (type H) et pour les fers en U (type K), les rapports des différentes dimensions à la

TABLEAU N° 4. — TYPES ET MODULES

TYPES (module = d)		CARRÉ DU RAYON de giration $r^2 = Kd^2$	SURFACES $\Omega = md^2$	SURFACES $\Omega = K'r^2$ et $K' = \frac{m}{K}$
1	2	3	4	5
A		0,0625 d^2 Log K=$\bar{2}$,795 88	0,7853 d^2 Log m=$\bar{1}$,895 04	12,561 r^2 Log K′ = 1,09916
B		0,0625 d^2 Log K=$\bar{2}$,795 88	0,2800 d^2 Log m=$\bar{1}$,447 16	5,6401 r^2 Log K′ = 0,75128
C		0,0930 d^2 Log K=$\bar{2}$,968 48	0,4005 d^2 Log m=$\bar{1}$,602 60	4,3065 r^2 Log K′ = 0,63412
C_1		0,0970 d^2 Log K=$\bar{2}$.986 77	0,3436 d^2 Log m=$\bar{1}$,536 05	3,5423 r^2 Log K′ = 0.54928
C_2		0,1020 d^2 Log K=$\bar{1}$,008 60	0,2827 d^2 Log m=$\bar{1}$,441 33	2,7085 r^2 Log K′ = 0,43273
D		0,1241 d^2 Log K=$\bar{1}$,093 77	0,5100 d^2 Log m=$\bar{1}$,707 57	4,1087 r^2 Log K′ = 0,61370
D_1		0,1302 d^2 Log K=$\bar{1}$,114 61	0,4375 d^2 Log m=$\bar{1}$,636 98	3,2838 r^2 Log K′ = 0,51637
D_2		0,1366 d^2 Log K=$\bar{1}$,135 45	0,3600 d^2 Log m=$\bar{1}$,556 30	2,6308 r^2 Log K′ = 0,42085
E		0,0833 d^2 Log K=$\bar{2}$,920 80	1,0000 d^2 Log m=$\bar{0}$,000 00	12,0011 r^2 Log K′ = 1,07920
F		0,0423 d^2 Log K=$\bar{2}$,626 34	0,190 d^2 Log m=$\bar{1}$,278 75	4,4917 r^2 Log K′ = 0,65241
G		0,0381 d^2 Log K=$\bar{2}$,580 92	0,2489 d^2 Log m=$\bar{1}$,39602	6,5329 r^2 Log K′ = 0,81510
H		0,0829 d^2 Log K=$\bar{2}$,918 53	0,3061 d^2 Log m=$\bar{1}$,485 86	3,6924 r^2 Log K′ = 0,56731
K		0,1000 d^2 Log K=$\bar{1}$, 00000	0,6307 d^2 Log m=$\bar{1}$,799 82	6,3070 r^2 Log K′ = 0,79982

largeur d, prise comme *module*, sont des moyennes que nous avons établies d'après les échantillons des principales forges. Malheureusement, les usines françaises ne se sont pas encore entendues pour adopter des séries modulées de leurs principaux fers. Néanmoins, en basant des calculs sur les modules de notre tableau on aura des dimensions très approchées du fer à adopter. Il ne restera plus qu'à choisir dans les albums de forges celui, de même espèce, qui s'en rapprochera le plus.

Les éléments de toute section modulée sont, au point de vue qui nous intéresse :

Le module (largeur de la section) d et son carré.... d^2.

Le rayon de giration r et son carré..... $r^2 = Kd^2$.

La surface de section..... $\Omega = md^2$.

On en déduit en posant $K' = \frac{m}{K}$..... $\Omega = K'r^2$.

La partie I de l'abaque n° 7, intitulée *abaque des modules*, permet de se servir de ces éléments, comme nous allons l'indiquer (v. plus loin l'abaque, p. 274).

Nous résoudrons, pour un type donné, chacun des deux problèmes ci-dessus énoncés.

Sur l'abaque des modules, on a construit la parabole $x = y^2$. Elle permet de passer des ordonnées $y = l : d$, aux abscisses $x = (l : d)^2$.

339. Usage de l'abaque. — (*a*) **Problème 1.** — « Une « pièce aboutée en fonte, du type C, de longueur de sinuo- « sité $l = 3{,}30$, a pour largeur (ou module) $d = 0{,}156$. « Quelle charge totale N peut-elle supporter ? »

Cherchons d'abord, à l'aide de l'abaque, la résistance de sécurité, R', à admettre.

l et d étant connus on prend le rapport $l : d$,

$$l : d = 3{,}30 : 0{,}156 = 21.$$

Sur le côté droit de l'abaque I (suivre sur la fig. 318), prenons le point $l : d = 21$. Suivons l'horizontale de ce point jusqu'à la parabole $x = y^2$; cela nous donne un point d, dont l'abscisse est $(l : d)^2$, ou 21^2.

Mais ce qu'il nous faut c'est $(l : r)^2$ et non pas $(l : d)^2$. Or, puisque $r^2 = Kd^2$, il en résulte que $(l : d)^2 = K(l : r)^2$.

On obtient $(l : r)^2$ au moyen des *obliques descendantes* qui, sur l'*abaque des modules* (fig. I), divergent du point A. Ces obliques ont pour équation $x = Ky$; le coefficient K est donné, suivant les types, par le tableau n° 4 (colonne n° 3).

Dès lors, prenons la verticale du point d, jusqu'à sa rencontre en c avec l'oblique descendante du type C ; l'ordonnée de ce point c nous donne le rapport $(l : r)^2$, dont nous avons besoin.

Menons l'horizontale de ce point c et prenons, sur l'*abaque des matériaux* (fig. II) sa rencontre en b avec la courbe des fontes.

L'abscisse de ce point b nous donne la résistance de sécurité R' à admettre ; ici $R' = 5^k{,}30$ par ^{mm2}.

On peut, dans le cas actuel, où l'on se sert de la formule d'Euler, trouver directement R' par le calcul. En effet, cette formule est

$$R' = 26320 \frac{r^2}{l^2}.$$

Le nombre 26320 est emprunté au tableau n° 2 (p. 269) ; on a :

$$d = 0{,}156 \quad \text{et} \quad l = 3{,}30, \quad \text{d'où}$$
$$d^2 = 0{,}024336 \quad \text{et} \quad l^2 = 10{,}89.$$

Le tableau n° 4 (p. 272) donne, pour le type C, $r^2 = 0{,}0930d^2$, d'où l'on déduit, en substituant ces valeurs de d^2 et de l^2,

$$R' = \frac{26320 \times 0{,}0930 \times 0{,}024336}{10{,}89} = 5^k{,}28 ;$$

on peut prendre $R' = 5^k{,}30$ en forçant légèrement.

Pour avoir la charge totale N que la pièce peut supporter on pourra procéder :

1° *Par le calcul* : Le tableau des modules n° 4 donne pour le type C (colonne 4), $\Omega = 0{,}4005\, d^2$; or

$d = 156^{mm}$, $d^2 = 24336^{mm2}$, d'où $\Omega = 9746^{mm2}$,

ce qui, à raison de $5^k{,}30$ par ^{mm2}, donne

$$N = 9746 \times 5{,}30 = 51653^k.$$

2° *Par l'abaque* : Nous n'indiquerons pas la solution par l'abaque ; elle serait moins précise que la précédente et exigerait un calcul numérique aussi long.

(*b*) **Problème 2.** — « Une pièce aboutée en fonte, du type « C, doit avoir une longueur des sinuosité connue ($l = 4{,}00$) « et doit supporter une charge donnée ($N = 77200^k$). « Quel doit être son module d ? »

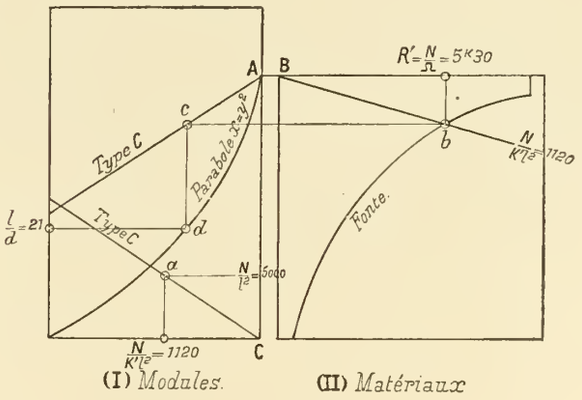


Fig. 318

Ce problème se présente surtout lorsque l'on prépare un projet, tandis que le premier se pose lorsque l'on vérifie un projet déjà fait. Ce qui rend le problème n° 2 plus difficile que l'autre, c'est que, ne connaissant pas le module d, puisque c'est l'inconnue, on ne peut connaître ni $(l : d)^2$, ni

$(l : r)^2$, ni, par conséquent, la résistance de sécurité R′ à admettre.

Quelques auteurs disent de procéder par essais successifs. La méthode est assez pénible, l'abaque n° 7 est combiné de manière à éviter ces essais. Indiquons sa disposition et son usage.

L'abaque n° II donne, par ses courbes, la représentative des valeurs de sécurité R′. Ce sont les abscisses x de

ABAQUE N° 7

Pour le calcul, par la formule d'Euler, des pièces aboutées

Les obliques issues de A, sur l'abaque (I), se nomment *obliques descendantes*.

Les obliques issues de C sont les *obliques montantes*, celles issues de B [abaque (II)] sont les *radiantes*.

Pour les bois, au lieu de 1^k — 2^k — 3^k, etc..., lire comme résistance R′, $0^k,1$ — $0^k,2$ — $0^k,3$ et, aux radiantes, au lieu de 100 — 125 — 130..., lire 10,0 — 12,5 — 13,0, etc.

(I) **Abaque des modules.** (II) **Abaque des matériaux.**

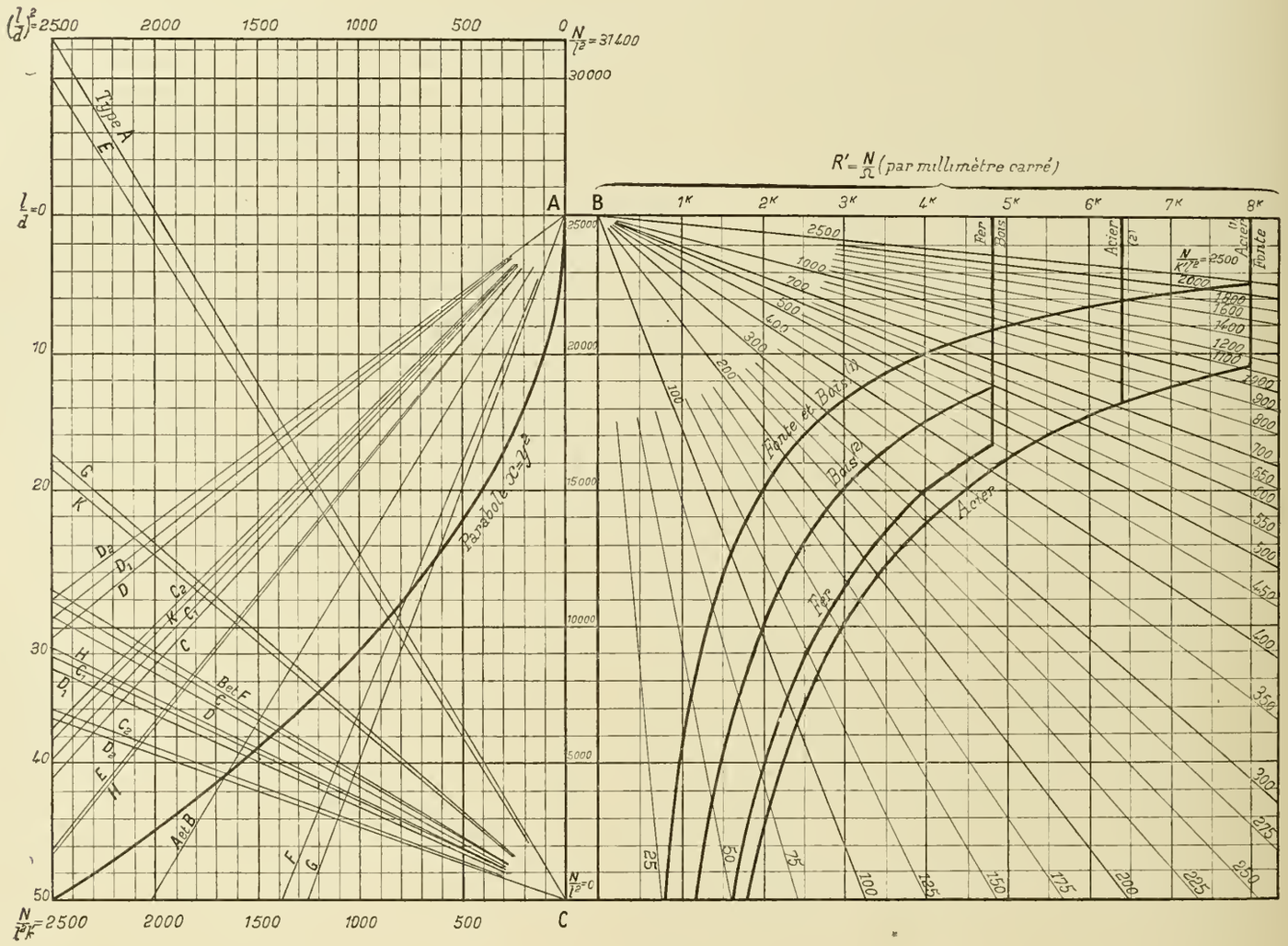


Fig. 319

ces courbes qui donnent R′, c'est-à-dire N : Ω, puisque l'on aura $N = R' \times \Omega$.

Les ordonnées de ces courbes sont $y = (l : r)^2$; par conséquent les abscisses de ces courbes sont une certaine fonction de $(l : r)^2$.

L'abaque traduit la formule d'Euler modifiée, par conséquent ses courbes sont des hyperboles du second degré, se continuant par des droites verticales ; mais elles pourraient être tout autre chose, voire même être des courbes empiriques traduisant des résultats d'expériences. Tout ce que

nous allons dire s'y appliquerait, pourvu que dans cette traduction graphique les ordonnées fussent toujours prises égales aux diverses valeurs de $(l : r)^2$.

Cela posé, cherchons d'abord la résistance de sécurité R', après quoi nous déterminerons le module d.

Recherche de la résistance de sécurité R'. — On a

$$x = R' = \frac{N}{\Omega},$$

ou, en multipliant, haut et bas, par l^2 et remarquant que $(l : r)^2 = y$ et que $\Omega = K'r^2$, le coefficient K' étant $K' = m : K$,

$$(2) \qquad x = \frac{N}{K'l^2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{N}{K'l^2}y,$$

ce qui veut dire que le point inconnu de la courbe des résistances de sécurité doit avoir son abscisse x, ou R', lié à son ordonnée y, ou $(l : r)^2$, par l'équation (2) ; mais cette équation représente des droites, issues de l'origine B.

Ce sont ces droites que nous avons nommées des *radiantes* et que nous avons tracées sur l'abaque des matériaux.

Par conséquent on calculera le coefficient $N : K'l^2$, en prenant le facteur K' dans la colonne 5 du tableau des modules (tableau n° 4.) On prendra celle des radiantes qui répond au nombre ainsi calculé et on cherchera le point d'intersection de cette radiante avec la courbe voulue de matériaux; ce point donnera, par son abscisse, la résistance de sécurité R' à adopter et par son ordonnée la valeur $(l : r)^2$.

Dans l'exemple numérique donné on a :

$$N = 77200, \qquad l = 4{,}00, \qquad \text{d'où} \qquad l^2 = 16.$$

Le tableau n° 4 donne (colonne 5) pour le type choisi C

$$K' = 4{,}3065, \qquad \text{d'où l'on tire pour le quotient}$$

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{77200}{4{,}3065 \times 16} = 1120.$$

Sur l'abaque des matériaux, nous prenons la radiante marquée 1120. (Comprise entre 1100 et 1200). Elle rencontre en b (fig. 318) la courbe des fontes; l'abscisse du point b donne la résistance de sécurité à admettre

$$R' = 5^k{,}30 \text{ par } ^{mm2}.$$

L'abaque des modules permettrait, par ses *obliques montantes*, de faire graphiquement le calcul du quotient $N : K'l^2$; voici comment :

Pour l'exemple choisi on a

$$N = 77200 \quad \text{et} \quad l^2 = 16, \quad \text{d'où} \quad N : l^2 = 4825.$$

Dans l'espace situé entre les abaques I et II on prend le point situé à la hauteur 4825. (Il se confond très sensiblement avec 5000.)

On suit l'horizontale de ce point jusqu'à sa rencontre en a (fig. 318) avec l'*oblique montante* du type C. L'abscisse de ce point nous donne par sa valeur, 1120, le quotient cherché $N : K'l^2$.

Recherche du module d. — On peut opérer arithmétiquement, c'est ce qui est préférable, ou graphiquement en se servant de l'abaque des modules.

Arithmétiquement, on doit avoir, R' étant connu : $\Omega R' = N$, d'où $\Omega = N : R'$.

Mais la colonne 4 du tableau n° 4, donne

$$\Omega = md^2; \qquad \text{d'où l'on déduit}$$

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}}.$$

Dans l'exemple donné on a

$$N = 77200, \quad R' = 5^k{,}30, \quad m = 0{,}4005, \qquad \text{et}$$

$$d = \sqrt{\frac{77200}{0{,}4005 \times 5.3}} = \sqrt{363.60} = 190^{mm}{,}50.$$

On fera bien de forcer légèrement et de prendre $d = 191^{mm}$; par conséquent le support sera une colonne cylindrique creuse, en fonte, ayant les dimensions suivantes :

Diamètre extérieur,	$d = 191^{mm}$.
Diamètre intérieur,	$d' = 0{,}7d = 133^{mm}{,}7$.
Epaisseur,	$e = 1/2(d - d') = 28^{mm}{,}6$.

Pour opérer graphiquement, nous menons (V. fig. 318) l'horizontale du point b jusqu'à la rencontre, en c, avec l'*oblique descendante* répondant au type C ; nous menons la verticale du point c jusqu'à la rencontre, en d, avec la parabole $x = y^2$, et l'horizontale du point d nous donne, sur la gauche de l'abaque des modules, le rapport $l : d = 21$. Or, $l = 4^m$, d'où l'on déduit

$$d = 4 : 21 = 0^m{,}1904..$$

Nota. — Malgré l'intérêt théorique qu'il y aurait à ne se servir que des abaques et à supprimer les calculs arithmétiques, nous engageons vivement le lecteur à employer le calcul pour déterminer le quotient $N : K'l^2$ et ensuite le module d.

(*c*) **Autre application.** — « Dans une poutre en croisillon « une des pièces obliques, reliant la membrure supérieure à « la membrure inférieure, doit supporter une compression « $N = 9500^k$; sa longueur *réelle* est $L = 3^m{,}20$.

« Les membrures ne sont pas assez fortes pour que l'on « puisse considérer les nœuds d'assemblages comme consti- « tuant des encastrements, même incomplets (V. n° 333, fig. 316-C).

« Calculer les dimensions de cette pièce, sachant qu'elle « sera constituée par une cornière en *acier* du type G du « tableau n° 4. »

La longueur de sinuosité l doit être prise égale à la longueur réelle $l = L = 3{,}20$, d'où $l^2 = 10{,}24$. Le tableau n° 4 donne, pour le type choisi G, $K' = 6{,}5329$, d'où l'on déduit

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{9500}{6{,}5329 \times 10{,}24} = 142.$$

Sur l'abaque des matériaux, la *radiante* marquée 142 ren-

contre la courbe *acier* en un point dont l'abscisse donne la résistance de sécurité

$$R' = 2^k,80 \quad \text{par } ^{mm2}.$$

Quant au module d, on aura en remarquant que pour le type G (tableau n° 4, col. 4) on a $m = 0,2489$,

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{9500}{0,2489 \times 2,8}} = 117^{mm}.$$

La cornière à employer devrait donc avoir les dimensions suivantes :

Largeur d'ailes, $d = 117^{mm}$.

Epaisseur, $e = 2/15d$ d'où $e = 15^{mm},6$.

Remarque. — La même radiante 142 rencontrerait la courbe *fer* en un point dont l'abscisse serait

$$R' = 2^k,6 \quad \text{au lieu de } 2^k,80,$$

ce qui prouve que dans, ces conditions, il n'y aurait aucun intérêt économique à employer l'acier.

Mais supposons que la pièce en question soit assemblée à ses extrémités dans des membrures assez puissantes pour que, la considérant comme encastrée, nous prenions pour longueur de sinuosité $l = 1/2\ L = 1^m,60$ au lieu de $3^m,20$; alors

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{9500}{6,5329 \times 2,56} = 567.$$

La radiante marquée 567 rencontre la courbe *acier* en un point dont l'abscisse est $R' = 6^k,2$ environ, tandis que la courbe *fer* est rencontrée sur sa partie verticale, laquelle répond à une résistance $R'' = 4^k,8$: il y aurait alors avantage réel à employer l'acier. On aurait

$$d = \sqrt{\frac{9500}{0,2489 \times 6,2}} = 78^{mm},5 \quad \text{au lieu de } 117^{mm}$$

$$e = 2/15d \qquad = 10^{mm},4 \quad \text{au lieu de } 15^{mm},4.$$

§ 8. Pièces comprimées dans les charpentes en bois

340. Types et modules pour les bois de charpente. — Nous verrons plus loin que les arbalétriers, les contre-fiches et certains entraits retroussés, dans les fermes, sont des pièces de bois comprimées, dont les sections sont généralement rectangulaires ou carrées. Pour chacune d'elles on connaît, par le dessin de la charpente, la longueur de sinuosité l, et une épure de statique graphique fait connaître la compression N qu'elle doit subir.

La proportion du rectangle de section droite peut être quelconque ; mais, si la charpente est bien combinée, la pièce ne doit pas être soumise à la flexion ; par conséquent il y a intérêt à lui donner un équarrissage carré.

Néanmoins, comme on peut avoir à utiliser soit des bois de commerce, soit des bois à section rectangulaire que l'on possède en chantier, nous adopterons, pour les bois, les sections modulées, indiquées au tableau (n° 5) suivant.

Le module d est le grand côté, a, du rectangle d'équarrissage ; le petit côté, b, varie par dixièmes depuis a jusqu'à $0,5\ a$; l'équarrissage normal pour lequel $b = 0,5 \times a \times \sqrt{2} = 0,707\ a$ se confond sensiblement avec le type $b = 0,7\ a$.

Etant donné un rectangle dans lequel $b = na$, on a pour le moment d'inertie I, pour la surface Ω et pour le rayon de giration r^2

$$I = \frac{ab^2}{12} = \frac{n^2a^3}{12} \quad \Big| \quad r^2 = \frac{b^2}{12} = \frac{n^2a^2}{12} \quad \Big| \quad \Omega = na^2 = \frac{12}{n} r^2.$$

Ces formules ont permis de calculer le tableau suivant :

Tableau n° 5. — Types et modules pour les bois.

Types module $d = a$	Proportions du rectangle	Carré du rayon de giration $r^2 = Kd^2$	Surfaces	
			$\Omega = md^2$	$\Omega = K'r^2$
	$b = na$	$r^2 = \frac{n^2}{12} a^2$	$\Omega = na^2$	$\Omega = \frac{12}{n} a^2$
1	2	3	4	5
A	$b = 1,0a$	$0,0833a^2$	$1,0a^2$	$12,00r^2$
B	$b = 0,9a$	$0,0675a^2$	$0,9a^2$	$13,33r^2$
C	$b = 0,8a$	$0,0533a^2$	$0,8a^2$	$14,70r^2$
D	$b = 0,7a$	$0,0408a^2$	$0,7a^2$	$17,13r^2$
E	$b = 0,6a$	$0,0300a^2$	$0,6a^2$	$20,00r^2$
F	$b = 0,5a$	$0,0217a^2$	$0,5a^2$	$24,00r^2$

Nota. — Quand il s'agit d'un arbalétrier de ferme, a représente celle des deux dimensions qui est vue en élévation, c'est-à-dire en *parement*, comme disent les charpentiers ; b représente l'autre, c'est-à-dire la dimension en *épaisseur*.

341. Résistances de sécurité pour les bois. — Pour les bois de charpente il est prudent de prendre $R = 400000^k$ comme résistance entière de sécurité à la compression tandis que l'on peut accepter 600000^k pour la résistance à la traction. Ces nombres sont rapportés au mètre carré.

(*a*) **Courbe du général Morin.** — Le général **Morin**, interprétant les expériences de **Rondelet** et de **Hodgkinson** sur les bois, a dressé le tableau (n° 6) suivant, donnant le coeffi-

cient de réduction par lequel il faut multiplier la résistance entière de sécurité R pour avoir la résistance à l'aboutement R′ en fonction du rapport $l : b$.

l est la longueur de sinuosité et b est la *plus petite* dimension du rectangle d'équarrissage.

Nous avons complété ce tableau en y introduisant le rayon de giration r et le rapport $(l : r)^2$, qui nous est nécessaire pour construire sur l'abaque n° 8 ci-après, la représentative des valeurs de R′.

Tableau n° 6 du général Morin, donnant la résistance à l'aboutement R′ des pièces de bois pour charpentes, en fonction du rapport $(l : b)$ de la longueur l de la pièce, au plus petit côté b de son rectangle d'équarrissage.

$l : b$	0	12	14	16	18	20	22	24	28	32	36	40	48
$(l : b)^2$	0	144	196	256	324	400	484	576	784	1024	1296	1600	2304
$(l : r)^2 = 12\,(l : b)^2$	0	1726	2352	3072	3888	4800	5808	6912	9408	12288	15552	19200	27648
R′ : R	1	0,74	0,70	0,66	0,62	0,58	0,54	0,50	0,43	0,37	0,32	0,28	0,17
pour R = 40 R′ =	40^k	$29^k,61$	$28^k,01$	$26^k,4$	$24^k,8$	$23^k,2$	$21^k,6$	$20^k,0$	$17^k,2$	$14^k,8$	$12^k,8$	$11^k,2$	$6^k,8$

Nota. — Les résistances R′, de la dernière ligne, sont rapportées au centimètre carré.

(*b*) **Courbe de Rankine.** — On peut aussi employer la formule de Rankine

$$R' = \frac{R}{1 + K\left(\frac{l}{r}\right)^2},$$

dans laquelle on fera

$$R = 400000^k \qquad \text{et} \qquad K = 0{,}00016 \qquad (1)$$

Sa représentative est une hyperbole qui diffère très peu, ainsi qu'on peut le voir, de la représentative du général Morin.

(*c*) **Courbe d'Euler.** — On peut enfin employer la formule modifiée d'Euler

$$R' = \frac{0{,}8\pi^2 E}{3}\left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

laquelle, en faisant $E = 1000$, s'écrit

$$R' = 2632\left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

Sa représentative est une hyperbole qui se tient très au-dessous des représentatives de Morin et de Rankine, ce qui prouve que son emploi donnera des équarrissages plus faibles que les deux autres.

342. **Abaque servant au calcul des bois.** — (*a*) **Description de l'abaque.** — L'abaque n° 8 comporte, en outre des trois courbes ci-dessus, les radiantes répondant aux valeurs du rapport $(N : K'l^2)$; dans ce rapport N est la charge totale à supporter par la pièce, l est sa longueur de sinuosité et K′ est le coefficient inscrit à la colonne 5 du tableau n° 5 ; il varie avec le module de chaque pièce.

(1) Ces coefficients sont ceux qui sont adoptés par les officiers Français, du génie et de l'artillerie ; ils diffèrent de ceux que nous avons indiqués plus haut ; ce qui prouve, une fois de plus, combien l'accord laisse à désirer sur cette question des pièces aboutées.

ABAQUE N° 8

Bois de charpente.

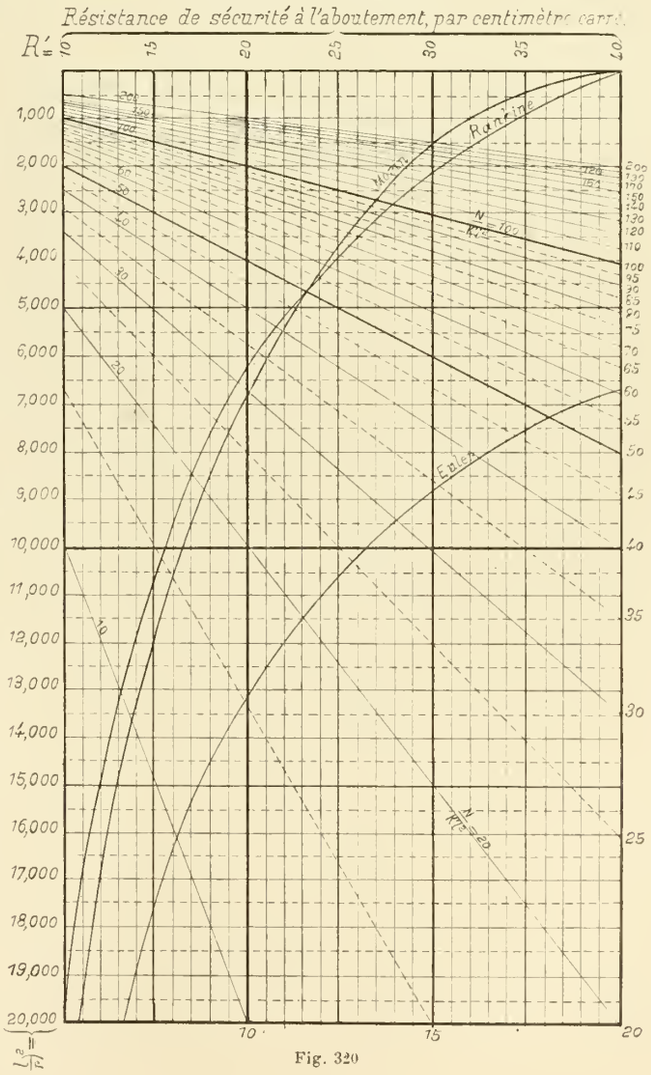


Fig. 320

Les équarrissages des bois de charpente se donnent toujours en centimètres ; c'est pourquoi les résistances de sécurité R′ sont rapportées au centimètre carré.

(*b*) **1re Application.** — « Un arbalétrier en bois doit, sur « un premier tronçon de $2^m,40$ de longueur, supporter une « compression de 3125^k ; calculer son équarrissage en sup- « posant sa section carrée ($b = a$). » On a :

$$N = 3125, \quad l = 2,40, \ \ldots\ldots, \ l^2 = 5,76, \quad K' = 12,$$

$$K'l^2 = 69,12 \quad \text{et} \quad (N : K'l^2) = 45,2.$$

Dès lors, sur l'abaque n° 8 on prend l'intersection de la radiante marquée 45,2 avec celle des représentatives que l'on veut utiliser. La moins favorable est ici celle de Rankine, quoiqu'elle recoupe presque au point que l'on vient de trouver la représentative de Morin : cela donne pour la résistance de sécurité :

$$R' = 22^k,5 \quad \text{par centimètre carré.}$$

Pour calculer le module d, c'est-à-dire a, le tableau n° 5 donne pour le type choisi $b = a$ (colonne 4) $m = 1,00$, d'où, en centimètres,

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{3125}{22,5}} = 11^{cm},79.$$

On forcera légèrement et l'on prendra

$$a = b = 12 \text{ centimètres.}$$

(*f*) **2e Application.** — Même arbalétrier en le supposant à équarrissage normal : ($b = 0,7\,a$). On a :

$$N = 3125, \quad l = 2,40, \quad l^2 = 5,76, \ldots\ldots, \quad K' = 17,13,$$

$$K'l^2 = 38,67 \quad \text{et} \quad N : K'l^2 = 31,6.$$

La radiante marquée 31,6, recoupe la courbe de Rankine, qui est pour le cas actuel la moins favorable, en un point dont l'abscisse donne environ

$$R' = 19^k,6 \quad \text{au lieu de } 22^k,5.$$

Pour $b = 0,7\,a$, on a : $m = 0,7$, et par suite

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{3125}{0,7 \times 19,6}} = 15^c.$$

L'équarrissage sera donc

$$a = 15^{cm} \quad \text{et} \quad b = 0,7\,a = 10^{cm},5.$$

Soit en forçant

$$a = 15^{cm} \quad \text{et} \quad b = 11^{cm}.$$

La première solution pour laquelle $a = b = 12$ donne, pour la surface de section, $ab = 144^{cm^2}$.

La seconde pour laquelle $a = 15$ et $b = 11$ donne $ab = 165^{cm}$, la première est donc plus économique que la seconde.

QUATRIÈME PARTIE

RÉSISTANCE ET STABILITÉ DES SYSTÈMES D'ORGANES

CHAPITRE I

FERMES DE COMBLES

1re SECTION

GÉNÉRALITÉS

§ 1. — Charges que supportent les combles

343. **Charges verticales.** — (*a*) **Classification.** — Les fermes sont des pans de charpente, construits soit en bois, soit en fer, qui, par l'intermédiaire des pannes, des chevrons et du lattis ou voligeage, soutiennent la couverture d'un édifice et les surcharges (neige ou vent) auxquelles cette couverture peut être soumise.

La charge totale supportée par les fermes comprend :

1° Le poids de la couverture (couverture proprement dite, y compris le lattis ou le voligeage) ;

2° Le poids propre de la charpente (chevrons, pannes et fermes) ;

3° Le poids de la neige ;

4° La pression du vent.

Évaluons chacune de ces charges partielles.

(*b*) **Poids de la couverture et poids propre de la charpente.** — Le poids de la couverture est facile à évaluer, sans même que le projet de la ferme soit arrêté. Il n'en est pas de même du poids de la charpente, puisque cette dernière, n'étant pas calculée, n'a pas ses dimensions connues. Il semble donc que l'on soit dans un cercle vicieux. Pour en sortir on admet que le poids de la charpente est une fonction de celui de la couverture et l'on peut accepter, *pour une première étude,* les nombres consignés au tableau ci-contre.

Tableau n° 1. — Poids de la couverture et poids propre d'une charpente de comble.

Nature de la couverture	Charpente	
	en bois	en fer
Tuiles plates à crochets, ou tuiles flamandes.	120k	»
Tuiles creuses du Midi.	110 à 130	»
Tuiles mécaniques, à emboîtement.	80 à 90	65 à 75
Ardoises	70 à 75	55 à 60
Zinc n° 14.	40	35
Ardoises en tôle galvanisée (feuilles de tôle découpées et embouties).	35	30
Tôle ondulée	35	30

Nota. — On évaluera ces poids par mètre carré de surface d'égout, c'est-à-dire de surface rampante de toiture et non pas par mètre carré de surface couverte en projection horizontale.

(*c*) **Surcharge de neige.** — Le poids spécifique de la neige, *non tassée*, est environ le dixième de celui de l'eau ; une couche de neige de 1^{m2} de surface horizontale et de 1^{m} de hauteur pèserait donc 100^{k}.

On admet que dans nos climats tempérés, en pays de plaine, la hauteur maxima de neige susceptible de s'accumuler sans fondre est de 30 centimètres, ce qui représente 30^{k} par mètre carré de surface couverte, *évaluée sur la projection horizontale* et non plus sur la toiture.

Dans les pays de montagne cette surcharge peut atteindre 80^{k} par m^2 de *surface horizontale* couverte.

344. **Charges obliques. — Action du vent.** — (*a*) **Action du vent sur un plan normal.** — Soit v la vitesse du vent évaluée en mètres par seconde. Si ce vent frappe normalement une surface plane d'une surface égale à Ω, il exerce sur elle une pression P donnée par la formule demi-empirique

$$(1) \qquad P = 0{,}125\,\Omega\,v^2.$$

Certains vents d'ouragan peuvent atteindre une vitesse de 43 mètres par seconde, ce qui représenterait, par mètre carré, une pression de 231^{k}. Mais de pareilles vitesses ne se font sentir que pendant quelques secondes. Au contraire, des vents de tempête atteignant 31 ou 32^{m} de vitesse peuvent souffler pendant un temps assez long pour qu'il devienne nécessaire de calculer, en conséquence, les pièces d'une charpente en ne les faisant pas travailler au-delà de la résistance de sécurité.

Si dans la formule précédente on fait $v = 31{,}70$, ce qui donne sensiblement $v^2 = 1000$, on obtient très approximativement

$$(2) \qquad P = 125^{k} \times \Omega.$$

Nous nommerons cette valeur de P la *puissance maxima* du vent sur la surface Ω.

Nota. — Pour la facilité des calculs on remarquera que 125 est le 1/8 de 1000. Dès lors pour avoir, en kilogrammes, la puissance maxima du vent sur une surface plane on multipliera cette surface, évaluée en mètres carrés, par 1000 et on divisera le résultat par 8.

Le tableau suivant donne, *pour un mètre carré*, la puissance du vent répondant à des vitesses variant entre 5^{m} et 43^{m} par seconde.

Nous désignerons cette puissance unitaire du vent par la lettre p.

(*b*) **Action du vent sur un plan oblique.** — Si la surface plane Ω se présente obliquement au vent, il faut remplacer dans la formule (1) la vitesse v par la composante normale $v' = v \cos\alpha$ de la vitesse ; α étant l'angle que fait la direction du vent avec la normale au plan, ce qui donnera

$$(1') \qquad P' = 0{,}125\,\Omega\,v^2 \cos^2\alpha$$

et pour la composante normale de la puissance maxima du vent en faisant $v = 31^{m},70$ ou 32^{m},

$$(2') \qquad P' = 125 \times \Omega \times \cos^2\alpha = P \cos^2\alpha$$

en appelant, comme ci-dessus, P la puissance maxima du vent. Nous construirons plus loin cette expression.

Le vent ne soufffe pas horizontalement, mais de haut en bas sous un angle de 10 degrés environ. Cet effet plongeant est dû au frottement retardateur de l'air sur le sol et sur tous les obstacles qui y sont accumulés.

Tableau n° 2.

Puissance unitaire p du vent en fonction de sa vitesse v.

$$p = 0{,}125v^2.$$

$v =$	$p =$	$v =$	$p =$	$v =$	$p =$
m.	k.	m.	k.	m.	k
5	3,125	18	40,500	31	120,125
6	3,500	19	45,125	32	128,000
7	6,125	20	50,000	33	136,125
8	8,000	21	55,125	34	144,500
9	10,125	22	60,500	35	153,125
10	12,500	23	66,125	36	162,000
11	15,125	24	72.000	37	171,125
12	18,000	25	78,125	38	180,500
13	21,125	26	84,500	39	190,125
14	24,500	27	91,125	40	200,000
15	28,125	28	98,000	41	210,125
16	32,000	29	105,125	42	220,500
17	36,125	30	112,500	43	231,125

p, pression pour 1^{m2}, est exprimée en kilogrammes.
v, vitesse par seconde, est exprimée en mètres.

(*c*) *Construction graphique.* — Dès lors, on fera comme suit l'épure de l'action du vent sur une toiture (fig. 321) :

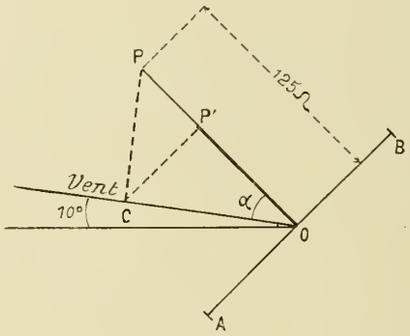


Fig. 321

1° Sur la normale au plan AB de la toiture on porte, en OP, une longueur mesurée à l'échelle des forces, égale à la puissance maxima du vent $P = 125\Omega$.

2° On projette le point P en C sur la direction du vent, laquelle est inclinée à 10° sur l'horizon.

3° On projette de nouveau la longueur OC en OP′ sur la normale, ce qui donne en OP′ la composante cherchée. En effet on a :

$$\overline{OC} = P \cos \alpha, \qquad \overline{OP'} = \overline{OC} \cos \alpha, \qquad \text{donc}$$

$$\overline{OP'} = P \cos^2 \alpha = 125 \times \Omega \times \cos^2 \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*d*) **Action du vent sur différentes surfaces.** — Nous empruntons à **Brune**, sans les démontrer, les résultats suivants. Dans les formules qui suivent P représente la pression maxima que le vent exercerait sur les sections *planes* diamétrales des solides, autrement dit, sur le contour apparent soit vertical, soit horizontal, de ces solides.

Sur les figures ci-après, les surfaces de ces sections de contour apparent sont désignées par la lettre Ω tandis que P′ sera la pression réellement exercée.

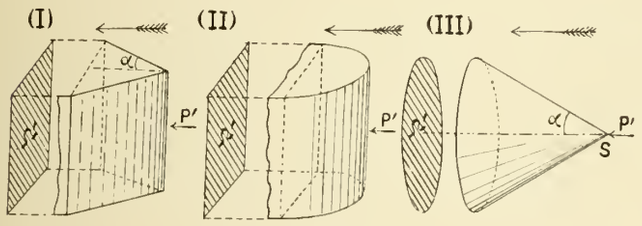


Fig. 322

1° *Angle dièdre* (fig. I). — Soit α le demi-angle du sommet, on aura :

(1) $$P' = P \sin^2 \alpha.$$

2° *Cylindre convexe* (fig. II).

(2) $$P' = 1/2\, P \quad \text{(environ).}$$

3° *Cône horizontal.* — Direction du vent parallèle à l'axe (fig. III).

Soit α le demi-angle au sommet du cône.

(3) $$P' = P \sin^2 \alpha.$$

4° *Cône vertical* (fig. 323-I).—La résultante P_1 des pressions serait normale à la génératrice ; elle la rencontrerait en un point I situé au tiers de la longueur. Par prolongement on aurait en D le point où elle rencontrerait l'axe.

Cette résultante P_1 peut se décomposer en deux composantes, l'une horizontale P′ et l'autre verticale P″ dirigée de haut en bas et l'on aura, en appelant α le demi-angle au sommet du cône,

(4) $$P' = \frac{1}{2} P \cos^2 \alpha \qquad \textit{(Composante horizontale.)}$$

(4′) $$P'' = 0{,}294 P \sin. \alpha \qquad \textit{(Composante verticale.)}$$

Dans ces formules P n'a pas la même valeur.

Dans la formule (4), P′ serait la pression maxima que le vent exercerait sur le triangle Ω′ (fig. I). Dans la formule (4′) P serait la pression maxima que le vent exercerait sur le cercle Ω″.

5° *Demi-sphère* (fig. II). — La pression totale P_1 passerait par le centre O de la sphère ; elle donnerait une composante horizontale P′ et une composante verticale P″ qui seraient égales entre elles et l'on aurait

(5) $$P' = \frac{1}{2} P.$$

(5′) $$P'' = \frac{1}{4} P.$$

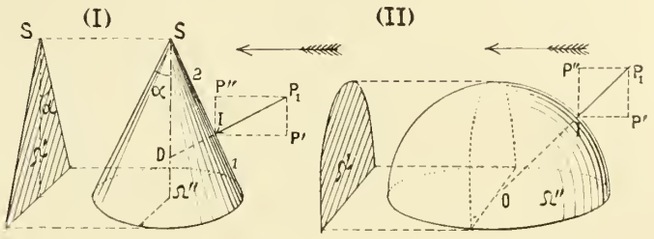


Fig. 323

Dans la formule (5) P serait la pression que le vent exercerait sur le demi-cercle Ω′ ; tandis que dans la formule (5′) P serait la pression que le vent exercerait sur le cercle Ω″. Elle est le double de la précédente ; c'est pourquoi P′ = P″.

Au moyen de ces formules on pourra étudier l'action du vent sur des murs (form. 1), sur des tours ou sur des cheminées d'usine (form. 2), sur des toits coniques (form. 4 et 4′), sur des coupoles (form. 5 et 5′).

345. **Répartition des charges sur les fermes.** — (*a*) **Conventions.** — On supposera (fig. 324) :

1° Que les chevrons sont coupés au droit des pannes et qu'ils reposent sur ces dernières, comme des pièces posées sur appuis libres ;

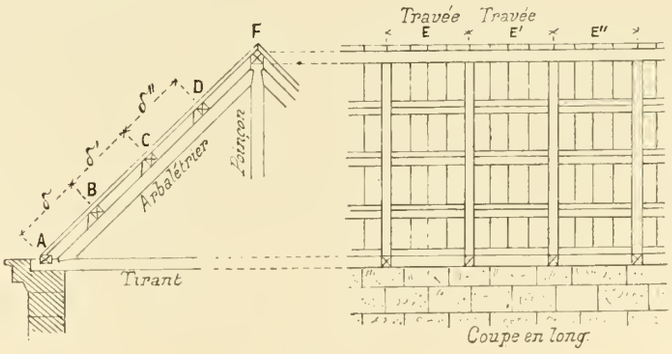


Fig. 324

2° Que les pannes sont dans le même cas par rapport aux arbalétriers. Les conséquences de ces conventions seront les suivantes.

(*b*) **Charge des pannes.** — Chaque panne prendra pour son compte la surface de toiture comprise entre les axes des deux entrepannes contiguës ; par conséquent, si δ et δ′

sont les largeurs d'entrepannes, la panne intermédiaire recevra le poids de $1/2\ (\delta + \delta')$.

En général on aura $\delta = \delta'$.

La sablière A (fig. 324) reportera directement sur le mur le poids qui lui incombera. Pour le calcul des fermes ce poids n'entrera jamais en considération ; on en tiendra compte seulement pour le calcul du mur.

La panne faîtière F prendra sa charge en partie sur un égout et en partie sur l'autre.

(*c*) **Charge des fermes.** — Chaque ferme prendra pour son compte la surface de toiture comprise entre les axes de deux travées consécutives. Si E et E′ sont les longueurs de travées, on appliquera à chaque ferme la longueur $1/2\ (E + E')$. Ordinairement les longueurs de travées sont égales $(E = E')$; alors on appliquera cette longueur E à chacune des fermes, excepté à la première et à la dernière qui n'en prendront que la moitié.

346. **Choix à faire entre la surcharge de neige et celle de vent.** — (*d*) **Préliminaires.** — Remarquons 1° que la neige ne se maintient pas sur des combles dont la pente est supérieure à 45° ; 2° que si le vent souffle en tempête (31ᵐ à 32ᵐ par seconde), ce que nous avons admis pour calculer son effort maximum, il entraînera la neige ; 3° que pour les toits à pente rapide, sur lesquels la neige ne se maintient pas, le vent a plus de prise que sur les autres.

Pour toutes ces raisons on ne devra pas faire, *à la fois*, l'hypothèse du vent et celle de la neige ; mais accepter l'une ou l'autre, c'est-à-dire celle qui sera la plus défavorable. Voici d'après M. **Cordeau**, ingénieur civil, comment ce choix peut s'établir. Le lecteur fera bien de ne lire cet exposé qu'après avoir étudié les numéros qui suivent.

Dans un comble à deux pentes (fig. 325), l'arbalétrier dans sa partie inférieure, c'est-à-dire dans celle qui avoisine le point d'appui, est ordinairement la pièce qui travaille le plus à la compression. L'effort de compression auquel il est soumis aux environs des nœuds n° 1 ou n° 3 (v. fig. 325, I et II) ne dépend que de la réaction statique X_0 ou X_1 de l'appui et de l'angle β que le rampant du comble fait avec le tirant, supposé horizontal. Or cette réaction, X_0 ou X_1, est indépendante de la disposition des pannes, du poinçon, des contre fiches, etc. Par conséquent, au point de vue de la comparaison à faire entre les effets de la neige et ceux du vent, nous pouvons supposer que le comble est triangulaire, sans pannes ni poinçon. Cela posé :

(*b*) **Compression de l'arbalétrier due à la surcharge de neige.** — P étant la charge de neige sur un des deux égouts, une moitié 1/2 P est détruite directement par le mur ; nous n'en tenons pas compte ; l'autre moitié 1/2 P est transmise au faîtage 2 (fig. 325 - I). L'autre égout agit de même ; de sorte que le triangle 1-2-3 est soumis à son sommet 2 à une force P, donnant lieu à des réactions d'appuis $X_0 = 1/2P$ et $X_1 = 1/2P$. Construisons (fig. III) le dynamique des forces X_0, X_1 et P ; dans ce dynamique les lignes *cb* et *cd* sont parallèles aux deux arbalétriers, et chacune de ces longueurs donne la compression des arbalétriers. On a donc, d'après la fig. III, pour la compression F de l'arbalétrier, due à la neige,

$$F = \frac{P}{2 \sin \beta}.$$

D'autre part, soit Ω la surface d'égout du comble évaluée en mètres carrés, *h* la hauteur verticale de neige (*h étant évaluée en millimètres*) ; on aura en kilos, en se rappelant que la neige pèse le dixième de l'eau,

$$P = \frac{h \cos \beta}{10} \times \Omega, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad F = \frac{h \times \Omega \times \operatorname{cotg} \beta}{20}.$$

Nous avons admis dans ce qui précède que *h*, hauteur de neige, pouvait atteindre 800 millimètres ; mais, suivant les cas, *h* pourrait avoir une valeur différente.

(*c*) **Compression de l'arbalétrier due à l'action du vent** [1]. — Soit *q* la pression maxima, *par mètre carré*, que le vent exercerait sur un plan qui serait frappé normalement par lui ; c'est ce que nous avons appelé la puissance unitaire du vent.

Dans ce qui précède nous avons admis que *q* pouvait atteindre une valeur de 125ᵏ. Mais on pourrait accepter une valeur différente, ainsi que nous le ferons plus loin.

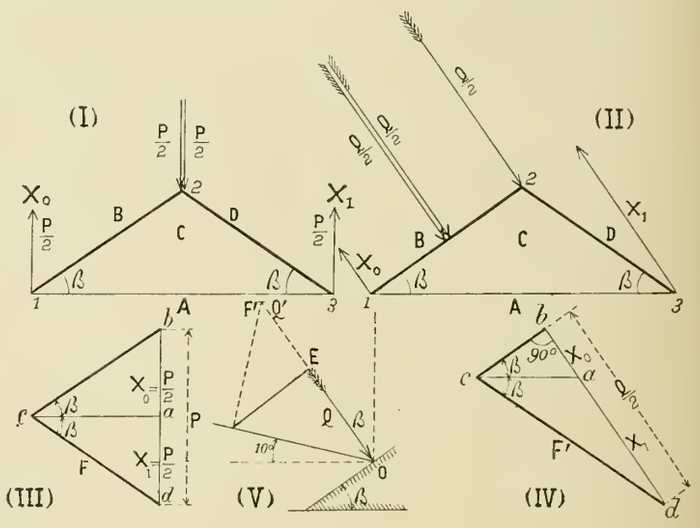


Fig. 325

Le vent agissant sur le rampant du toit (fig. II) développera une force totale normale, Q, qui aura pour expression (v. fig. V)

$$Q = q \times \sin^2 (\beta + 10°) \times \Omega.$$

Cette force Q donnera sur l'appui 1 une composante 1/2 Q que nous considérons comme détruite directement par le

(1) *Nota.* — Dans ce calcul et sur l'abaque n° 9 la puissance unitaire du vent est représentée par la lettre *q* tandis qu'elle l'était par la lettre *p* dans le n° 344 et sur le tableau n° 2.

mur et une autre composante 1/2 Q sur le sommet 2. C'est cette dernière, seule, que nous considérerons.

Admettons qu'elle est équilibrée par deux réactions d'appuis X_0 et X_1 qui lui seront parallèles. Le dynamique *bcda* (fig. IV), dans lequel *bc* et *cd* sont parallèles aux arbalétriers tandis que *ca* est parallèle au tirant, fait connaître en *ab* et *da* les réactions et en *bc* et *cd* les compressions des arbalétriers. L'arbalétrier de droite est le plus comprimé ; sa compression est mesurée par la grandeur de la ligne *cd*.

On remarquera que le triangle *bcd* est rectangle en *b* et que son angle en *c* est égal à 2β : on aura donc pour la compression $(cd = F')$ de l'arbalétrier

$$F' = \frac{Q}{2 \sin 2\beta},$$

remplaçant Q par sa valeur,

$$(2) \qquad F' = \frac{q \times \sin^2(\beta + 10^0) \times \Omega}{2 \sin 2\beta}.$$

(*d*) **Equation d'équivalence.** — Il y aura équivalence entre l'action du vent et celle de la neige si l'on a $F = F'$, ce qui donne l'équation

$$\frac{h \operatorname{cotg} \beta}{20} = \frac{q \sin^2(\beta + 10^0)}{2 \sin 2\beta};$$

remplaçons $\sin 2\beta$ par la valeur $2 \sin \beta \cos \beta$ et $\operatorname{cotg} \beta$ par $\cos \beta : \sin \beta$; il vient, après simplifications,

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{\frac{h}{5q}} - \sin 10^0}{\cos 10^0}.$$

Pour toute valeur de β *inférieure* à celle-ci, l'effet de la neige l'emportera sur celui du vent et inversement.

(*e*) **Abaque de comparaison.** — Posons $x = \operatorname{tg} \beta$ et $y = h : q$.

L'équation (3) peut s'écrire en substituant ces valeurs de x et de y

$$(4) \qquad y = 5(x + \operatorname{tg} 10^0) \times \cos^2 10^0.$$

Elle représente une parabole dont l'axe est vertical, et dont le sommet, situé sur l'axe des x, a pour abscisse $x_1 = -\operatorname{tg} 10^0$.

Un système de droites $x = qy$ donne, en prenant $x = h$, la valeur de $y = h : q$.

Un exemple numérique fera comprendre l'usage de cet abaque (fig. 326).

Exemple. — Un comble doit être établi avec une pente de 2 de hauteur pour 3 de base ($\operatorname{tg} \beta = 2 : 3 = 0{,}66$.) Des renseignements statistiques permettent de supposer que la hauteur maxima de neige pourrait atteindre $h = 0^m{,}650$, et que le vent ne soufflant jamais avec une vitesse v supérieure à 30^m par seconde (voir tableau n° 2, page 280) ne développera jamais une pression normale, q, supérieure à $112^k{,}500$ par mètre carré. Laquelle des deux surcharges, neige ou vent, doit-on prendre en considération pour l'étude du projet ?

1° On prend sur le bord supérieur le point pour lequel $h = 0^m{,}65$.

2° On descend jusqu'au point *n* de rencontre avec l'oblique $112^k{,}500$. (Cette oblique n'est pas tracée sur l'abaque ; elle serait comprise entre les obliques 100 et 125. On apprécie la position du point *n* à vue d'œil.)

3° On mène l'horizontale *nn'* jusqu'à la rencontre en *n'* avec la parabole.

ABAQUE N° 9

Comparaison entre les effets du vent et ceux de la neige.

NOTA. Sur cet abaque la puissance unitaire du vent est représentée par la lettre *q* tandis que sur le tableau de la page 280 elle l'était par la lettre *p*.

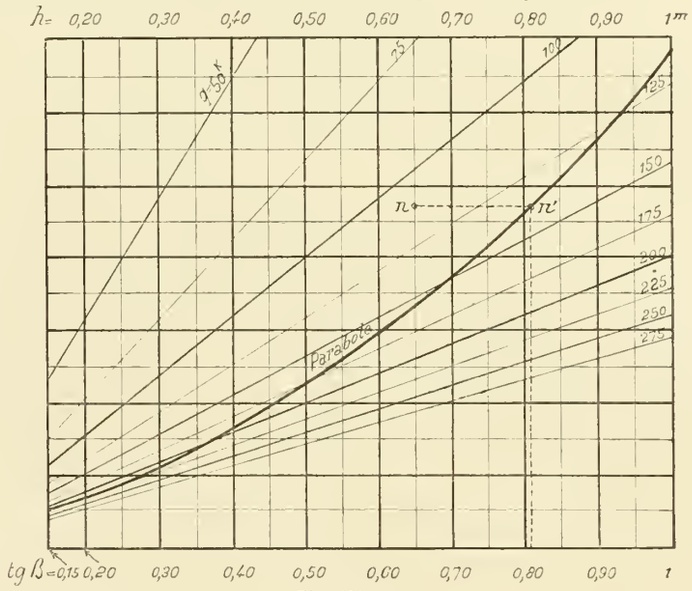


Fig. 326

4° L'abscisse, $x = \operatorname{tg} \beta$, du point *n'* est $x = 0{,}812$ environ.

Telle serait la pente pour laquelle il y aurait équivalence entre les effets du vent et ceux de la neige. Comme la pente donnée 0,66 est plus faible, c'est la surcharge de neige qui sera la plus dangereuse ; c'est elle qu'il faudra faire entrer dans les calculs.

Nota. — En prenant pour puissance unitaire du vent $q = 125^k$ et pour hauteur maxima de la neige $h = 0^m{,}80$, comme nous avons fait plus haut, l'abaque donne une pente de 0,850, ce qui veut dire que :

« En admettant qu'il puisse tomber $0^m{,}80$ de neige, et que « le vent puisse souffler avec une vitesse de $31^m{,}70$ par se- « conde, pour les toits dont la pente est supérieure à 85 0/0 « il faudra considérer l'action du vent sans s'occuper de « celle de la neige ; pour les toits à pente plus faible ce sera « le contraire. »

§ 2. — Propriétés des systèmes articulés

347. Définitions. — Les fermes de combles et les poutres en treillis sont constituées par des pièces dont les axes sont des lignes droites et que l'on nomme des *barres*. Les points où ces barres se réunissent se nomment des *nœuds*. Certains de ces nœuds reposent directement sur les appuis, ce sont les *nœuds d'appui*, ce sont eux qui reçoivent les réactions d'appui ; tels sont les nœuds n° 1 et n° n de la fig. 328 ; d'autres reçoivent les charges ; ce sont les *nœuds de charge* ; tels sont les nœuds n° 2, n° 4 et n° 7 de la fig. 328. D'autres, les *nœuds libres*, ne servent qu'à réunir les barres, tels sont les nœuds n° 3, n° 5, n° 6 et n° 8.

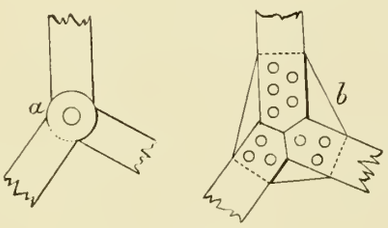


Fig. 327

Nous supposerons que, aux différents nœuds, la réunion des barres se fait par des tourillons tels que a (fig. 327) permettant la rotation. C'est ainsi que sont constitués la plupart des ponts des systèmes dits *américains*.

En France on ne réunit pas ordinairement les barres par des tourillons, mais plutôt par des assemblages rigides tels que b (fig. 327) rivés, qui consolident les nœuds sans changer beaucoup, cependant, la répartition des forces dans les barres.

348. Classification des systèmes de barres. — (a) **Avantages.** — Les principaux avantages des systèmes de barres sont les suivants : 1° Si le système est composé du nombre n' voulu de barres comparé au nombre n de nœuds (nous établirons plus loin la relation $n' = 2n - 3$ qui doit relier n' et n) ;

2° Si les charges ne sont appliquées qu'aux nœuds ;

3° Si les appuis sont stricts (voir plus haut n° 169-e) alors :

(a) Les barres ne subissent que des tensions et des compressions, c'est-à-dire des efforts longitudinaux et jamais de flexion.

(b) Ces tensions sont calculables par la statique pure, sans faire intervenir les déformations élastiques.

(c) A la condition que les appuis soient stricts, les changements de température ne produisent que des modifications insignifiantes dans les efforts supportés par les barres.

(b) **Condition de détermination.** — Établissons la relation qui doit exister entre le nombre n de nœuds et le nombre n' de barres pour qu'il en soit ainsi.

D'abord, comme système d'appui strict, prenons (v. n° 169-e) celui qui consiste en une rotule glissante et en une rotule fixe B. C'est, d'ailleurs, le seul système d'appui strict que nous puissions adopter. Prenons pour origine O le nœud d'appui marqué n° 1 ; pour axe des y la normale à la surface de glissement, pour axe des x une perpendiculaire à cette normale ; soit

n le nombre des nœuds,

n' le nombre des barres.

L'appui O ne peut développer qu'une réaction Y_0 normale à la surface de glissement ; c'est une première inconnue. L'autre appui, n, peut développer une réaction quelconque mais dont nous chercherons la composante y_1 parallèle à l'axe oy et la composante x_1 parallèle à l'axe des x. Cela fait déjà trois inconnues, en comptant Y_0.

Nos autres inconnues seront les tensions $f_1, f_2, \ldots\ldots f_{n'}$ des barres. Il y en a autant que de barres, c'est-à-dire n'.

Cela posé : chaque nœud, y compris les nœuds d'appui, doit être séparément en équilibre. Pour chacun d'eux nous écrirons que la somme des projections, sur les axes coordonnées, des forces qui y sont appliquées est nulle.

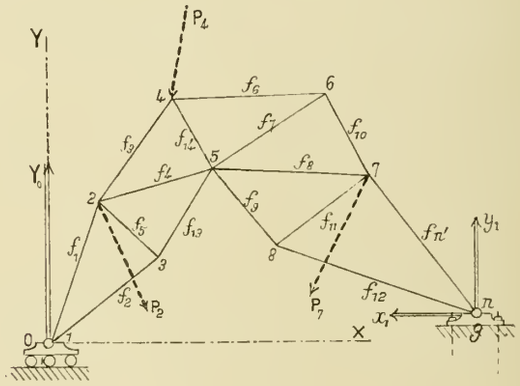


Fig. 328

Pour les nœuds libres, les seules forces seront les tensions inconnues des barres.

Pour les nœuds chargés, ce seront les tensions $f_1, f_2, \ldots\ldots f_{n'}$ (inconnues) des barres et, en plus, les charges (connues).

Pour les nœuds d'appui, ce seront les tensions (inconnues) des barres qui y aboutissent et, en plus, les réactions Y_0, x_1 et y_1 (inconnues). Nous aurons donc, comme inconnues, les tensions des barres, au nombre de n', et les trois réactions, soit $n' + 3$ inconnues.

Pour chaque nœud nous pourrons écrire deux équations, et comme il y a n nœuds, cela fera $2n$ équations ; or, on doit avoir autant d'équations que d'inconnues, cela donne donc la relation

$$n' + 3 = 2n \qquad \text{ou}$$

$$(1) \qquad n' = 2n - 3.$$

(*c*) **Système strict** (*strictement indéformable*). — Telle est la *condition de détermination.*

Lorsqu'elle est remplie on a ce que nous nommerons un *système articulé strict.*

(*d*) **Système insuffisant** (*ou déformable*). — Si le nombre de barres est inférieur au nombre n' donné par l'équation (1), alors on a moins d'inconnues que d'équations. Un certain nombre des tensions inconnues seront donc déterminées, mais il se pourra, quand on en substituera les valeurs dans les équations en trop, données par un ou plusieurs nœuds, qu'elles ne puissent pas les vérifier ; il y aura incompatibilité, ce qui voudra dire que ces nœuds restants ne pourront pas être en équilibre sous l'action des forces qui leur viennent des autres nœuds; autrement dit, la figure se déformera. On dit alors que ce système articulé est *insuffisant* ou encore qu'il est *déformable.*

(*e*) **Système surabondant.** — Si le nombre des barres est supérieur au nombre n' donné par l'équation (1), alors il y a plus d'inconnues que d'équations, et ces inconnues sont indéterminées. On dit que le système est *surabondant ;* pour déterminer les tensions des barres il faut faire intervenir les déformations élastiques, ce qui rend le problème beaucoup plus difficile à résoudre.

349. **Systèmes triangulaires.** — On se rendra compte facilement, sur des systèmes formés de triangles juxtaposés, que tout système de barres qui est strict au point de vue de la détermination des forces intérieures est aussi, au point de vue géométrique, *strictement indéformable* ; ce qui veut dire que la connaissance des longueurs de chaque barre suffit à déterminer, *d'une seule manière*, le système tout entier. (Suivre sur la fig. 328, qui est un système triangulaire.)

En effet, le triangle est le plus simple de tous les systèmes strictement indéformables ; pour lui on a $n = n' = 3$. Si, sur l'un de ses côtés, nous construisons un autre triangle, nous aurons encore un autre système strictement indéformable et, plus généralement, si prenant deux sommets d'un système strict nous en faisons les points de départ d'un nouveau triangle, nous aurons un nouveau système strict.

En opérant ainsi, chaque nœud nouveau nécessite l'introduction de deux barres nouvelles. Si, partant du triangle (3 barres et 3 nœuds) nous voulons arriver à un système strict de n nœuds, c'est-à-dire renfermant $(n-3)$ nœuds de plus que le triangle, il faudra ajouter $2(n-3)$ barres ; le nombre total n' de barres correspondant à un système de n nœuds sera donc

$$n' = 3 + 2(n-3) \qquad \text{ou}$$

$$n' = 2n - 3.$$

Nous retrouvons ainsi la condition de détermination.

Exemple. — Sur la figure 328 nous avons pour les nœuds $n = 9$ et pour les barres $n' = 15$ et l'on a bien

$$n' = 2n - 3, \quad \text{car} \quad 15 = 2 \times 9 - 3.$$

Si l'on joignait, par une barre, le nœud n° 3 au nœud n° 8, le système deviendrait surabondant ; il y aurait une barre en trop.

350. **Détermination directe des réactions d'appui.** — Si les appuis sont stricts, comme nous l'avons supposé, les trois réactions Y_0, x_1 et y_1 peuvent se déterminer directement par la statique sans faire intervenir les tensions de barres ; on écrira 1° que la somme des projections des réactions Y_0, x_1, y_1 et de toutes les forces extérieures, c'est-à-dire des charges, sur l'axe des x est nulle ; 2° que la somme des projections sur l'axe des y est nulle ; 3° que la somme de leurs moments par rapport à un point fixe, l'origine par exemple, est nulle ; ces trois équations permettront de déterminer les trois inconnues.

La statique graphique les donnerait, ainsi que nous l'avons indiqué au n° 169 et ainsi que nous le verrons par la suite.

Les considérations théoriques dont nous avions besoin étant établies, nous allons prendre une série d'exemples numériques allant en augmentant comme difficultés. De cette façon le lecteur se familiarisera, petit à petit, avec les constructions graphiques.

2e SECTION

FERMES EN BOIS

§ 3. — FERME DE 8 MÈTRES DE PORTÉE

351. **Préliminaires.** — (*a*) **Données.** — La ferme comprend : deux arbalétriers, un tirant, un poinçon et deux contrefiches reportant les charges des pannes sur le poinçon (fig. 330-I).

Nous admettons que l'espacement moyen des pannes, compté en projection horizontale, est de 2^m ; c'est pourquoi nous étudierons des types de fermes répondant à des portées de 8^m (1 panne par égout), 12^m (2 pannes par égout), 16^m (3 pannes par égout), etc... Il est évident que cet espacement de 2^m, pour les pannes, n'a rien d'absolu.

Les *échelles* de l'épure sont :

1 cent. par mètre pour les longueurs ;

2 cent. par tonne pour les forces.

Nota. — Ces échelles seraient trop petites pour une épure de précision. Nous engageons les constructeurs à adopter des échelles de grandeur double, au moins.

Portée, $l = 8^m00$.

Espacement des fermes, $E = 4^m00$.

Couverture en tuiles plates : Pente du toit 2/3.

Longueur d'égout, mesurée sur l'épure. . . . $4^m,80$

Charge (couverture et charpente) par m^2 d'égout (voir tableau du n° 340-*b*) . . . . . 120^k

Charge par égout et par travée, $P = 120 \times 4,80 \times 4 = 2304^k$

Charge par panne. . . . . $1/2\ P = 1152^k$

Pour ce premier exemple nous ne nous occupons pas de la neige ni du vent, mais nous allons expliquer très en détail les opérations à effectuer ; nous serons plus bref pour les autres.

(*b*) **Réactions des appuis.** — L'épure de statique graphique d'une charpente comprend toujours deux parties :

1° La recherche des réactions, qui sera résolue par ce que nous nommerons l'*épure d'équilibre général* ou encore l'*épure des réactions* ;

2° La recherche des tensions (tractions ou compressions) des barres, qui sera résolue par l'*épure des tensions*.

Dans le cas actuel la ferme est symétrique, les efforts extérieurs sont verticaux et symétriquement distribués ; il est donc évident que les réactions Y_0 et Y_1 des appuis seront verticales, égales entre elles et à la demi-somme des charges ; on aura donc :

$$Y_0 = Y_1 = \frac{3 \times 1152}{2} = 1728^k.$$

Remarque importante. — Parmi les forces extérieures nous ne comptons pas et nous ne compterons jamais, quand il s'agira de déterminer les tensions des barres, les charges supportées par les sablières, car le point d'appui soutient directement ces dernières.

Nous ne tiendrons compte de ces charges que pour le calcul du mur ou du poteau qui doit soutenir la ferme.

(*c*) **Séparation des espaces.** — Avec **M. Flemming-Jenkins** nous placerons des lettres majuscules A, B, C... dans les *espaces* que séparent les barres ou les forces (y compris les réactions Y_0 et Y_1). Les nœuds seront désignés par des numéros 1, 2, 3... en caractères minuscules. Dans ces conditions une force, ou une barre, sera désignée par les deux lettres des espaces qu'elle sépare.

Exemple : Le tronçon inférieur de l'arbalétrier de gauche, ou plutôt la tension qui y sera développée, sera la ligne ou la force BC.

La réaction Y_0 sera la force AB.

Le tirant sera la ligne ou la force AC.

On remarquera que l'espace extérieur A fait tout le tour de la ferme.

(*b*) **Déformabilité du système.** — Le système est-il strictement indéformable ? Il y a six nœuds ($n = 6$) et 8 barres

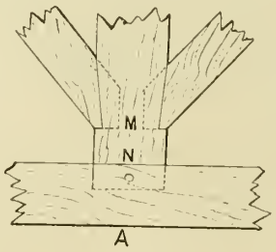


Fig. 329

($n' = 8$) en comptant le tirant dans son entier pour une seule barre.

L'équation de détermination (V. n° 348-*b*), $n' = 2n - 3$, donne $2n - 3 = 9$ au lieu de 8. Il y aurait donc une barre

de moins qu'il ne faudrait, c'est-à-dire que le système serait *déformable*. En réalité (fig. 329) les contrefiches s'assemblent à tenon et mortaise avec embrèvement en un point M du poinçon qui, pour empêcher que son bois n'éclate sous l'influence des pressions exercées par les contrefiches, doit être à une petite distance de l'extrémité inférieure du poinçon, c'est-à-dire de l'arbalétrier. En réalité, aussi, le point M et le point N sont rendus solidaires l'un de l'autre par toute la portion MN du poinçon, portion qui, pour des efforts obliques, pourrait travailler à la flexion ; mais comme elle est très courte, ce sera sans danger.

Revenons à la figure d'ensemble (330-I). Pour que le système soit strict et que l'on ait $n' = 2n - 3$, il faudrait ou bien avoir un tirant brisé tel que $1 - 3 - 6$, ce qui serait possible en le construisant en fer, ou bien tracer les contrefiches de 2 en A et de 5 en A.

Néanmoins, tel qu'il est, le système de la figure 331, même en admettant que le nœud n° 3 ne soit pas rendu solidaire du tirant, a les tensions de ses barres déterminables statiquement ; cela tient à ce que les forces sont toutes verticales et disposées symétriquement; mais survienne la moindre action oblique les quatre nœuds 1, 2, 5 et 6 tendraient à tourner en brisant les tenons dans leurs mortaises.

352. Tensions des barres. — (*a*) **Le dynamique et la charpente.** — La figure 330-II, qui se nommera le *dynamique* (dyn.), tandis que la figure I sera la *charpente* (charp.), est la réunion méthodique de tous les dynamiques des forces qui doivent s'équilibrer sur chaque nœud.

Tout d'abord l'équilibre général est exprimé (dyn.) par les trois forces verticales *bd*, *dg*, *gh* égales, chacune, à 1152^k, c'est-à-dire aux charges BD, DG et GH de la charpente (charp.). Les réactions des appuis (dyn.) sont

$$ha = Y_1 = 1728^k \quad \text{et} \quad ab = Y_0 = 1728^k.$$

Remarquons, une fois pour toutes, que grâce à la notation de M. **Flemming-Jenkins** les lignes qui se correspondent sur la charpente et sur le dynamique sont représentées par les mêmes lettres, majuscules sur la charpente et minuscules sur le dynamique, ce qui aide beaucoup à se reconnaître parmi les lignes.

Cela posé : cherchons les tensions des barres. Prenons pour cela chaque nœud l'un après l'autre, en commençant par un nœud pour lequel *il n'y ait que deux forces inconnues* à trouver. Les nœuds d'appui, 1 ou 2, sont seuls dans ce cas.

(*b*) **Nœud n° 1** (Charp.). — Ce nœud est placé à la jonction des trois espaces A, B et C c'est-à-dire à la rencontre des trois forces $AB = Y_0$ (réaction connue), BC tension de l'arbalétrier (inconnue) et CA tension du tirant (inconnue). Nous dirons que c'est un nœud à *trois espaces*; son dynamique sera donc un polygone à *trois côtés* c'est-à-dire un triangle.

Son dynamique. — Dès lors (dyn.) une des forces *ab* est déjà connue; par le point *b* on mène *bc* parallèle à BC et, par le point *a*, on mène *ac* parallèle à AC, ce qui, à la rencontre, fait connaître le point *c*; le dynamique du nœud n° 1 est donc le triangle *abc*; on mesure à l'échelle des forces les longueurs de ses côtés et l'on trouve pour le tirant 2610^k et pour l'arbalétrier 3125^k; mais il faut reconnaître si ces tensions sont des tractions ou des compressions.

Nature des tensions. — A cet effet, parcourons le dynamique *abc* dans le *sens amorcé* par celle des forces qui est connue; ici c'est la réaction *ab*; elle doit être parcourue de *bas en haut*; par conséquent le triangle doit être parcouru dans le sens *ab — bc — ca*. Dès lors l'arbalétrier BC

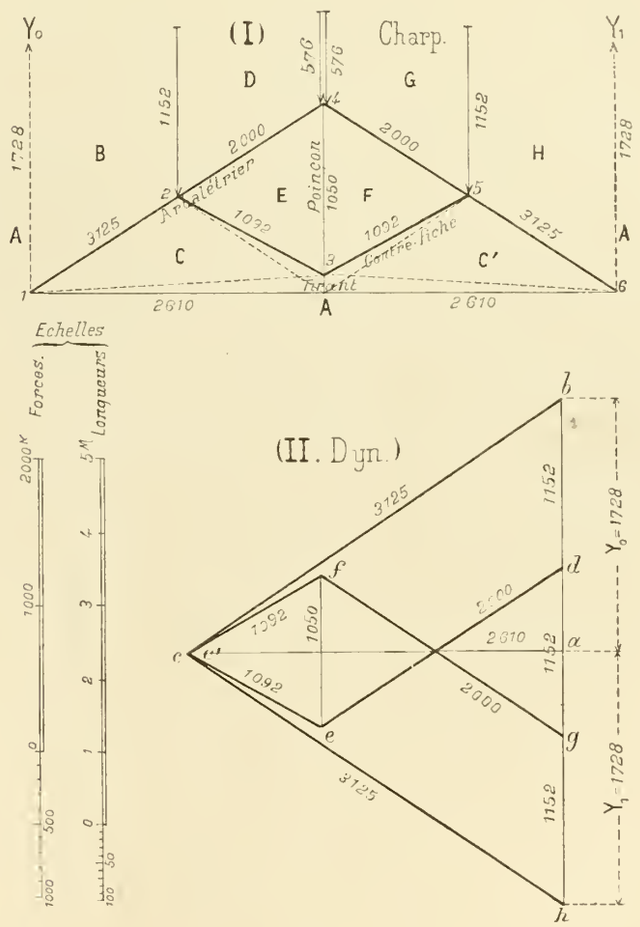


Fig. 330

(charp.), quand il s'agit du nœud n° 1, doit exercer sur ce nœud une action dirigée dans le sens *bc* (dyn); d'où il résulte que l'arbalétrier doit *pousser* sur le nœud n° 1 et par conséquent l'arbalétrier est une pièce *comprimée*.

Quant au tirant, sa tension doit agir dans le sens *ca* du dynamique ; par conséquent il doit *tirer* sur le nœud n° 1 ; le tirant est donc une pièce *tirée*.

Convention graphique. — Nous ferons la convention, aussi bien sur la charpente que sur le dynamique, de représenter les pièces comprimées par un gros trait et les pièces tirées par un trait fin.

(*c*) **Nœud n° 2.** — Ce nœud jonctionne les quatre espaces CBDE et il réunit les quatre forces, CB tension du tronçon inférieur de l'arbalétrier connue par l'épure précédente, BD, charge (connue), DE tension du tronçon supérieur de l'arbalétrier (inconnue) EC tension de la contrefiche (inconnue). Il n'y aura donc que deux tensions inconnues à déterminer, ce qui est, et sera toujours, la condition nécessaire.

Son dynamique. — Son dynamique sera donc un polygone à 4 côtés ; nous connaissons déjà le côté *cb* par l'épure précédente ; nous connaissons aussi le côté *bd* égal à la charge c'est-à-dire à 1152^k ; il ne reste plus qu'à mener par le point *d*, la ligne *de* parallèle à DE et, par le point *c*, la ligne *ce* parallèle à CE.

La rencontre donne le point *e*. Le dynamique du nœud n° 2 est le quadrilatère *cbdec*.

Nature des tensions. — Il faut le parcourir dans le *sens amorcé* par celles de ses forces qui sont connues.

Nous avons l'embarras du choix entre la force *bd*, qui, étant un poids, doit être parcourue de haut en bas et la force *cb*, compression de l'arbalétrier.

Cette dernière, quand il s'agissait du nœud n° 1, était parcourue dans le sens *bc* ; mais comme il s'agit maintenant du nœud n° 2, elle doit être parcourue dans le sens contraire *cb*.

Il en sera de même pour toutes les barres du système ; nous pouvons dire d'une manière générale :

« Toute barre parcourue dans un sens par une force intérieure, quand il s'agit du nœud situé à l'une de ses extrémités, doit être parcourue dans le sens inverse pour le nœud de son autre extrémité. »

En effet, chaque barre prise isolément est en équilibre, puisque l'ensemble de la charpente est lui-même au repos. Or les seules forces qui sollicitent une barre sont les réactions des nœuds de leurs extrémités, lesquelles sont égales et contraires aux actions des barres sur les nœuds. Il faut donc que ces réactions c'est-à-dire, en définitive, les forces qui développent la tension dans la barre, soient égales et de sens contraire. C. Q. F. D.

En parcourant le dynamique du nœud n° 2, dans le sens *cb — bd — de — ec* et en mesurant les côtés à l'échelle des forces on reconnaît que (charp.) et (dyn.) :

L'arbalétrier DE est comprimé à 2000^k,

La contrefiche EC est comprimée à 1092^k.

(*d*) **Nœud n° 4.** — Ce nœud jonctionne les quatre espaces E, D, G et F ; il réunit les forces ED (connue par le nœud n° 2) DG, (charge connue 1152^k), GF (inconnue), FE tension du poinçon (inconnue) ; son dynamique sera le quadrilatère *edgf* ; nous connaissons déjà deux côtés *ed*, et *dg* c'est-à-dire trois sommets *e*, *d* et *g* ; pour avoir le quatrième sommet *f*, nous menons par le point *g* la ligne *gf*, parallèle à GF et par le point *e* la verticale *ef*, parallèle au poinçon EF ; la rencontre donne le point *f*. Ce quadrilatère doit être parcouru dans le sens amorcé par la charge *dg*, c'est-à-dire dans le sens *ed — dg — gf — fe*. On en conclut que

L'arbalétrier GF est comprimé à 2000^k,

Le poinçon FE est tiré à 1050^k.

(*e*) **Nœud n° 5.** — Il sépare les quatre espaces F, G, H et C'. Son dynamique est le quadrilatère *fghc'*, obtenu de la même manière que les autres dynamiques.

(*f*) **Nœud n° 6.** — Il sépare les trois espaces C', H et A ; son dynamique est le triangle *c'ha*.

Il est à remarquer que ce dynamique partiel *c'ha* doit servir de vérification aux tracés précédents, car le point *c'* doit coïncider avec le point *c*.

C'est là un grand avantage des tracés de la statique graphique. Les dynamiques auxquels on arrive doivent toujours, à titre de vérification, se refermer, à un moment donné, les uns sur les autres.

(*g*) **Nœud n° 3.** — Ce dernier nœud sépare les cinq espaces A, C, E, F et C'. Son dynamique est tout trouvé par les tracés précédents ; c'est le pentagone *acefc'*.

(*h*) **Remarque sur les figures réciproques.** — Les figures I et II jouissent des propriétés géométriques suivantes, qui leur ont fait donner le nom de *figures réciproques* :

1° Leurs lignes sont deux à deux parallèles.

2° A tout nœud dans l'une correspond un polygone dans l'autre et réciproquement.

Ainsi, l'espace E de la fig. I est un espace limité par les trois côtés ED, EF et EC. Son correspondant sur la fig. II est le nœud *e* auquel convergent les trois côtés *ed — ef* et *ec*.

Réciproquement, au nœud n° 2 qui est à 4 lignes sur la fig. I, correspond sur la fig. II le polygone *cbde* ; ce polygone entoure un espace dans lequel, par analogie et pour rappeler sa réciprocité avec le nœud n° 2, nous pourrions écrire le nombre 2.

L'épure de statique graphique est terminée. Elle nous permet de dresser le tableau suivant qui servira au calcul des pièces, ainsi que nous allons le montrer.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

Données		Tensions		Longueurs
Espacement des fermes..	$4^m,00$	Tirant (traction)	2610^k	$8^m,00$
Portée	$8^m,00$	Poinçon id.	1050	$2^m,45$
Charge par m^2.	$120^k,00$	Arbalétriers (1) (compression)	3125	$2^m,40$
Charge par panne.....	$1152^k,00$	Contre-fiches (compression)	1092	$2^m,30$

(1) Dans leur partie inférieure seulement.

353. **Résistance d'un assemblage à tenon et mortaise.** (*a*) **Définitions.** — Les points faibles des charpentes en bois sont les assemblages. Le plus fréquemment employé est l'assemblage à tenon et mortaise, avec embrèvement. La mortaise est pratiquée dans la pièce tirée tandis que le tenon termine la pièce comprimée (fig. 331). Rappelons que l'embrèvement ADL est une entaille pratiquée sur toute la largeur a de la pièce mortaisée. AD se nomme l'*about* et DL se nomme le *pas* de l'embrèvement.

DE se nomme l'*about* et DL se nomme la *racine* du tenon ; EE est le *bout* et EL le *dessous* du tenon.

Le *talon* de la pièce mortaisée est la partie d'extrémité qui se trouve au-delà de la mortaise ; le tenon presse sur le talon et c'est par l'intermédiaire de la section XX', que nous nommerons *section d'about*, que cette pression se transforme en traction sur le tirant.

Le bout EE du tenon ne porte pas sur le fond de la mortaise ; il y a toujours un certain jeu.

(*b*) **Répartition des efforts.** — La compression f de l'arbalétrier ne se transmet au tirant que par l'intermédiaire, d'une part, des abouts AD et DE de l'embrèvement et du tenon, et, d'autre part, du pas DL de l'embrèvement.

Si l'on décompose (fig. I) la compression de l'arbalétrier en deux composantes qui sont ff', normale au plan des abouts et of', normale au pas, on reconnaît que les abouts subissent un effort ff' qui est un peu plus grand que l'effort horizontal ff'' que donnait l'épure de la figure 330 pour le tirant ; néanmoins la différence $f'f''$ est peu considérable et presque négligeable.

Nous admettrons donc que nous calculons l'assemblage d'après la tension du tirant ff'' que l'épure de statique graphique a fait connaître.

Cette tension du tirant se traduit, sur la section d'about XX' (fig. 331-II), par une compression exercée sur le talon, laquelle doit se répartir sur la surface β marquée de hachures mixtes sur la figure III. Il faut donc, tout d'abord, que cette surface d'about β ne s'écrase pas sous la charge.

Cette surface d'about β est rattachée au corps du tirant par les surfaces γ et γ qui se nomment les *jouées de la mortaise*, et par la surface inférieure V, qui avec les jouées γ et γ complète la section d'about de la mortaise.

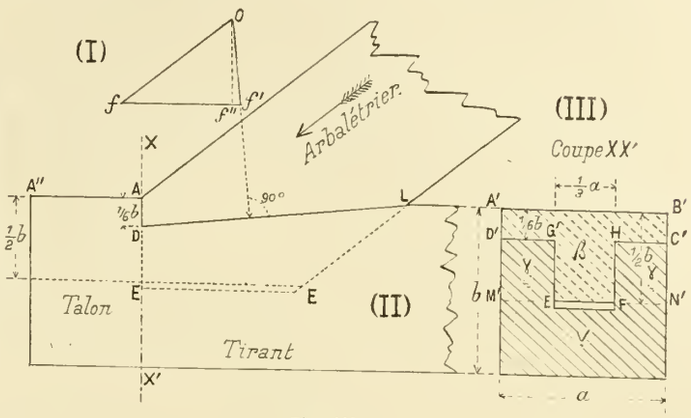


Fig. 331

(*c*) **Calcul approximatif de la mortaise.** — Admettons que la partie inférieure V de la section XX' ne prenne, pour son compte, presque rien de la traction du tirant.

Si nous admettons, en outre, que la résistance de sécurité du bois est la même à la traction et à la compression (ce qui n'est pas exact, elle est plus grande à la traction qu'à la compression), nous déduirons de cette analyse sommaire :

1° Que la surface de section, $\gamma+\gamma$, des jouées de la mortaise doit être égale à la surface β des abouts du tenon et de l'embrèvement ;

2° Que l'une quelconque de ces surfaces, soit β, soit son égale $\gamma+\gamma$, doit être telle qu'en la multipliant par la résistance de sécurité ($600\,000^k$ par exemple) on obtienne la tension trouvée pour le tirant.

(*d*) **Equation de tracé.** — Pour qu'il en soit ainsi l'assemblage doit, tout d'abord, satisfaire à certaines conditions de tracé que nous allons traduire par une équation.

Soient a la largeur et b la hauteur d'équarrissage du tirant. Soient Kb la hauteur de l'embrèvement et $K'a$ la largeur du tenon. (K et K' seront deux coefficients arbitraires qui entreront dans l'équation que nous cherchons). Admettons enfin que, selon l'usage, le tenon a pour hauteur $1/2\,b$, c'est-à-dire la moitié de la hauteur du tirant.

Ecrivons que la surface β est égale à la surface $\gamma+\gamma$, c'est-à-dire au quart de la section $a \times b$ du tirant, nous obtenons l'*équation de tracé*.

$$\beta = \frac{K'ab}{2} + a(1-K')Kb = \frac{ab}{4}$$

qui devient, en simplifiant :

$$(1) \qquad 2K' + 4K(1-K') = 1.$$

Si l'on fait dans cette équation $K = 1/6$, c'est-à-dire si l'embrèvement a comme hauteur d'about le sixième de la hauteur de la pièce, on aura

$$K = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad K' = \frac{1}{4},$$

ce qui veut dire que l'épaisseur du tenon devra être le quart de celle de la pièce. Ce sont là des proportions très souvent adoptées par les charpentiers.

On adopte encore quelquefois $K = \frac{1}{8}$ d'où l'on déduit en vertu de l'équation (1) $K' = \frac{1}{3}$ Dans l'un comme dans l'autre cas $\beta = 2\gamma = 1/4\ ab$, ce qui veut dire qu'il sera prudent de considérer la traction du tirant comme étant à répartir sur le quart seulement de sa section. Autrement dit, on devra calculer le tirant, et plus généralement toutes les pièces de bois tirées, en comptant sur *la section entière* mais en admettant pour résistance de sécurité le *quart* de la résistance usuelle, soit 150 000^k au lieu de 600 000^k par m^2.

(*e*) **Calcul plus exact.** — En agissant ainsi, on trouvera peut-être que nous sommes d'une prudence exagérée et que nous ne tenons pas compte de la résistance de la partie V de la section du tirant qui est située au-dessous des jouées de la mortaise. Pour faire le calcul en en tenant compte, il faudrait (fig. 332) : 1° chercher le centre de gravité G de la surface d'about β du tenon et de son embrèvement et supposer que ce point est le centre des pressions transmises par l'arbalétrier ; 2° chercher le centre de gravité G′ de la surface d'about de la mortaise, calculer sa surface Ω, son moment d'inertie I et la grandeur α de son noyau central. 3° prendre la distance X des deux points G et G′ et, pour avoir la tension unitaire maxima développée sur l'arête D′C′, appliquer la formule (1) du n° 329 ; voici cette formule :

$$p(\max) = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{X}{\alpha}\right).$$

Adoptons le premier tracé de mortaise (hauteur d'em-

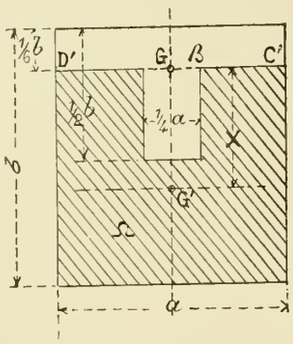


Fig. 332

brèvement 1/6 *b*, largeur de tenon 1/4 *a*) ; on reconnaît facilement que le centre de gravité G de la surface β des abouts tombe alors sur la ligne D′C′, c'est-à-dire précisément sur l'arête de la section d'about de mortaise qui doit transmettre au corps du tirant l'effort horizontal *ff′* trouvé ci-dessus.

Or, en négligeant le vide occupé par l'about du tenon cette section d'about Ω est rectangulaire et nous savons que, si le centre de pression est situé sur son arête, la tension unitaire développée sur cette arête est le quadruple de ce qu'elle serait si le centre de pression tombait au centre de gravité.

Ainsi : 1° la composante *ff′* sur les abouts (fig. 331-I) est plus grande que la tension *ff″* donnée par l'épure de statique graphique ; 2° la section de transmission $(2\gamma + V)$ est les 3/4 de la section entière du tirant, ce qui rendrait déjà la tension unitaire égale aux 4/3 de ce qu'elle serait sur section entière ; 3°, par le fait de l'excentricité du centre de pression G, la tension unitaire est encore rendue 4 fois plus grande sur l'arête dangereuse.

Elle est donc en réalité 4 fois les 4/3, soit les 16/3, soit plus de 5 fois ce qu'elle serait sur section entière.

Pour toutes ces raisons, nous croyons pouvoir formuler la règle suivante :

(*f*) **Règle pour la mortaise.** — « La résistance d'assem-
« blage de toute pièce de bois qui sera tirée par le fait d'un
« assemblage à tenon et mortaise avec embrèvement sera
« calculée à la traction, sur section entière, mais en pre-
« nant pour résistance de sécurité pratique le quart et,
« mieux encore, le cinquième de la résistance ordinaire de
« sécurité théorique; la section dangereuse de la pièce sera
« la section d'about de la mortaise. »

(*g*) **Pièces à la fois tirées et fléchies.** — Si, comme nous le verrons plus loin, le tirant supportait en outre un plancher il travaillerait alors, avec section dangereuse en son milieu, comme pièce à la fois fléchie et tirée. Nous établirons une formule et un abaque pour en faire le calcul. Dans la formule que nous établirons entrera la résistance de sécurité, mais ce sera la résistance entière et non plus la résistance réduite comme pour le calcul de la mortaise.

Par conséquent, dans ce cas, on calculera d'abord la pièce en tant que pièce mortaisée, c'est-à-dire à section entière mais avec résistance de sécurité réduite au cinquième ; on la calculera une seconde fois comme pièce à la fois tirée et fléchie, mais avec résistance entière de sécurité et l'on choisira le plus fort des deux équarrissages ainsi trouvés.

(*h*) **Résistance du tenon.** — Le tenon et son embrèvement pourraient périr par écrasement de leurs abouts : mais si, par les conditions précédentes, l'écrasement de l'about de la mortaise est évité, il en sera de même pour le tenon ; de sorte que l'arbalétrier et, plus généralement, toute pièce comprimée sera surtout dangereuse en tant que pièce aboutée ; c'est comme telles que seront déterminées ses dimensions. Néanmoins, au point de vue de l'écrasement du tenon ou plutôt de l'about de l'embrèvement, car c'est

lui qui doit supporter presque tout l'effort, nous conseillons d'employer les embrèvements à abouts multiples (fig. 333, I et II). Le tracé de la figure II nous semble le meilleur ; il

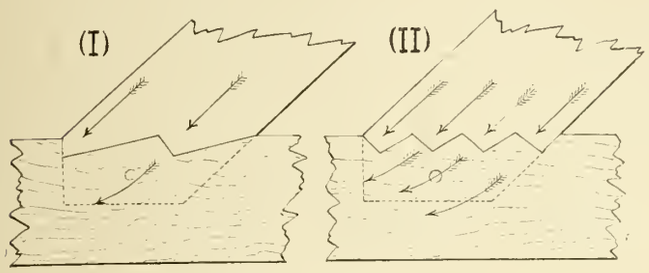


Fig. 333

répartit les tensions sur la plus grande partie des sections aussi bien sur l'arbalétrier que sur le tirant ; il réduit au minimum les effets de l'excentricité.

354. **Calcul des pièces de la ferme.** — (*a*) **Marche à suivre.** — Nous conseillons de commencer le calcul des bois par l'arbalétrier. C'est lui qui supporte le plus grand effort et cet effort est une compression. Il sera donc calculé comme pièce aboutée, à *section carrée*, car il ne doit subir aucune autre flexion que celle due à son propre poids et qui est négligeable. Soit a son côté d'équarrissage.

Pour des raisons de stéréotomie pure et de tracé d'assemblage, le tirant et le poinçon ne pourront pas avoir une épaisseur inférieure à a ; ce qui déterminera un des deux côtés de leur rectangle d'équarrissage ; leur second côté sera calculé d'après l'effort de traction qu'ils doivent supporter.

Les contrefiches (comprimées) seront calculées comme pièces aboutées à section carrée, sans qu'il y ait lieu de faire coïncider leur équarrissage avec celui des pièces qu'elles réunissent, car il sera toujours plus petit.

(*b*) **Pièces comprimées.** — 1° *Arbalétrier.* — Compression $N = 3125^k$, longueur $l = 2^m,40$. Nous en avons indiqué le calcul au n° 342-*b* comme application de l'abaque n° 8 relatif aux bois de charpente, et nous avons trouvé pour son équarrissage carré

$$a = b = 12^{cm}.$$

2° *Contrefiche.* — Compression $N = 1092$, longueur $l = 2,30$, d'où $l^2 = 5,29$. Nous formons le rapport $N = K'l^2$ avec $K' = 12$ (v. n° 340, tableau n° 5, col. 5, type A) et l'on a par conséquent :

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{1092}{12 \times 5,29} = 17.$$

Sur l'abaque n° 8, des bois de charpente (v. n° 342), nous prenons la radiante marquée 17 et son point d'intersection avec la courbe de Rankine, qui est ici la plus défavorable, nous donne, par son abscisse, la résistance de sécurité à adopter

$$R' = 16^k,2 \quad \text{par cm}^2.$$

Le module d se calcule en faisant $m = 1,0$ par la formule

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{1092}{16,2}} = 8^{cm},24;$$

on prendra donc, en forçant légèrement, $a = b = 9^{cm}$.

(*c*) **Pièces tirées.** — 1° *Tirant.* — Traction $T = 2610^k$. A cause de la mortaise nous le calculons à section entière, mais avec le cinquième de la résistance entière de sécurité (v. n° 353-*f*), c'est-à-dire à 60 : 5 soit à 12^k de résistance par centimètre carré.

Soit a et b les côtés de son rectangle d'équarrissage. On a déjà $a = 12^{cm}$ puisque le tirant doit avoir la même largeur que l'arbalétrier. Nous aurons donc l'équation

$$a \times b \times 12^k = 2610^k, \qquad \text{d'où}$$

$$b = \frac{2610}{12 \times 12} = 18^{cm}.$$

2° *Poinçon.* — Traction $T = 1050^k$. Le poinçon est, avant tout, une pièce d'assemblage. A sa partie supérieure (fig. 334) il est percé de quatre mortaises, savoir : une pour chacun des arbalétriers B, B et une pour chacune des pannes faîtières C. Heureusement ces dernières mortaises ne sont pas placées au même niveau que les premières. En

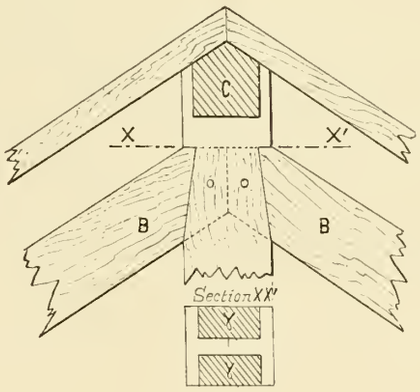


Fig. 334

réalité le point faible du poinçon est la section horizontale des abouts XX'. La section résistante γ, γ y est aussi le quart environ de la section entière, de sorte qu'il conviendrait de vérifier la section du poinçon en divisant sa tension (ici 1050^k) par le quart (soit 15^k) de la résistance entière de sécurité.

Mais, pratiquement, la tension du poinçon est toujours inférieure à celle du tirant ; de plus le poinçon, pour des raisons de stéréotomie pure, ne saurait avoir des dimensions moindres que celles de l'arbalétrier et du tirant ; pour toutes ces causes on donnera au poinçon la même largeur qu'au tirant et, presque toujours, sa résistance sera ainsi bien suffisante.

L'équarrissage du poinçon sera donc

$$a = 0{,}12, \qquad b = 0{,}12.$$

355. **Calcul des pannes.** — Le calcul des pannes sera basé sur le théorème suivant, qui donne la loi de résistance des pièces rectangulaires déversées :

(*a*) **Théorème des pièces déversées.** — « Lorsqu'une « pièce, *à section droite rectangulaire*, est soumise à un « couple (ou moment) fléchissant dont le plan a pour trace « sur la section droite une droite ON, ne se confondant pas « avec un des axes principaux d'inertie, l'effort unitaire « maximum p, c'est-à-dire celui qui est supporté par la « fibre extrême située au sommet C du rectangle de section « droite, est inversement proportionnel au segment $of = \lambda$ « intercepté par cette trace dans le losange qui constitue le « noyau central du rectangle.

« Cet effort unitaire a pour expression, M étant le mo- « ment fléchissant, a et b étant les côtés du rectangle,

$$p = \frac{M}{a \times b \times \lambda}.$$

Soient OX et OY (fig. 335-I) les axes principaux d'inertie, et I_x et I_y les moments d'inertie principaux du rectangle; on a :

$$I_x = \frac{ab^3}{12} \qquad \text{et} \qquad I_y = \frac{ba^3}{12}.$$

Soit ON la trace du plan du couple fléchissant M et α l'angle qu'elle fait avec l'axe OX. L'axe représentatif de ce couple sera OM perpendiculaire sur ON.

Cet axe du couple peut se décomposer en deux autres M_x et M_y dirigés suivant les axes d'inertie et l'on a :

$$M_x = M \sin \alpha \qquad \text{et} \qquad M_y = M \cos \alpha.$$

Le premier couple M_x produit un infléchissement autour de OX, et cet infléchissement donne naissance, sur la fibre du sommet C du rectangle, à un effort unitaire p' donné par la formule connue, dite de l'effort extrême :

$$p' = \frac{Mv}{I} \quad \text{(v. n° 143-}b\text{)}.$$

En remplaçant I par I_x, M par $M_x = M \sin \alpha$, et faisant $v = 1/2b$, il vient

$$p' = \frac{M_x}{I_x} \times \frac{b}{2} = \frac{6M \sin \alpha}{ab^2}.$$

Le second couple M_y produit sur la même fibre C un effort unitaire p'' et l'on a, en raisonnant de même,

$$p'' = \frac{M_y}{I_y} \times \frac{a}{2} = \frac{6M \cos \alpha}{ba^2}.$$

L'effort unitaire total p supporté en C est donc

$$(1) \qquad p = p' + p'' = \frac{6M}{ab}\left(\frac{\sin \alpha}{b} + \frac{\cos \alpha}{a}\right).$$

Cela posé ; portons sur la trace ON du couple une longueur $Of = \lambda$ qui soit inversement proportionnelle à p et telle que l'on ait

$$\lambda = \frac{1}{p} \times \frac{M}{a \times b}, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{1}{\lambda} \times \frac{M}{a \times b}.$$

En substituant dans l'équation (1) elle devient

$$\frac{6\lambda \cos \alpha}{a} + \frac{6\lambda \sin \alpha}{b} = 1.$$

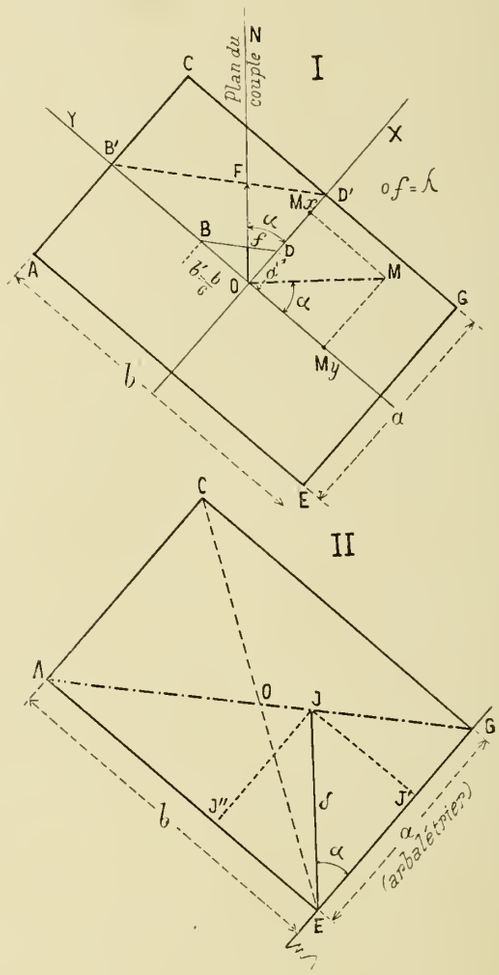


Fig. 335

Si nous appelons x' et y' les coordonnées du point f et si nous posons $a' = 1/6\, a$ et $b' = 1/6\, b$, cette équation s'écrit, en remarquant que $x' = \lambda \cos \alpha$ et $y' = \lambda \sin \alpha$,

$$(2) \qquad \frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} = 1.$$

Ce qui prouve (v. C[t], n° 37-*c*) que le lieu des points tels que f est la droite BD qui détache sur chacun des axes une longueur égale au sixième du côté correspondant du rectangle ; c'est donc bien l'un des côtés du losange de noyau central. C.Q.F.D.

Le côté BD du noyau central est donc, en quelque sorte, la représentative de la résistance de la pièce, puisque cette

résistance est inversement proportionnelle à l'effort fibraire de la fibre extrême C.

Au lieu de la représentative BD on peut prendre la droite B'D' qui joint les milieux des côtés, mais alors on aura

$$p = \frac{1}{OF} \times \frac{3M}{ab} \qquad \text{au lieu de} \qquad p = \frac{1}{Of} \times \frac{M}{ab}.$$

Plus commodément peut-être, supposons (fig. 335-II) que la panne ACEG soit placée sur l'arbalétrier; par l'angle inférieur E menons la verticale; elle rencontre en J la diagonale, qui est opposée à cet angle inférieur. Soit δ la longueur EJ; il est facile de voir que EJ, de la fig. II, est le double de OF, de la fig. I.

(*b*) **Calcul de l'équarrissage d'une panne.** — On a donc pour expression de la pression unitaire maxima (fig. 335-II)

$$(1) \qquad p = \frac{6M}{a \times b \times \delta}.$$

En faisant dans l'équation (1) $p = R$ résistance de sécurité, il vient

$$(2) \qquad ab\delta = \frac{6M}{R};$$

C'est l'*équation d'équarrissage des pannes.*

δ est évidemment une fonction de a, de b et de l'angle α, c'est-à-dire de la pente du toit. Pour obtenir cette fonction, la similitude nous permet d'écrire (fig. 335-II)

$$\frac{EJ'}{EG} = \frac{AJ}{AG} = \frac{AJ''}{AE},$$

ou bien, en supprimant le rapport intermédiaire

$$\frac{\delta \cos \alpha}{a} = \frac{b - \delta \sin \alpha}{b}$$

ou, en simplifiant,

$$(3) \qquad \frac{1}{a} \cos \alpha + \frac{1}{b} \sin \alpha = \frac{1}{\delta}.$$

On peut se donner une des trois longueurs a, b, ou δ et les équations (2) et (3) permettront d'en déduire les deux autres.

Le calcul serait un peu pénible; nous proposons d'employer une courbe d'erreur, comme suit (fig. 336).

1° Assez souvent on se donne b, c'est-à-dire la distance qui sépare le lattis supérieur des arbalétriers du lattis inférieur des chevrons. On connaît donc le point A (fig. 336). Alors on fait un premier essai pour a', c'est-à-dire que l'on se donne en EG' une valeur arbitraire pour a'.

Si l'on était tombé juste sur l'équarrissage voulu, en calculant par l'équation d'équarrissage des pannes le segment vertical δ', et en le mesurant sur l'épure, on devrait trouver le même nombre; on devrait donc avoir

$$\frac{6M}{Rba'} \text{ (calculé)} = EJ' \text{ (mesuré)}.$$

Mais cette valeur calculée sera probablement différente de la longueur mesurée EJ', interceptée sur la verticale ES par la diagonale. Soit ε' l'erreur que nous supposons commise par excès. On portera de G' en S' cette erreur ε' sur une perpendiculaire à EG'.

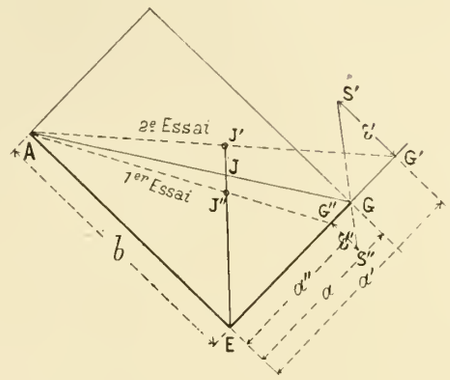


Fig. 336

On fera un second essai avec une autre valeur $EG'' = a''$. On calculera la valeur correspondante δ''; il est probable qu'il y aura encore une erreur ε'' que nous supposons commise *par défaut*. On la portera, de même, de G'' en S'', mais de l'autre côté de la ligne EG'. Cela fait, on joindra S' et S'' et le point d'intersection G donnera le véritable équarrissage.

2° On peut encore se donner le rapport $b : a = m$, c'est-à-dire la proportion du rectangle d'équarrissage.

Alors un premier essai, fait avec une valeur arbitraire a' donnée à la largeur a, laquelle entraîne graphiquement la valeur de b' et de δ', fait connaître le produit $a'b'\delta'$.

Soit $a'b'\delta' = K'$ ce produit, et soit $K = 6M : R$ valeur connue. Si K' est égal à K, alors on possède l'équarrissage voulu, en vertu de l'équation (2). Sinon il faut multiplier l'équarrissage d'essai a' par le rapport des racines cubiques de K et de K' et l'on aura

$$a = a' \sqrt[3]{\frac{K}{K'}}.$$

(*c*) **Equarrissage le plus économique.** — Enfin on peut se poser la question suivante : Quel est l'équarrissage le plus économique ?

Ce sera celui dans lequel, pour une valeur donnée du segment δ, la surface de section, c'est-à-dire le produit $a \times b$, sera minimum.

Si le produit $a \times b$ est minimum, son inverse sera maximum. Il faut donc chercher le maximum du produit

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b},$$

ou, ce qui revient au même, du produit

$$\frac{1}{a} \cos \alpha \times \frac{1}{b} \sin \alpha.$$

Mais en vertu de l'équation (3) la somme de ces deux facteurs est constante; le maximum du produit aura donc lieu lorsque ces deux facteurs seront égaux ; ce qui donne :

$$\frac{1}{a}\cos\alpha = \frac{1}{b}\sin\alpha \qquad \text{ou} \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ce qui veut dire que :

« L'équarrissage le plus économique est celui pour lequel « la diagonale du rectangle est verticale (fig. 337-I). »

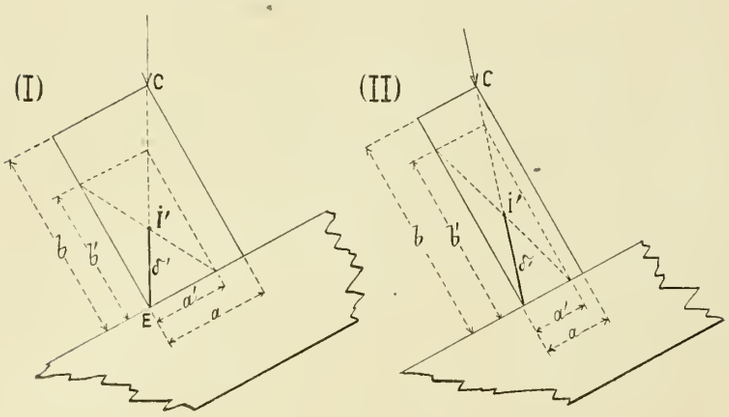


Fig. 337

Si l'on tient compte de l'action du vent, la charge supportée par la panne sera inclinée (fig. 337-II) suivant une direction I'C, et cette direction donnera la diagonale du rectangle, c'est-à-dire, en somme, la proportion de ce rectangle.

Dans un cas comme dans l'autre, pour en avoir les dimensions exactes : 1° on prendra une valeur d'essai a' ; 2° on en déduira, graphiquement, les valeurs correspondantes de b' et de δ' et l'on fera le produit $K' = a'b'\delta'$.

D'autre part on doit avoir pour les vraies valeurs de a, b et δ, d'après l'équation (2)

$$ab\delta = \frac{6M}{R} = K,$$

d'où l'on déduira, comme ci-dessus :

$$a = a'\sqrt[3]{\frac{K}{K'}}.$$

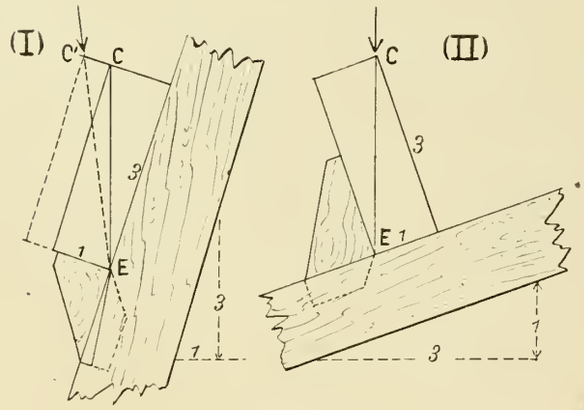


Fig. 338

Nota. — Nous conseillons, tout en appliquant ce tracé, de ne pas accepter de pannes dont la hauteur b serait trop grande par rapport à a. Il nous semble raisonnable, pour éviter le *voilement* des pannes, de ne pas aller au-delà de $b = 3a$; ce qui limiterait l'application du tracé aux toits à la pente très raide, de 3 de hauteur pour 1 de base, comme on en rencontre dans les toits à la Mansard (fig. 338-I), et aux toits à pente très douce, de 1 de hauteur pour 3 de base (fig. 338-II). Pour les premiers l'action du vent l'emportera sur celle de la neige, de sorte que les efforts ayant une direction inclinée EC' les pannes auront néanmoins une proportion moins grêle que celle de 1 : 3.

(*d*) **Application.** — Calculons la panne du comble de 8^m, étudié ci-dessus.

L'espacement des fermes, c'est-à-dire la portée des pannes, est $l = 4^m$. La charge d'une panne est $P = 1152^k$. Le moment fléchissant est donc

$$M = \frac{Pl}{8} = 576^{Km}.$$

Dès lors l'équation (1) donne en adoptant pour résistance de sécurité $R = 600000^k$,

$$ab\delta = \frac{6M}{R} = 0{,}00576,$$

l'unité étant le mètre. Cela posé :

On dessine aussi grand que possible (fig. 339-I) un rectangle d'essai ECD posant sur le rampant du toit et ayant sa diagonale verticale. On mesure ses éléments ; ici on trouve

$$a' = 0^m{,}22, \quad b' = 0^m{,}33 \quad \text{et} \quad \delta' = 0^m{,}195,$$

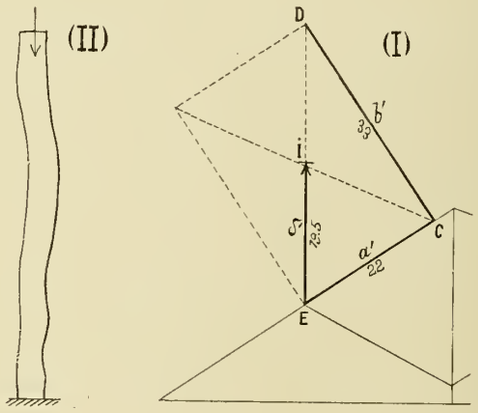


Fig. 339

d'où $a'b'\delta' = K' = 0{,}01416$ au lieu de $0{,}00576$; on aura donc :

$$a = a'\sqrt[3]{\frac{K}{K'}} = 0{,}22\sqrt[3]{\frac{576}{1416}} = 0{,}22 \times 0{,}740, \qquad \text{d'où}$$

$$a = 0^m{,}16 \qquad \text{et} \qquad b = 0^m{,}24.$$

Comme résumé de cette étude, voici le tableau des dimensions des pièces de la charpente, strictement calculées.

Dans une seconde colonne nous avons, en forçant les dimensions de quelques-unes, donné des nombres qui se rapprocheraient plus de ceux que la pratique a consacrés.

Voici pourquoi nous avons forcé surtout les dimensions des pièces comprimées. Dans la pratique les bois de charpente ne sont pas rigoureusement droits ; ils ont toujours leur fibre neutre plus ou moins courbe (fig. 339-II). Il en résulte qu'ils ont naturellement une tendance au flambage beaucoup plus grande que si c'étaient des bois de sciage, à fibre neutre parfaitement rectiligne.

Ferme de 8^m de portée. Equarrissage des pièces.

Désignation des pièces	Calculé		Pratique	
	a	b	a	b
Arbalétriers	0,12	0,12	0,14	0,16
Contrefiches	0,09	0,09	0,12	0,12
Tirant	0,12	0,18	0,14	0,18
Poinçon	0,12	0,12	0,14	0,14
Pannes	0,16	0,24	0,16	0,24

§ 4. — Ferme de 8 mètres, avec tirant portant plancher

356. **Calcul des pièces tirées et fléchies.** — Le tirant de la ferme que nous allons étudier subira une traction, comme en supportait le tirant de la ferme précédente ; mais, de plus, il sera fléchi par le fait du plancher qu'il doit soutenir. Dans ce cas, les fibres inférieures de ce tirant subiront une double traction. C'est un problème analogue à celui des pièces aboutées, avec cette différence que, pour ces dernières, la flèche prise tendait à augmenter avec la compression, ce qui produisait le flambage, tandis que, dans le cas actuel, la traction générale de la pièce tendrait plutôt à réduire la flèche prise.

(a) **Equation d'équarrissage complexe.** — Soit N la traction générale, M le moment fléchissant maximum, v la distance à l'axe neutre de la fibre la plus éloignée, dans la section dangereuse, (celle pour laquelle le moment est M), I le moment d'inertie de cette section, Ω sa surface :

La traction générale N développe dans cette fibre un effort unitaire égal à $N : \Omega$. Le moment fléchissant M développe dans la même fibre un effort unitaire égal à $Mv : I$.

Ces deux efforts s'ajouteront et, pour la solution la plus économique, leur total devra être égal à la résistance de sécurité R ; on aura donc l'*équation d'équarrissage complexe* :

$$R = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mv}{I}. \tag{1}$$

Supposons qu'il s'agisse de pièces de bois à section rectangulaire ayant pour côtés a et b. On a :

$$\Omega = ab \qquad \text{et} \qquad \frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6}.$$

En substituant dans l'équation (1) elle devient

$$R = \frac{N}{ab} + \frac{6M}{ab^2}. \tag{2}$$

On peut se servir de cette formule soit pour vérifier une pièce de bois soit pour en déterminer les dimensions. Dans le premier cas, on connaît a, b, N et M ; par conséquent on calcule la valeur du second membre et l'on doit trouver, si la pièce est satisfaisante, un nombre inférieur ou, au plus, égal à R.

Le second problème est plus intéressant. On connaît N, M et R ; il faut calculer a et b. La solution est indéterminée ; mais elle ne l'est plus si l'on se donne soit l'une des deux dimensions (a ou b) soit la proportion du rectangle d'équarrissage, c'est-à-dire le rapport $n = a : b$.

(b) **1er Problème.** — On connaît la hauteur b, calculer la largeur a.

L'équation (2) nous donne

$$a = \frac{N}{Rb} + \frac{6M}{Rb^2}.$$

a est la somme de deux termes ; le premier $a' = N : Rb$ serait la largeur de la pièce si elle n'était soumise qu'à la traction générale N ; le second, $a'' = 6M : Rb^2$, serait la largeur de la pièce si elle n'était soumise qu'au moment M.

Application. — $N = 20000^k$. $M = 1500^{km}$ et $b = 0^m,38$; on en déduit, en adoptant $R = 600000^k$,

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{20000}{0,38 \times 600000} = 0,087 \\ a'' &= \frac{6 \times 1500}{(0,38)^2 \times 600000} = 0,103 \end{aligned}\right\} \quad a = a' + a'' = 0,190.$$

(c) **2e Problème.** — On connaît la largeur a, calculer la hauteur b.

Ce problème est celui qui se présentera le plus souvent pour les tirants de ferme, puisque la largeur a du tirant est, en quelque sorte, imposée par celle de l'arbalétrier et que nous conseillons de calculer l'arbalétrier en premier.

L'équation (2), ordonnée par rapport à b, devient :

$$b^2 - \frac{N}{aR}\, b - \frac{6M}{aR} = 0. \tag{3}$$

En posant $b' = N : aR$, on remarquera que b' serait la hauteur à donner à la pièce si elle n'était soumise qu'à la traction N.

En posant $b''^2 = 6M : aR$, on remarquera que b'' serait la hauteur à lui donner si elle n'était soumise qu'au moment M.

L'équation (3) s'écrira donc avec ces notations

(3) $$b^2 - b'b - b''^2 = 0,$$ d'où

(4) $$b = \frac{1}{2}\left(b' + \sqrt{b'^2 + 4b''^2}\right).$$

Application : $N = 5850^k$, $M = 2400^{km}$ et $a = 0,18$; on aura

$$b' = \frac{5850}{0,18 \times 600000} = 0,054, \quad \text{d'où} \quad b'^2 = 0,0291,$$

$$b''^2 = \frac{6 \times 2400}{0,18 \times 600000} = 0,1333, \quad \text{d'où} \quad 4b''^2 = 0,5333,$$

$$b'^2 + 4b''^2 = 0,5624 \quad \text{et} \quad \sqrt{b'^2 + 4b''^2} = 0,7500,$$

$$b = \frac{1}{2}\left(0,0291 + 0,7500\right) = 0,389, \quad \text{soit } 0^m39.$$

(*d*) 3e **Problème.** — On connaît la proportion du rectangle d'équarrissage, c'est-à-dire le rapport $n = a : b$ de la largeur à la hauteur.

En faisant dans l'équation (3), $a = nb$ elle devient, après simplifications,

(4) $$b^3 = \frac{N}{nR}b + \frac{6M}{nR}.$$

Elle est du troisième degré en b et de la forme $b^3 = pb + q$; on la résoudra au moyen de l'abaque n° 6 (v. n° 262).

Application. $N = 5850$, $M = 2400$ et $n = a : b = 0,461$. C'est la proportion de la pièce calculée à l'exemple précédent ; cela nous donnera une vérification.

Les coefficients de l'équation du troisième degré sont

$$p = \frac{5850}{0,461 \times 600000} = 0,021,$$

$$q = \frac{2400 \times 6}{0,461 \times 600000} = 0,052.$$

Dès lors sur l'abaque n° 6, nous faisons passer le trait sur transparent par le point marqué à gauche $p = 0,021$ et par celui marqué à droite $q = 0,052$. (On prend 0,52 et non 0,052 comme il est dit dans l'explication de l'abaque.) Ce trait rencontre la *solutive* de gauche au point marqué $b = 0^m,39$. Nous retrouvons la même dimension que ci-dessus.

Étudions maintenant la ferme de 8^m de portée dont le schéma est indiqué figure 340.

357. **Calcul des tensions des barres.** — (*a*) **Données.** (fig. 340).

Portée de la ferme	8^m.
Espacement des fermes.	4^m.
Longueur d'égout, mesurée sur l'épure . . .	$2^m,50$
Poids de la couverture et de la charpente y compris forte surcharge de neige : par m^2 de surface d'égout	210^k.
Charge d'une panne ($210 \times 4 \times 2,50$)	2100^k.
Poids du plancher par m^2.	150^k.
Charge totale du plancher ($150 \times 4 \times 8$) . . .	4800^k.
Dont moitié transmise au poinçon par l'intermédiaire d'un fort étrier en fer	2400^k.

Nous appliquons ces charges aux nœuds de la charpente ; la dernière 2400^k est appliquée au bas du poinçon (fig. 340-I).

Nota. — Sur la charpente (fig. I) nous avons dessiné à l'échelle des forces les charges appliquées aux nœuds ; mais cela est inutile ; il suffirait d'indiquer leur direction. Ce n'est que sur le dynamique (fig. 4) que les forces demandent à être réellement dessinées à l'échelle.

(*b*) **Réactions des appuis.** — A cause de la symétrie, et les forces étant toutes verticales, les réactions Y_0 et Y_1 des appuis sont verticales et égales, chacune, à la moitié du total des charges ; nous ne comptons pas les charges des sablières, ainsi que nous l'avons dit plus haut (v. n° 351-*b*) : on a donc

$$Y_0 = Y_1 = \frac{2100 + 2100 + 2100 + 2400}{2} = 4350^k.$$

(*c*) **Tension des barres.** — I. *Séparation des espaces.* — Nous numérotons les nœuds et, comme il a été dit plus haut (n° 351-*c*), nous plaçons des grandes lettres dans les espaces que séparent, soit les barres, soit les forces, y compris les réactions.

II. *Nœud n° 1.* — Ce nœud jonctionne les trois espaces A, B et C (fig. 340-I) ; à ce nœud aboutissent les trois forces $AB = Y_0$ (réaction connue), BC tension de l'arbalétrier (inconnue) et CA tension du tirant (inconnue). Son dynamique (fig. II) est le triangle *abc* dans lequel la réaction $ab = Y_0 = 4350^k$ est connue en grandeur et en direction ; on mène donc, par le point *a*, *ac* parallèle à AC et par le point *b*, *bc* parallèle à BC. En mesurant les deux derniers côtés à l'échelle des forces on trouve $bc = 7300^k$ et $ca = 3850$.

On fait le cheminement dans le sens *amorcé* par la réaction, c'est-à-dire dans le sens *abca*. On en conclut que, *bc poussant* sur le nœud n° 1, l'arbalétrier BC est *comprimé* ; tandis que *ca tirant* sur le nœud n° 1, le tirant CA est une pièce *tirée*. Nous indiquons les compressions par un trait fort et les tractions par un trait fin.

III. Nœud n° 2. — A ce nœud aboutissent 4 forces, savoir : CB (connue par l'épure précédente), BD (connue comme charge 2100^k), DE (inconnue) et EC tension de la contre fiche (inconnue) ; il n'y a donc que deux forces inconnues, ce qui est la condition nécessaire pour que leur détermination puisse se faire.

Le dynamique du nœud n° 2 est le quadrilatère *cbdec* dans lequel : *cb* est connu par l'épure précédente, $bd = 2100^k$ est connu, *de* est menée, par le point *d*, parallèlement à DE tandis que *ce* est menée, par le point *c*, parallèlement à CE, ce qui détermine le sommet *e*.

Le cheminement se fait dans le sens *amorcé* par la force *bd* qui, en tant que charge, doit être parcourue de haut en bas. On remarquera, encore une fois, que *cb* qui, pour le nœud n° 1, était parcourue dans le sens *bc*, est, pour le

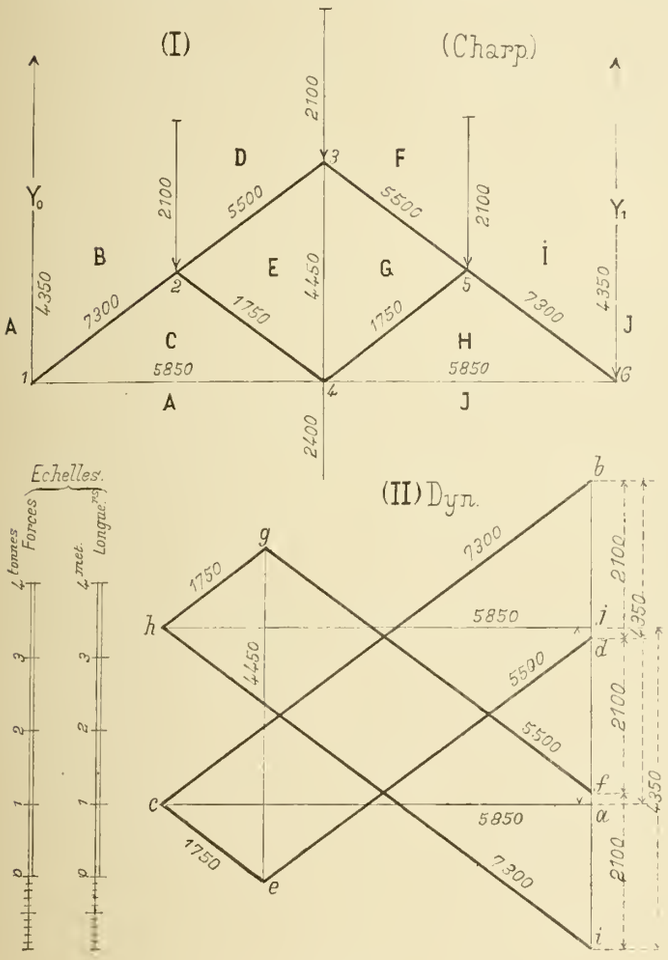


Fig. 340

nœud n° 2, parcourue en sens contraire ; nous en avons donné plus haut la raison (v. n° 352-*c*). On mesure les côtés à l'échelle des forces et l'on trouve :

Arbalétrier DE (compression) . . . . . 5500^k
Contrefiche EC (compression) . . . . . 1750^k

IV. Nœud n° 3. — C'est un nœud à 4 forces, savoir : ED (connue par le nœud précédent), DF = 2100^k (connue comme charge), FG (inconnue), GE, tension du poinçon (inconnue). Son dynamique est le quadrilatère *ed* (connu), *df* (connu), *fg* (parallèle à FG menée par *f*) et *ge* (parallèle au poinçon GE, menée par *e*).

On le parcourt dans le sens *dfged* amorcé par la charge verticale *df*, et l'on a pour les tensions, en les mesurant à l'échelle des forces :

Arbalétrier FG (compression). . . . . 5500^k
Poinçon GE (traction) . . . . . 4450^k

V. Nœuds n° 5 et n° 6. — Ce sont les symétriques des nœuds n° 2 et n° 1 ; leurs dynamiques sont : pour le nœud n° 5, le quadrilatère *fihgf* et, pour le nœud n° 6, le triangle *ijhi*. Ils donnent, comme tensions des barres, les mêmes nombres que pour l'autre moitié de la ferme.

VI. Nœud n° 4. — Le nœud n° 4 sépare les six espaces ACEGHJ ; une seule force y est connue *à priori*, c'est la charge JA = 2400^k due au plancher ; par conséquent si on l'avait pris en premier et même en second ou en troisième on aurait eu plus de deux tensions inconnues à trouver ; il y aurait eu indétermination. Mais, venant en dernier, son dynamique, *aceghja*, est une conséquence des autres dynamiques.

358. **Calcul des pièces de la ferme.** — (*a*) **Arbalétrier.** — Compression N = 7300^k.

Longueur de sinuosité $l = 2{,}50$, et $l^2 = 6{,}25$.

1re Solution. — Nous lui donnerons un équarrissage carré $b = a$. Nous formons le rapport $N : K'l^2$; le coefficient K' pris dans le tableau n° 5 (v. n° 340) est K' = 12 ; on a donc :

$$N : K'l^2 = 7300 : (12 \times 6{,}25) = 97.$$

Sur l'abaque des bois de charpente, n° 8 (v. n° 342), nous prenons la radiante marquée 97. Elle recoupe la courbe de **Morin** (ici, la plus défavorable) en un point dont l'abscisse donne la résistance de sécurité à adopter :

R' = 267000^k par m^2 (ou 26,7 par cm^2).

On aura pour le module $d = a = b$, en faisant d'après le tableau n° 5 $m = 1$:

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{7300}{267000}} = 0^m{,}165.$$

On forcera et l'on prendra

$$a = b = 0^m{,}17 \quad \text{et même } 0^m{,}18.$$

2e Solution. — Donnons à l'arbalétrier un équarrissage dont la proportion soit $b = 0{,}7a$, c'est-à-dire, à peu près, l'équarrissage normal. Le tableau n° 5 (v. n° 340) donne K' = 17,13 ; on a donc

$$N : K'l^2 = 7300 : (17{,}13 \times 6{,}25) = 68.$$

Sur l'abaque des bois de charpente n° 8, la radiante marquée 68 recoupe la courbe de Morin en un point dont l'abscisse donne la résistance de sécurité R' = 250 000^k par m^2 (ou 25^k par cm^2).

On aura pour le module, en faisant d'après le tableau n° 5, $m = 0{,}7$:

$$d = a = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{7300}{0{,}7 \times 250000}} = 0^m{,}2049;$$

on forcera et l'on prendra

$$a = 0^m{,}21 \quad \text{et} \quad b = 0{,}7a = 0^m{,}147, \quad \text{soit } 0^m{,}15.$$

Nota. — La seconde solution est moins économique. Elle donne $a \times b = 0{,}0315$, tandis que la première donne

$a \times b = 0{,}0289$. Néanmoins l'économie est bien peu sensible.

(*b*) **Contrefiche.** — Compression $N = 1750^k$, $l = 2{,}50$ et $l^2 = 6{,}25$. — Adoptons l'équarrissage carré $K' = 12$. On a donc :

$$N : K'l^2 = 1750 : (12 \times 6{,}25) = 23.$$

La radiante marquée 23 sur l'abaque n° 8, recoupe la courbe de Rankine (ici la plus défavorable) en un point dont l'abscisse donne pour résistance de sécurité $R' = 152\,700^k$ par m^2 (ou $15^k{,}27$ par cm^2). On aura donc, avec $m = 1$:

$$a = b = d = \sqrt{\frac{1750}{152700}} = 0{,}107, \quad \text{soit } 0^m{,}11 \text{ ou } 0^m{,}12.$$

(*c*) **Tirant.** — Nous calculerons le tirant une première fois comme une pièce mortaisée (v. n° 353) qui ne serait que tirée par une force $N = 5850^k$; et une seconde fois comme une poutre de 4^m de longueur qui serait tirée par l'effort $N = 5850^k$ et qui supporterait, en outre, une flexion se traduisant par un moment fléchissant maximum $M = 1200$ kilogrammètres, ($M = 1/8 \times 2400 \times 4 = 1200$ K*m*) ; après quoi nous adopterons le plus fort des deux équarrissages trouvés.

I. *1er Calcul* (v. n° 353-*f*). — Nous savons qu'il faut surtout calculer la pièce en vue de la résistance de la section d'about de la mortaise. Et nous avons vu que cela revient à considérer sa section entière Ω comme résistant à l'effort de traction $N = 5850$ avec une résistance de sécurité R' égale au quart ou, mieux encore, au cinquième de la résistance entière de sécurité.

Nous ferons donc $R' = 1/5 \times 600\,000 = 120\,000^k$ et nous écrirons l'équation

$$a \times b \times 120\,000 = 5850, \quad \text{d'où} \quad a \times b = 0{,}0487.$$

Il reste une certaine indétermination que nous lèverons par ce fait que la largeur *a* du tirant doit être la même que celle de l'arbalétrier.

Pour ce dernier nous avions deux solutions $a = 0{,}18$ ou $a = 0{,}15$, nous en déduisons, pour le tirant :

1re Solution : $a = 0{,}18$, d'où $b = 0{,}0487 : 0{,}18 = 0{,}27$.

2e Solution : $a = 0{,}15$, d'où $b = 0{,}0487 : 0.15 = 0{,}32$.

La première solution nous paraît donner pour l'équarrissage du tirant une meilleure proportion, se rapprochant davantage de l'équarrissage normal.

II. *2e Calcul.* — C'est le 2e problème du n° 356-*c*. On a $N = 5850$ K, $M = 1200$ K*m* et $a = 0{,}18$, car il convient de donner au tirant la même largeur qu'à l'arbalétrier ; on aura en se reportant aux notations du n° 356-*c*

$$b' = \frac{5850}{0{,}18 \times 600000} = 0{,}054, \quad \text{d'où} \quad b'^2 = 0{,}0291,$$

$$b''^2 = \frac{6 \times 1200}{0{,}18 \times 600000} = 0{,}066, \quad \text{d'où} \quad 4b''^2 = 0{,}2666.$$

$$b'^2 + 4b''^2 = 0{,}2957 \quad \text{et} \quad \sqrt{b'^2 + 4b''^2} = 0{,}5342,$$

$$b = \frac{1}{2}\left(0{,}0291 + 0{,}5342\right) = 0^m{,}28,$$

au lieu de 0,27 donné par le premier calcul. La section du tirant sera donc $a = 0{,}18$ et $b = 0{,}28$.

(*d*) **Poinçon.** — Traction 4450^k. Nous le calculons à section entière, carrée, mais en prenant le quart de la résistance de sécurité (v. n° 354-*c*), on aura donc

$$N = 4450 \text{ K}, \quad R' = 1/4 \times 600\,000 = 150\,000, \quad \text{d'où}$$

$$a^2 \times 150\,000 = 4450, \quad a^2 = 0{,}0297 \quad \text{et} \quad a = 0^m{,}1723.$$

Par conséquent, en donnant au poinçon le même équarrissage ($a = b = 0^m{,}18$) qu'à l'arbalétrier et au tirant, on sera dans de bonnes conditions.

Le tableau ci-dessous donne le résultat de cette étude.

Désignation des pièces		Tensions ou moments fléchissants	Longueurs	Equarrissages en centimètres — Calculés		Adoptés	
				a	*b*	*a*	*b*
1	2	3	4	5	6	7	8
Arbalétriers. . .	Co	7300 K.	2,50	16,5 20,5	16,5 14,7	18	18
Contrefiches . .	Co.	1750 K.	2,50	10,7	10,7	12	12
Poinçon	Tr.	4450 K.	2,95	17,2	17,2	18	18
Tirant	Tr. Fl.	5850 K. 1200 K*m*.	8,00 4,00	18	28	18	28
Pannes.	Fl.	1050 K*m*.	4,00	18	30	18	30

Co. indique compression ; Tr. traction ; Fl. flexion.

(*e*) **Pannes.** — Charge totale 2100^k ; longueur $l = 4^m{,}00$; moment fléchissant maximum $M = 1/8\ Pl = 1050$ K*m*.

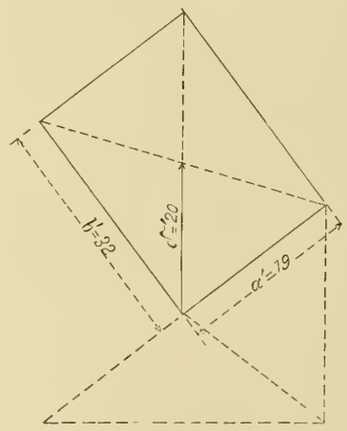


Fig. 341

Nous reproduisons (fig. 341) le croquis de la ferme et, à une échelle suffisamment grande, nous dessinons, sur son rampant, un rectangle d'essai avec sa diagonale verticale (v. n° 355-*d*). Nous mesurons ses dimensions et nous trouvons :

$$a' = 0{,}19, \quad b' = 0{,}32, \quad \delta' = 0{,}20, \quad \text{d'où}$$

$$K' = a' \times b' \times \delta' = 0{,}01216;$$

d'autre part, on doit avoir, en appelant a, b et δ les dimensions cherchées,

$$K = \frac{6M}{R} = a \times b \times \delta = \frac{6 \times 1050}{600\,000} = 0{,}01050,$$

on aura donc

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \sqrt[3]{\frac{K}{K'}} = \sqrt{\frac{1050}{1216}} = 0{,}95, \qquad \text{d'où}$$

$$a = 0{,}19 \times 0{,}95 = 0^m{,}18 \quad \text{et} \quad b = 0{,}32 \times 0{,}95 = 0^m{,}30.$$

§ 5. — Ferme de 12 mètres, avec jambettes

359. **Rôle de la jambette dans une ferme.** — On nomme *jambette* une pièce verticale, telle que AB (fig. 342-I) placée au-dessous de la première panne et qui, ainsi que nous allons le voir, a pour effet de transmettre intégralement au tirant, que cela fait travailler à la flexion, la charge P de la panne.

En effet, construisons (fig. 342-II) le dynamique répondant au nœud A, et supposons connue la compression C du tronçon DA de l'arbalétrier. Ce dynamique sera le parallélogramme MNGK. Nous y voyons que les tensions C et C′ des deux tronçons de l'arbalétrier sont égales et que la tension P′ de la jambette est égale à la charge P ; d'où cette conclusion :

1° La jambette subit la compression P qu'elle transmet intégralement au tirant en un de ses points B.

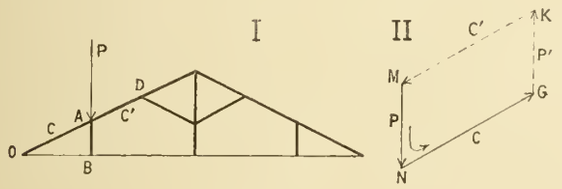


Fig. 342

2° Le second tronçon AD de l'arbalétrier subit la même compression que le premier tronçon OA.

3° Pour le calcul des résistances la ferme est donc dans les mêmes conditions que si le nœud A de l'arbalétrier ne portait rien tandis que le point B du tirant prendrait toute la charge P, ce qui le fera fléchir.

En réalité, cela revient à ne pas tenir compte du nœud A. C'est dans ces conditions que nous allons faire l'épure de statique graphique, mais sans entrer dans autant de détails que pour les fermes précédentes.

360. **Calcul des tensions des pièces.** — (*a*) **Données.** — Les données sont (fig. 343-I) :

Espacement des fermes	$4^m{,}36$
Longueur d'égout entre pannes	$2^m{,}30$
Poids par mètre carré d'égout comprenant charpente, couverture et neige	210^k
Charge supportée par une panne $4{,}36 \times 2{,}30 \times 210$	$2\,100^k$

Le tirant supporte, en outre, un faux plafond pesant 107^k par mètre carré : on a donc :

Poids total du plafond : $12 \times 4{,}36 \times 107 = 5600^k$.

Sur les nœuds n° 3 et n° 8 nous n'appliquons pas la charge de 2100^k, les jambettes la reportent en P et P sur le tirant ; et comme ces points sont au tiers du demi-tirant, ces charges se décomposent en deux autres dont l'une (les 2/3 de 2100) est appliquée aussi bien sur l'appui 1 que sur l'appui 10, et détruite par eux ; tandis que l'autre (1/3 de 2100 soit 700^k) est appliquée sur l'étrier du poinçon. Cet étrier, et par suite le poinçon, supporte donc de ce chef au nœud n° 5 une charge égale à $2 \times 700 = 1400^k$.

De plus le plancher charge l'étrier du poinçon de la moitié de son poids, soit de $2\,800^k$, ce qui fait en tout pour le nœud n° 5 $2800 + 1400 = 4200^k$.

(*b*) **Réaction des appuis.** — A cause de la symétrie et de la verticalité des charges on a pour les réactions des appuis

$$Y_0 = Y_1 = \frac{3 \times 2100 + 4200}{2} = 5250^k.$$

(*c*) **Épure des tensions.** — *Nœud n° 1.* — Il sépare les espaces A, B et C ; n'oublions pas que la jambette ne compte plus et qu'il n'y a pas lieu de mettre une lettre dans le triangle α compris entre elle, le tirant et l'arbalétrier. Son dynamique est le triangle *abc*.

Nœud n° 4. — Il jonctionne les espaces CBD et E. Son dynamique est le quadrilatère *cbdec*.

Nœud n° 6. — Il jonctionne les espaces EDG et F. Son dynamique est le quadrilatère *edgfe*.

Nœuds n° 7 et n° 10. — Leurs dynamiques sont *fghif* et *jhk*, symétriques des dynamiques des nœuds n° 4 et n° 1.

Nœud n° 5. — Il jonctionne les espaces ACEFJK ; son dynamique *acefjka* est une conséquence des dynamiques précédents. Il est à remarquer que si l'on joignait *cj*, cette force donnerait la tension du poinçon dans le petit tronçon compris entre les points 5 et 5′ de la charpente.

361. **Calcul des dimensions des pièces.** — (*a*) **Tableau des tensions.** — Les efforts supportés par les pièces, ainsi que leurs dimensions, sont portés au tableau ci-après.

Désignation des pièces		Tensions ou moments fléchissants	Longueurs	Équarrissages (en centimètres) Calculés		Adoptés	
				a	*b*	*a*	*b*
1	2	3	4	5	6	7	8
Arbalétriers. . .	Co.	11100 K.	2,30	19,0	19,0	22	22
Contrefiches . .	Co.	1950 K.	2,80	10,7	10,7	11	11
Jambettes . . .	Co.	2100 K.	1,10	8,5	8,5	9	9
Poinçon . . .	Tr.	6800 K.	3,20	21,3	21,3	22	22
Tirant	Tr.	9700 K.	12,00	22,0	49,4	22	50
				ou		ou	
	Fl.	4578 K*m*.	6,00	29,7	42,5	30	43
Pannes.	Fl.	1144 K*m*.	4,36	15,5	37,2	16	37

(*b*) **Arbalétriers.** — Compression $N = 11100$ K.

Longueur $l = 2,30$ et $l^2 = 5,29$. On adoptera l'équarrissage carré pour lequel (v. n° 340, tableau n° 5), $K' = 12$. Dès lors, on a

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{11100}{12 \times 5,29} = 174.$$

Sur l'abaque n° 8, des bois de charpente, la radiante marquée 174 rencontre la courbe de Morin en un point dont l'abscisse donne la résistance de sécurité $R' = 295\,000$ K par m^2, soit $29^k,5$ par cm^2. On sait (v. tableau n° 5), que pour l'équarrissage carré, $m = 1$; dès lors, on aura

$$a = b = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{11100}{295000}} = 0^m,19, \quad \text{soit } 0^m,20.$$

Les équarrissages du poinçon et du tirant, lesquels au-

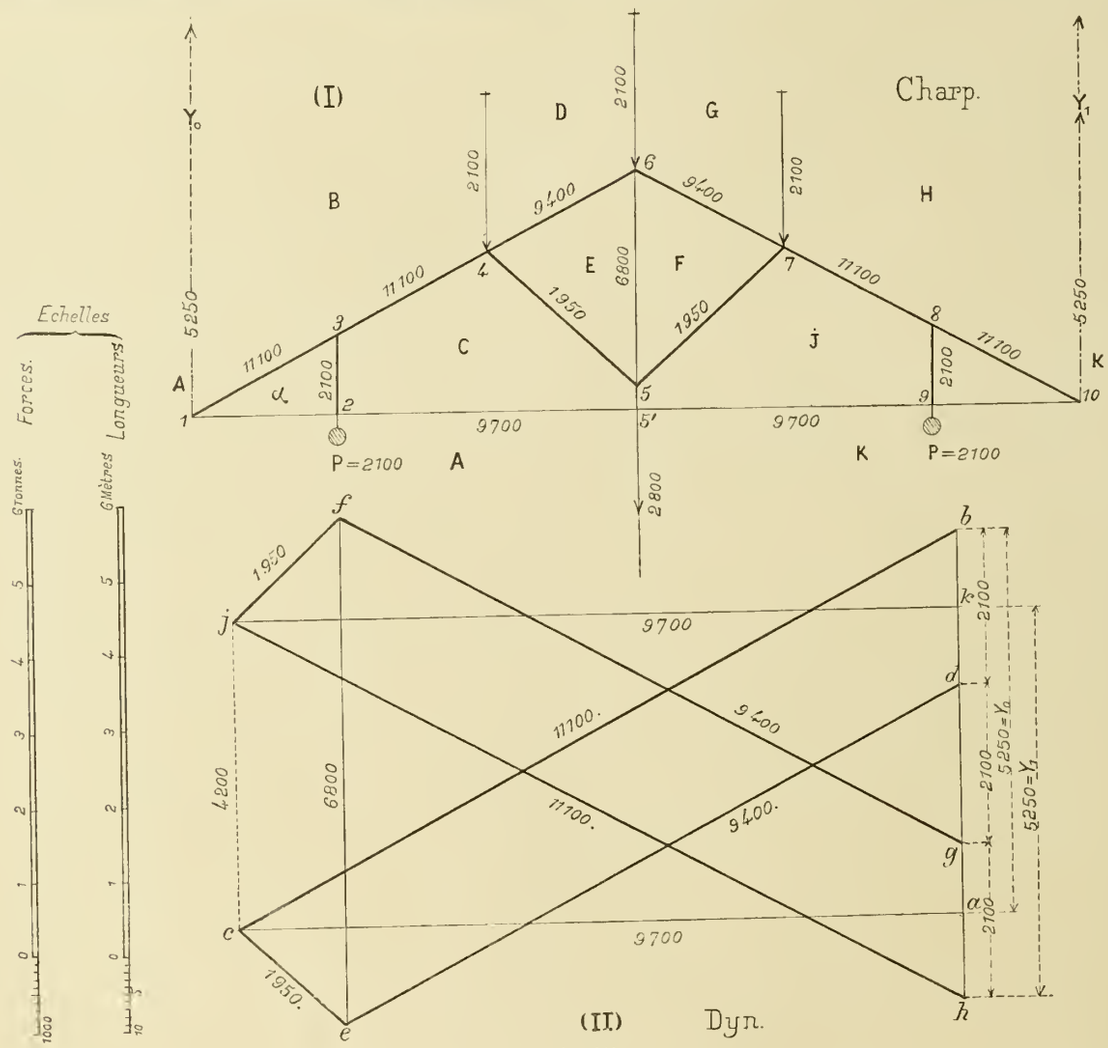


Fig. 343

ront 0,22 d'épaisseur, nous entraîneront ainsi à donner $0,22 \times 0,22$ à l'arbalétrier au lieu de $0,19 \times 0,19$.

(*c*) **Contrefiches.** — Compression $N = 1950$, longueur $l = 2,80$ et $l^2 = 7,84$. On adoptera l'équarrissage carré ($K' = 12$) ; alors

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{1950}{12 \times 7,84} = 20.$$

Sur l'abaque n° 8, la radiante marquée 20 donne, avec la courbe de Rankine : $R' = 170\,000^k$, d'où l'on déduit, avec $m = 1$,

$$a = b = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{1950}{170000}} = 0^m,107, \quad \text{soit } 0^m,11.$$

(*d*) **Jambettes.** — Compression $N = 2100$, longueur $l = 1,10$ et $l^2 = 1,21$; d'où l'on déduit

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{2100}{12 \times 1,21} = 144.$$

Sur l'abaque n° 8, la radiante marquée 144 donne, avec la courbe de Morin, $R' = 285\,000$ K ; d'où l'on déduit

$$a = b = \sqrt{\frac{2100}{285000}} = 0^m.857, \quad \text{soit } 0^m,90.$$

(*e*) **Poinçon.** — Traction $N = 6800$. On le calcule à section carrée entière (v. n° 354-*c*), mais avec

$$R' = 1/4\,R = 1/4 \times 600\,000 = 150\,000 ; \qquad \text{d'où}$$

$$a = b = \sqrt{\frac{6800}{150000}} = 0^m,213, \quad \text{soit } 0^m,22.$$

On voit que le poinçon aurait un équarrissage (0,22), plus fort que l'arbalétrier (0,20), c'est pourquoi nous avons forcé ce dernier en le portant aussi à 0,22.

(*f*) **Tirant.** — Le tirant subit une traction générale $N = 9700$. De plus, il est soumis 1° sur une longueur $l = 6^m,00$ (car nous ne le considérons qu'entre l'appui et l'étrier du poinçon) à une charge de 2800^k, uniformément répartie, due au faux plafond et 2° à une surcharge de 2100^k, transmise par la jambette en un point situé au tiers de sa longueur, c'est-à-dire aux deux tiers de sa demi-longueur. C'est le problème de la poutre surchargée traité au n° 216. En se reportant aux notations du n° 216, on a :

$$l = 6,00, \quad \frac{l}{2} = 3,00, \quad a = 2,90, \quad a : \frac{l}{2} = \underline{K = 0,666.}$$

$$P = 2800, \quad P' = 2100, \quad m = \frac{P'}{P} = 0,75, \; \underline{mK = 0,495.}$$

Sur l'abaque n° 1 (p. 144), l'abscisse $mK = 0,495$ donne un point duquel nous remontons par une verticale jusqu'à la tangente qui répondrait à $K = 0,66$. On peut considérer ce point de la tangente comme situé sur la parabole enveloppe. Son ordonnée donne, pour le coefficient de majoration, $\delta = 2,18$ environ. C'est par ce coefficient δ qu'il faut multiplier le moment maximum qui serait dû à la charge uniforme toute seule pour avoir le moment maximum dû à cette charge et à la surcharge réunies ; on aura donc :

$$M = \frac{Pl}{8} \times \delta = \frac{2800 \times 6}{8} \times 2,18 = 4578 \text{ K}m.$$

Cela posé, nous calculons deux fois le tirant :

I. *Calcul en vue de la mortaise.* — En considérant la traction seule $N = 9700$ et prenant le cinquième de la résistance de sécurité soit $R' = 120\,000$ K. On a déjà $a = 0,22$, à cause de l'arbalétrier et du poinçon ; par suite, on aura :

$$b = \frac{9700}{0,22 \times 120\,000} = 0,368 \quad \text{soit } 0^m,37.$$

II. *2e Calcul, en vue de la flexion et de la traction combinées.* — En se reportant aux notations du n° 256-*c*, on a :

$$N = 9700 \text{ K}, \qquad M = 4578 \text{ K}m.$$

$$a = 0,22 \quad b' = \frac{N}{aR} = \frac{9700}{0,22 \times 600000} = 0,073 \quad \text{et} \quad b'^2 = 0,005329.$$

$$b''^2 = \frac{6M}{aR} = \frac{6 \times 4578}{0,22 \times 600000} = 0,208, \quad \text{d'où} \quad 4b''^2 = 0,832$$

$$b'^2 + 4b''^2 = 0,837329 \quad \text{et} \quad \sqrt{b'^2 + 4b''^2} = 0,915.$$

$$b = \frac{1}{2}\left(0,073 + 0,915\right) = 0,494, \qquad \text{soit} \qquad 0^m,50.$$

Ce deuxième calcul nous donne une hauteur plus forte que le premier. Il nous faudrait donc adopter pour le tirant l'équarrissage

$$a = 0,22 \qquad \text{et} \qquad b = 0,50.$$

III. *3e Calcul, avec l'équarrissage normal.* — Mais, selon nous, c'est une mauvaise proportion, puisque l'on a $a : b < 1/2$. C'est pourquoi nous proposons de faire un troisième calcul en adoptant l'équarrissage normal $a = 0,7\,b$; c'est le 3e problème du n° 356-*d*.

En adoptant les notations de ce numéro, on est conduit à résoudre l'équation du 3e degré $b^3 = pb + q$ dans laquelle

$$p = \frac{N}{nR}; \quad q = \frac{6M}{nR}, \quad \text{avec} \quad n = 0,7 \quad \text{et} \quad R = 600\,000,$$

ce qui donne :

$$p = \frac{9700}{0,7 \times 600\,000} = 0,023, \qquad q = \frac{4578 \times 6}{0,7 \times 600\,000} = 0,0663.$$

Sur l'abaque n° 6 (p. 194), on fait passer le trait *sur transparent*, à gauche, par le point $p = 0,023$ et, à droite, par le point $q = 0,663$ (car il faut, ici, pour le nombre q, reculer la virgule d'un rang vers la droite). La rencontre avec la solutive de gauche donne

$$b = 0,425 \quad \text{d'où} \quad a = 0,7b = 0,297 ; \quad \text{on prendra}$$

$$b = 0,43 \qquad \text{et} \qquad a = 0,30.$$

Dans ce cas le tirant aura pour largeur 0,30 tandis que l'arbalétrier n'a que 0,22 ; c'est pourquoi l'assemblage se fera *à tenon et mortaise avec embrèvement et encastrement.*

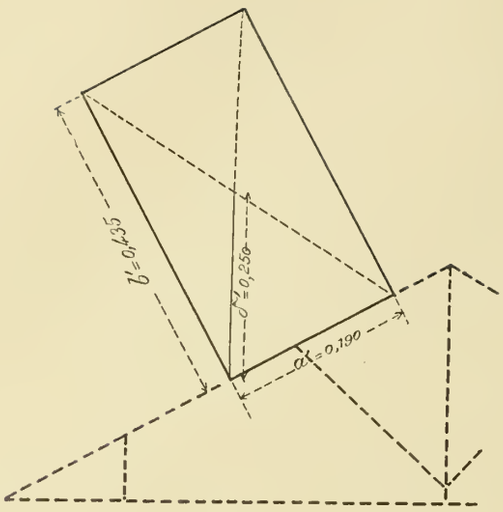


Fig. 344

(*g*) **Pannes.** — Longueur $l = 4^{m},36$, charge $P = 2100$ K ; moment fléchissant maximum $M = 1/8Pl = 1144$ K*m*.

Sur le rampant du comble plaçons un rectangle d'essai à diagonale verticale (v. n° 355-*d*) fig. 344. Mesurons ses côtés $a' = 0,190$, $b' = 0,435$, et la demi-diagonale $\delta' = 0,250$; faisons le produit $a' \times b' \times \delta' = K' = 0,02066$.

D'autre part a, b, et δ étant les dimensions analogues de l'équarrissage cherché on doit avoir

$$a \times b \times \delta = 6M : R = 0,01144,$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \sqrt[3]{\frac{0,01144}{0,02066}} = 0,8203, \qquad \text{et}$$

$$a = 0,19 \times 0,82 = 0,1558, \qquad b = 0,43 \times 0,82 = 0,3726.$$

Nous adopterons :

$$a = 0,16 \qquad \text{et} \qquad b = 0,37.$$

§ 6. — Ferme de 16 mètres de portée

362. **Descriptions et marche à suivre.** — Cette ferme (fig. 345) se compose, en réalité, de deux parties :

1° La *ferme haute*, constituée par deux arbalétriers BB, deux contrefiches CC, un poinçon D, deux jambettes E, et une pièce horizontale F qui porte le nom d'*Entrait retroussé*.

2° La *ferme basse*, composée de l'entrait précédent, qui lui est commun avec la ferme haute, de deux *jambes de force* G et d'un tirant L, lequel portera un plancher, car

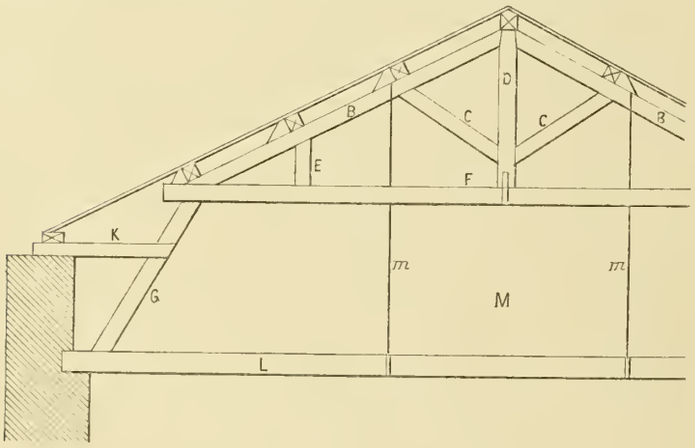


Fig. 345

cette disposition de ferme a pour objet de rendre le comble habitable, ou, du moins, utilisable comme grenier dans sa partie M.

Des *aiguilles pendantes m, m,* en fer, soutiennent le tirant en deux points et reportent ainsi une partie de son poids et du poids du plancher sur le nœud de l'arbalétrier situé au dessous de l'avant-dernière panne.

La ferme haute (fig. 346-I) est strictement indéformable et peut, comme celle des numéros précédents, avoir ses tensions intérieures déterminées par la statique graphique.

La ferme basse, au contraire (fig. II), étant un trapèze, est une figure déformable. En ses nœuds supérieurs *m* et *n* elle

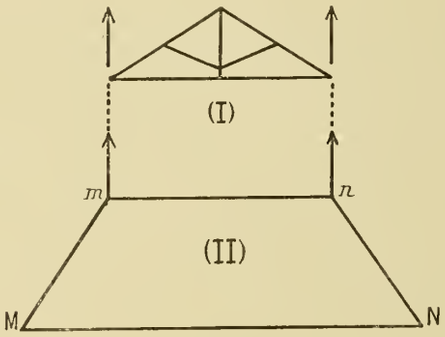


Fig. 346

subit le demi-poids total de la ferme haute lequel est connu. Le dynamique du nœud *m* nous fera voir que l'entrait *mn* subit une compression par ce fait qu'il appartient à la ferme basse ; d'autre part, il subit une traction comme appartenant à la ferme haute ; sa tension définitive sera donc égale à la différence entre la traction et la compression.

Cette déformabilité de la ferme basse est une mauvaise condition. Néanmoins, comme le toit est à pente faible, et comme la ferme bassse, noyée dans la construction, est abritée du vent par le mur de face, l'action oblique du vent y sera peu importante ; nous pouvons donc admettre que les charges des nœuds sont bien verticales et, à cause de leur répartition symétrique, le trapèze ne tendra que très peu à se défigurer.

C'est pourquoi la pièce horizontale K, qui se nomme un *blochet*, pièce fixée au mur et qui, ordinairement, est une moise, suffira pour s'opposer à la défiguration, mais à la condition que le mur de face, sur lequel il s'accroche, ait assez de stabilité.

363. **Données.**

Portée de la ferme et du plancher.	$L = 16^m$.
Longueur d'arbalétrier (entre pannes). . .	$2^m,30$.
Charge totale par m^2 d'égout.	217^k.
Espacement des fermes	4^m.
Charge d'une panne ($2,30 \times 217 \times 4$) . . .	2000^k.
Poids du plancher, par m^2	250^k.
Poids total du plancher ($250 \times 16 \times 4$) . .	16000^k.
Soit par mètre linéaire de tirant	1000^k
Poids de plancher supporté par chaque aiguille (voir plus loin. — 5/16 de 16000).	5000^k.

Pour calculer la charge des aiguilles aussi bien que le moment fléchissant maximum du tirant, nous pouvons faire deux hypothèses.

1re *Hypothèse.* — Il existe, dans le tirant, une enture à trait de Jupiter au droit des étriers des aiguilles ; autrement dit, le tirant est en trois morceaux.

On peut alors considérer l'aiguille comme supportant le poids des deux demi-travées de tirant, soit 3 mètres à gauche et 2 mètres à droite, c'est-à-dire les 5/16 du poids total, ce qui donne 5000^k pour la charge.

Le moment fléchissant maximum se produit alors au milieu de la travée de gauche, de 6^m. Et il a pour valeur

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{6000 \times 6}{8} = 4500K^m.$$

2e *Hypothèse.* — Le tirant est d'une seule pièce sans enture.

On le considérera alors comme une poutre continue, reposant sur quatre appuis de niveau. Les deux appuis intermédiaires sont ici les étriers des aiguilles.

Soient $M_0M_1M_2M_3$ les moments sur les appuis ; X_0, X_1, X_2, X_3 les réactions des appuis.

On aura $M_0 = 0$ et $M_3 = 0$ puisqu'il n'y a pas d'encastrement aux extrémités ; à cause de la symétrie on aura :

$$X_0 = X_3, \qquad X_1 = X_2 \quad \text{et} \quad M_1 = M_2.$$

Le théorème de Bertot et Clapeyron (v. n° 295-form. B) a pour expression

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' + \frac{Pl^2 + P'l'^2}{4} = 0.$$

En l'appliquant à la première aiguille, et remarquant que l'on a :

$$M_0 = 0 \quad | \quad M_1 = M_2 \quad | \quad l = 6 \quad | \quad l' = 4 \quad |$$
$$P = 6000 \quad | \quad P' = 4000,$$

on obtient, après simplifications,

$$2M_1(6 + 4 + 2) + \frac{6000 \times 36 + 4000 + 16}{4} = 0, \qquad \text{d'où}$$

$$M_1 = -\frac{7000}{24} = -2916K^m \quad \text{au lieu de } 4500.$$

La réaction de l'appui d'origine sera diminuée de toute la pente vraie de la représentative des moments de correction ; puisque $M_0 = 0$ et $M_1 = -2916K^m$, cette pente sera :

$$\frac{M_1 - M_0}{l} = -\frac{2916}{6} = -486\,K.$$

La réaction de l'appui n° 2 sera augmentée de cette même quantité. Or, si la poutre était coupée sur ses appuis les réactions des deux premiers appuis seraient

$$X'_0 = 3000^k \quad \text{et} \quad X'_1 = 5000^k.$$

On aura donc

$$\text{(réactions)} \begin{cases} X_0 = 3000 - 486 = 2514^k & \text{et} \\ X_1 = 5000 + 486 = 5486^k & \text{au lieu de } 5000. \end{cases}$$

On voit que la première hypothèse est la plus défavorable, c'est elle que nous adopterons. Faisons remarquer que les étriers des aiguilles devront être particulièrement soignés. Ils devront être faits avec des fers plats suffisamment larges pour former à la poutre et à son enture une bonne surface d'appui.

364. **Calcul des tensions.** — (*a*) **Ferme haute** (fig. 347). — Les réactions utiles sur les nœuds n° 1 et n° 1', non compris la réaction du poids de toiture qui leur incombe directement, sont

$$Y_0 = Y_1 = 10000^k.$$

C'est la moitié du total des charges appliquées aux nœuds n° 2 (2000), n° 4 (7000), n° 6 (2000), n° 4' (7000) et n° 2' (2000).

La jambette 2-3 reporte sa charge (2000^k) sur le point 3 du tirant (v. n° 359).

On fait la séparation des espaces et l'on construit (fig. II) le dynamique des tensions de la ferme haute comme il a été dit au n° 360. Nous n'expliquerons pas la construction.

(*b*) **Ferme basse.** — A chacun des nœuds n° 1 et n° 1' elle supporte le demi-poids total de la ferme haute ; soit 12000^k. C'est 2000^k de plus que les réactions Y_0 et Y_1 parce que nous devons, cette fois, tenir compte des 2000^k de toiture qui chargent directement les nœuds n° 1 et n° 1' de la ferme haute. Le nœud n° 1 de la ferme basse avec ses espaces séparés, K, J et N, est figuré à part (fig. I *bis*).

Les réactions Z_0 et Z_1 de la ferme basse sont égales à Y_0 et à Y_1, c'est-à-dire à 12000^k. La figure III donne le dynamique de la ferme basse.

Au nœud n° 9, qui sépare les espaces L, K, et N, répond le triangle *lkn*, et au nœud n° 1 le triangle *kjn*.

L'entrait JN est comprimé à 7400^k, tandis que, dans la ferme haute, il était tiré à 18400^k ; la différence est une traction de 11000^k.

365. **Calcul des dimensions des pièces.** — Le tableau ci-dessous donne les tensions et les moments fléchissants supportés par les différentes pièces. Dans les colonnes 5 et 6 on trouve les dimensions *strictement* calculées, comme il va être dit. Dans les colonnes 7 et 8 on trouve les dimensions adoptées.

Désignation des pièces		Tensions ou moments fléchissants	Longueurs	Equarrissages (en centimètres)			
				Calculés		Adoptés	
				a	*b*	*a*	*b*
1	2	3	4	5	6	7	8
Arbalétriers...	Co.	20900 *k.*	2,30	25,5	25,5	26,0	26,0
Contrefiches. .	Co.	6400 *k.*	2,80	16,0	16,0	16,0	16,0
Jambes de force	Co.	14100 *k.*	4,00	23,6	23,6	24,0	24,0
Jambettes.....	Co.	2000 *k.*	1.10	9,0	9,0	9,0	9,0
Poinçon.....	Tr.	13000 *k.*	3,30	29,4	29,4	30,0	30,0
Entrait.....	Tr.	11000 *k.*	12,00	25,2	36,0	26,0	36,0
	Fl.	2666 *km.*	6,00				
Tirant.....	Tr.	7400 *k.*	16,00	28,9	41,3	30,0	40,0
	Fl.	4500 *km.*	6,00				
Pannes.....	Fl.	1000 *km.*	4,00	17,3	31,4	18,0	32,0

(*a*) **Arbalétriers.** — Compression $N = 20\,900$, longueur $l = 2{,}30$ et $l^2 = 5{,}29$. On adoptera l'équarrissage carré pour lequel (v. n° 340, tableau n° 5) $K' = 12$; dès lors on a

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{20\,900}{12 \times 5{,}29} = 329.$$

Sur l'abaque des bois de charpente n° 8 (v. n° 342), la radiante marquée 329 (1) coupe la courbe de Morin (ici la plus défavorable) au point donnant pour résistance de sécurité $R' = 320\,000^k$. On aura donc pour le module, en faisant $m = 1$,

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{20\,900}{320\,000}} = 0^m{,}255.$$

Nous forcerons légèrement et nous prendrons

$$a = b = 0^m{,}26.$$

(*b*) **Contrefiche.** — Compression : $N = 6\,400$, $l = 2{,}80$ et $l^2 = 7{,}84$. On adoptera la section carrée ($K' = 12$) ; dès lors

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{6\,400}{12 \times 7{,}84} = 67.$$

Sur l'abaque n° 8, la radiante marquée 67 donne avec la courbe de Morin $R' = 250\,000^k$; d'où l'on déduit

$$a = b = \sqrt{\frac{6\,400}{250\,000}} = 0^m{,}16.$$

(*c*) **Jambes de force.** — Compression : $N = 14\,100$, $l = 4$ et $l^2 = 16$. Adoptant l'équarrissage carré ($K' = 12$), il vient

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{14\,100}{12 \times 16} = 73 ;$$

(1) Elle n'existe pas sur l'abaque ; le lecteur la placera facilement.

la radiante marquée 73 donne sur l'abaque n° 8

$$R' = 253\,000^k, \qquad \text{d'où}$$

$$a = b = \sqrt{\frac{14\,100}{253\,000}} = 0{,}236,$$

soit, en forçant,

$$a = b = 0{,}24.$$

(*d*) **Jambettes.** — On a très sensiblement les mêmes données que pour les jambettes de la ferme précédente. On en déduira, de même :

$$a = b = 0^m{,}9.$$

(*e*) **Poinçon.** — Traction : $N = 13000^k$. On prend (v. n° 354-*c*) : $R' = 1/4R$, c'est-à-dire $R' = 150000^k$, d'où

$$a = b = \sqrt{\frac{13000}{150000}} = 0{,}294 ;$$

nous forcerons en prenant

$$a = b = 0{,}30.$$

(*f*) **Entrait.** — Traction : $N = 11000^k$. Flexion : moment fléchissant maximum $M = 2666K^m$, $l = 6^m{,}00$.

M a été calculé comme suit :

L'entrait, considéré comme soutenu en son milieu par le poinçon, a une longueur de 6 mètres et il supporte une charge $P' = 2000^k$, transmise par la jambette en un point (le nœud n° 3) qui est au tiers de sa longueur, c'est-à-dire aux 2/3 de sa demi-longueur. On a donc : $K = 2/3$. C'est le problème de la poutre surchargée (v. n° 214-*c*) dans le cas où la charge uniforme P est nulle. On appliquera la formule du maximum angulaire qui est

$$M' = \frac{Pl}{8} \times K \times (2 - K) \times (2m + 2)$$

qui devient en remplaçant m par $P' : P$ et en faisant $P = 0$,

$$M' = \frac{P'l}{4} K(2 - K).$$

$P'l' : 4$ serait le moment si la charge était appliquée au milieu ($K = 1$) ; de sorte que le facteur $K(2 - K)$ est le coefficient de réduction à y apporter lorsque la charge n'est pas au milieu. Dans le cas actuel $K = 2/3$; dès lors

$$M = \frac{P'l}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2000 \times 6 \times 8}{4 \times 9} = 2666Km.$$

Cela posé : appliquons ce qui a été dit au n° 256-*c* ; l'entrait aura probablement de fortes dimensions, c'est pourquoi nous proposons d'adopter immédiatement l'équarrissage normal $a = 0{,}7b$, c'est-à-dire $n = 0{,}7$. On est amené à résoudre l'équation du troisième degré $b^3 = pb + q$ dans laquelle

$$p = \frac{N}{nR} = \frac{11000}{0{,}7 \times 600000} = 0{,}0262$$

$$q = \frac{6M}{nR} = \frac{6 \times 2666}{0{,}7 \times 600000} = 0{,}0380.$$

Sur l'abaque n° 6 (p. 194) on fait passer le trait *sur trans-*

parent, à gauche, par le point $p = 0{,}0262$ et, à droite, par le point $q = 0{,}38$ (car il faut ici, pour le nombre q, reculer la virgule de un rang vers la droite). La rencontre avec la *solutive* de gauche donne $b = 0{,}36$ et $a = 0{,}7b = 0{,}252$ soit, en forçant, 0,26, c'est-à-dire, précisément, la même largeur que l'arbalétrier, ce qui est une bonne condition.

(*g*) **Tirant.** — Traction : N = 7 400.

Flexion : moment fléchissant trouvé plus haut, M = 4500km.

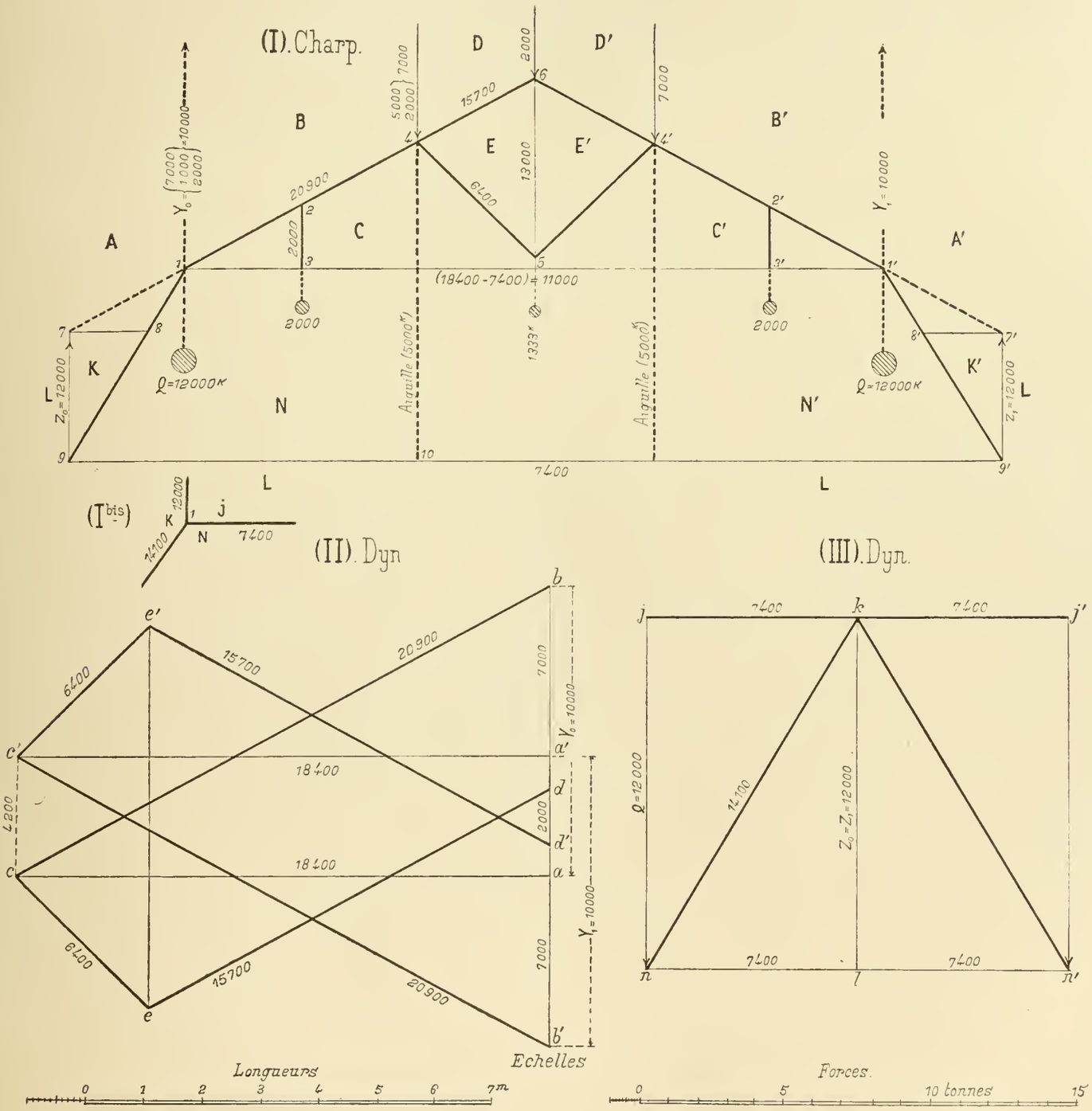


Fig. 347

Adoptons encore l'équarrissage normal $a = 0{,}7b$, c'est-à-dire $n = 0{,}7$. L'équation du troisième degré $b^3 = pb + q$ devient en faisant

$$p = \frac{N}{nR} = \frac{7400}{0{,}7 \times 600000} = 0{,}0176,$$

$$q = \frac{6M}{nR} = \frac{6 \times 4500}{0,7 \times 600000} = 0,0643,$$

$$b^3 = 0,0176b + 0,0643.$$

L'abaque n° 6 donne pour racine

$$b = 0,413, \qquad \text{d'où} \qquad a = 0,7b = 0,2891\ ;$$

nous prendrons en nombres ronds

$$b = 0,40 \qquad \text{et} \qquad a = 0,30.$$

En prenant $a = 0,30$, comme la jambe de force possède 0,24 de largeur, cela donnera $1/2(30 - 24)$, soit 3 centimètres d'épaisseur aux jouées de la boîte d'encastrement de la jambe de force dans le tirant ; ce sera bien.

(*h*) **Pannes.** (V. calcul des pannes n° 355-*p*). — L'espacement des fermes, c'est-à-dire la longueur des pannes, est $l = 4^m$; la charge totale supportée est $P = 2000^k$. Le moment fléchissant maximum est $M = 1/8\ Pl = 1000K^m$. On doit donc avoir

$$ab\delta = \frac{6M}{R} = \frac{6000}{600000} = 0,01.$$

On place, à titre d'essai, un premier rectangle sur le rampant du toit, en ayant soin que sa diagonale soit verticale, et on mesure ses côtés a' et b' ainsi que sa demi-diagonale δ'; on fait ensuite le produit $a'b'\delta' = A'$, lequel différera, sans doute, du produit $ab\delta = A$ que l'on devrait obtenir. On prendra dès lors

$$a = a'\sqrt[3]{\frac{A}{A'}} \qquad \text{et} \qquad b = b'\sqrt[3]{\frac{A}{A'}}.$$

Remarquons que le demi-rectangle de panne sera un triangle rectangle semblable à la demi-ferme ; on peut donc se dispenser de dessiner une panne d'essai sur le rampant et prendre pour a' la hauteur de la ferme, pour b' sa demi-portée, et pour δ' la demi-longueur de l'arbalétrier (on fera bien, au lieu des longueurs elles-mêmes, de prendre le centième de ces dimensions). En opérant ainsi on aura (voir l'épure)

$$a' = 0,330. \qquad b' = 0,600, \qquad \delta' = 0,345,$$

d'où : $a'b'\delta' = 0,0693 = A'$

au lieu de $ab\delta = 0,0100 = A$;

on aura donc :

$$a = 0,33\sqrt[3]{\frac{0,01}{0,0693}} = 0,33 \times 0,524 = 0,1729,$$

$$b = 0,60\sqrt[3]{\frac{0,01}{0,0693}} = 0,60 \times 0,524 = 0,3144.$$

On forcera et l'on prendra pour équarrissage

$$a = 0,18, \qquad b = 0,32.$$

(*i*) **Généralisation du calcul des pannes.** — Généralisons cette méthode et appelons

h la hauteur du comble ;

l sa portée (la demi-portée est $1/2l$) ;

L la longueur de l'arbalétrier (la demi-longueur est $1/2L$).

On opérera en prenant pour demi-rectangle d'essai la demi-ferme, $a'b'\delta' = 1/4\,hlL = A'$; dès lors, comme on doit avoir $ab\delta = 6M : R$, on en déduit

$$a = h\sqrt[3]{\frac{24M}{RhlL}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{l}{2}\sqrt[3]{\frac{24M}{RhlL}}.$$

Nota. — Ces formules ne s'appliqueraient pas si la toiture était soumise à l'action du vent parce que, dans ce cas, le demi-rectangle de panne ne devrait pas être semblable à la demi-ferme.

2e SECTION

FERMES MÉTALLIQUES

§ 7. — GÉNÉRALITÉS

366. **Caractères particuliers des fermes métalliques.** — Les fermes métalliques ont en général des portées plus grandes que les fermes en bois; leur espacement peut être aussi beaucoup plus grand. Les pannes, qui deviennent alors des pièces très importantes, sont disposées à égale distance les unes des autres le long de l'arbalétrier, leur distance variant entre $1^m,80$ et $2^m,50$; mais chacune d'elles n'est plus forcément à l'aplomb d'un nœud, comme dans les fermes en bois. Les nœuds, en général moins nombreux que les pannes, sont placés en des points déterminés de l'arbalétrier et, ordinairement, soit au droit de l'une des pannes, soit au milieu de l'intervalle de deux d'entre elles. L'arbalétrier est alors soumis, en même temps, à des efforts longitudinaux de compression et à des efforts de flexion ;

nous verrons plus loin comment, en conséquence, on calcule ses dimensions. Enfin, les assemblages des diverses pièces, obtenus au moyen de couvre-joints ou de cornières, par rivets ou par boulons, ne diminuent pas la résistance de ces pièces et ne sont pas, comme dans les fermes en bois, les points faibles de la construction.

367. Répartition des charges sur les fermes. — (*a*) **Conventions.** — Nous ferons ici les mêmes conventions que pour les fermes en bois. (Voir n° 345 *a*, *b*, *c*.)

(*b*) **Charge appliquée à chaque nœud de l'arbalétrier.** — *1er Cas.* — Chacune des pannes est à l'aplomb d'un nœud. Ce cas est l'exception; la répartition des charges sur les nœuds se fait alors comme dans les fermes en bois.

2e Cas. — Les nœuds ne sont pas au droit des pannes. On suppose l'arbalétrier coupé au droit de chaque nœud; chacun d'eux est alors considéré comme un appui fixe. Soit AB (fig. 348) une portion d'arbalétrier supportant trois pannes, lesquelles reçoivent les charges parallèles p_1, p_2, p_3. Les charges sur les nœuds A et B, provenant du tronçon AB, sont égales et de sens contraire aux réactions exercées par ces nœuds sur la portion AB d'arbalétrier.

Nous démontrerons plus loin que ces réactions sont parallèles aux charges p_1, p_2 et p_3 (V. plus loin théorème *c*).

Si, comme c'est le cas le plus fréquent, les pannes sont à égale distance les unes des autres, également chargées, et symétriquement placées par rapport aux nœuds A et B, les deux réactions sont égales à la demi-somme des charges; si, de plus, les nœuds sont également espacés sur l'arbalétrier, la charge sur chacun d'eux est égale à la somme des charges appliquées sur un tronçon AB.

(*c*) **Théorème** (fig. 349). — « Si une pièce élastique à sec-« tion constante, reposant par ses extrémités sur deux appuis « à rotule fixe A et B, *dont la distance est invariable*, est sou-« mise à une force oblique P, les réactions des appuis A et

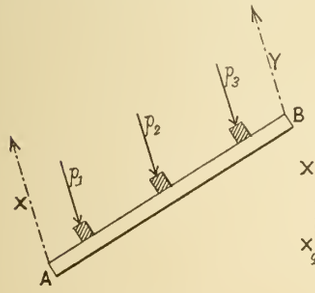


Fig. 348

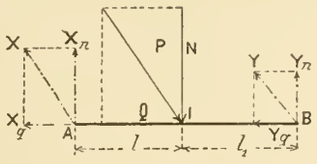


Fig. 349

« B sont égales et contraires aux forces obtenues en décom-« posant la force P en deux autres qui lui sont parallèles et « qui sont appliquées aux points A et B (fig. 349). »

Nota. — Le lecteur, habitué en mécanique rationnelle à considérer des solides invariables, c'est-à-dire non élastiques, se demandera pourquoi nous démontrons ce fait qui lui paraîtra évident dans ces conditions. Il le faut cependant avec un solide déformable, car il est évident que la force oblique P tend à comprimer les fibres du côté de B et à les tirer du côté de A; et il est évident aussi que si, A étant fixe, on laissait la barre s'allonger et que, une fois B déplacé par le fait de cet allongement, on plaçait l'appui au droit de la nouvelle position, cet appui ne supporterait aucun effort *longitudinal* de la part de la pièce. La réaction serait donc normale et non oblique.

Une démonstration est donc nécessaire; la voici :

Démonstration. — Soit L la longueur de la pièce AB et soit P la force appliquée au point I, dont les distances aux points A et B sont l et l_1.

La force P peut être décomposée en deux autres, l'une N normale à AB, l'autre Q, dirigée suivant AB.

La force N donne lieu à deux réactions normales X_n et Y_n qui lui sont parallèles, et qui ont pour expression :

$$X_n = \frac{Nl_1}{L} \qquad \text{et} \qquad Y_n = \frac{Nl}{L}.$$

La force Q appliquée au point I donne lieu aux deux réactions longitudinales X_q et Y_q inconnues pour l'instant, dirigées suivant AB, mais dont la somme est égale à Q.

Décomposons la force Q en deux autres appliquées au point I et respectivement égales et de *sens contraire* aux réactions X_q et Y_q; le tronçon BI est soumis de la part de la force $-Y_q$ à une traction qui produit un allongement ε lequel a pour valeur :

$$\varepsilon = \frac{Y_q l_1}{E\Omega},$$

Ω étant la section de la barre AB.

Le tronçon AI est soumis de la part de la force $-X_q$ à un raccourcissement ε', lequel a pour valeur :

$$\varepsilon' = \frac{X_q l}{E\Omega}.$$

Et comme la longueur de la barre AB entre appuis est invariable, on doit avoir $\varepsilon = \varepsilon'$, d'où

$$X_q l = Y_q l_1 \qquad \text{et comme} \qquad X_q + Y_q = Q,$$

on tire de là :

$$X_q = \frac{Ql_1}{L} \quad \text{et} \quad Y_q = \frac{Ql}{L}. \qquad \text{On a donc :}$$

$$\frac{X_q}{X_n} = \frac{Q}{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{Y_q}{Y_n} = \frac{Q}{N}.$$

Il en résulte que si l'on compose, d'une part, les forces X_q et X_n, d'autre part les forces Y_q et Y_n, les résultantes finales X et Y seront parallèles à P et auront pour valeurs

$$X = \frac{Pl_1}{L} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{Pl}{L}.$$

Ce sont bien les valeurs des composantes parallèles de la

force P appliquées aux points A et B; le théorème est donc démontré.

Remarque I. — Le théorème est vrai pour un nombre quelconque de forces parallèles, puisqu'on peut toujours remplacer ces forces par leur résultante.

Remarque II. — Si la distance des appuis n'avait pas été invariable, on n'aurait pas eu $\varepsilon = \varepsilon'$, ni par suite : $X_q l = Y_q l_1$; la proportionnalité entre les composantes longitudinales et les composantes normales des réactions n'aurait plus existé et, par suite, les réactions finales n'eussent pas été parallèles à la force P.

§ 8. — Ferme Polonceau a une bielle par arbalétrier

368. **Préliminaires.** — (*a*) **Données** (fig. 352, page 311).

Portée de la ferme, $20^m,00$.

Espacement des fermes, $6^m,00$.

Longueur d'égout mesurée sur l'épure, $11^m,75$.

Surface d'un égout, $11,75 \times 6 = 70^{m^2},50$.

Charge propre d'un égout, à raison de 60 k. par mètre carré, cela fait $70,50 \times 60 = 4230$ k.

Espacement des pannes, $2^m,35$.

(*b*) **Pression du vent** (fig. 352-III). — Pour rendre le problème plus général, nous tiendrons compte de la pression du vent.

Nous admettrons pour la puissance du vent 124 k. par mètre carré soit, pour un égout, $124 \times 70,50 = 8742$ k.

Nous obtiendrons l'action exercée par le vent sur l'égout en procédant comme il est dit au n° 344-*c*. Sa composante normale, ainsi obtenue, mesurée sur l'épure, est de 3825 k.

(*c*) **Charge sur chaque panne.** — I. *Egout non exposé au vent.* — Comme il y a quatre pannes sur chaque égout, chacune d'elles supporte un cinquième de la charge totale de cet égout, soit $4230 : 5 = 846$ k.

Le faîtage supporte, pour sa part, du côté de cet égout, un dixième de la charge, soit 423 k.

La sablière supporte également 423 k., mais ce poids, qui est reporté directement sur le mur, n'interviendra pas dans l'épure des efforts intérieurs de la ferme.

II. *Egout exposé au vent.* — En composant (fig. 352-III) la charge verticale de 4230 k. afférente à cet égout avec la pression normale du vent, nous obtenons leur résultante égale à 7750 k.

Chaque panne de cet égout en supporte un cinquième, soit $7750 : 5 = 1550$.

Le faîtage supporte pour sa part, du côté de cet égout, un dixième de la charge totale, soit $7750 : 10 = 775$ k.

Il supporte donc au total une action égale à la résultante de la force verticale de 423 k. et de la force oblique de 775 k. Cette résultante oblique, est obtenue en *eg*, sur le dynamique (fig. 352-II). Elle a une valeur de 3050 k.

La sablière supporte une action oblique de 775 k.; cette action est directement reportée sur le mur.

(*d*) **Remarque.** — Comme nous avons tenu compte de la pression du vent sur un égout, nous ne devons pas supposer que le comble supporte en même temps une surcharge de neige.

369. **Réactions des appuis.** — La grandeur et la direction de ces réactions dépendent de la nature des appuis ; nous pouvons faire les deux hypothèses suivantes :

1re Hypothèse. — L'un des appuis est à roulement, l'autre est soit à rotule fixe, soit à frottement.

2e Hypothèse. — Chacun des deux appuis est à frottement.

(*a*) **Un des appuis est à roulement ou à scellement, l'autre est soit à rotule fixe, soit à frottement.** — Ce sera la meilleure disposition à employer pour parer aux effets de la température, et nous avons vu (n° 169-*e*) que cela constituait un *système strict* d'appuis. L'appui roulant A ne développera qu'une réaction verticale X; l'autre appui, s'il est fixe, développera une réaction Y, qui pourrait avoir une direction oblique quelconque, mais qui devra rencontrer la résultante au même point que la réaction verticale X. Les grandeurs et les directions des deux réactions sont donc déterminées par la statique pure (fig. 350-I et II).

Si l'appui B est à frottement, cette réaction devra être comprise dans l'angle de frottement; de sorte qu'un appui à frottement est tout à fait assimilable à un appui à rotule fixe pourvu que la réaction soit comprise dans l'angle de frottement.

Nota. — On devra toujours établir cet appui à frottement sur un support ou sur un mur très solides, s'opposant au renversement. Cela posé :

Nous n'aurons que deux cas à considérer :

1er Cas. — La résultante générale des efforts est appliquée du côté de l'appui roulant (fig. 350-I).

2e Cas. — Elle est appliquée du côté de l'appui fixe (fig. 350-II).

L'épure des tensions, faite pour les nœuds d'extrémité α et β et pour chacun des deux cas, montre que la seconde hypothèse (fig. IV) est la plus défavorable, et donne lieu dans les pièces principales du comble à des tensions plus fortes ;

ainsi, *fd*, compression de l'arbalétrier, et *af*, traction du tirant, sont plus grandes sur la fig. IV que les quantités analogues sur la fig. III.

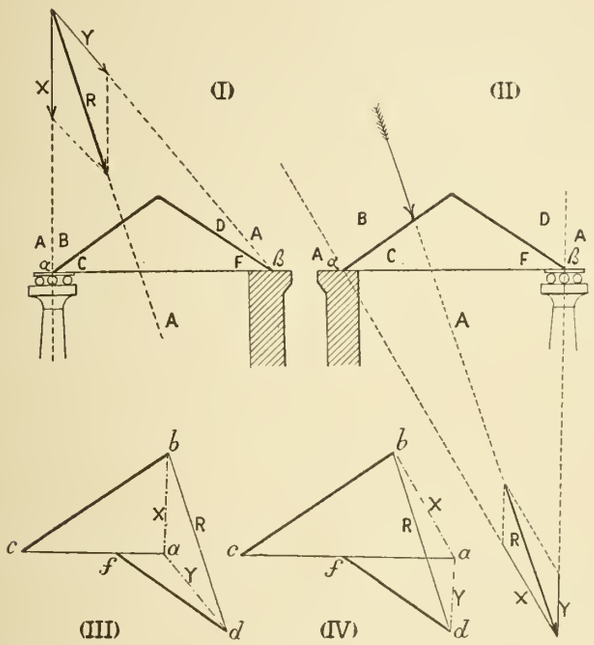


Fig. 350

Nota. — Cas d'une surcharge de neige. — Si l'on ne tient compte que d'une surcharge de neige, la résultante de toutes les charges du comble étant verticale, les réactions sont verticales dans tous les cas, que les appuis soient à rotule fixe, à rotule roulante ou à frottement.

(*b*) **Les deux appuis sont à frottement.** — Tout d'abord il est évident que, même si le système éprouve des défigurations intérieures, il faudra que la résultante générale de toutes les forces appliquées sur le comble fasse avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement, car s'il en était autrement le système tout entier glisserait sur les deux surfaces horizontales d'appui, exactement comme ferait un système indéformable. Il faut, en outre, pour la même raison, que la réaction de chaque appui, laquelle est égale et contraire à l'action de l'extrémité de la ferme sur lui, soit aussi comprise dans l'angle de frottement.

Je dis que ces considérations vont nous autoriser à admettre, *sans erreur sensible*, que les deux réactions X et Y (fig. 351-I) peuvent être prises parallèles à la résultante R des forces obliques qui agissent directement sur la ferme.

Digression. — Avant de justifier cette assertion, montrons d'abord comment nous pourrions déterminer ces deux équilibrantes parallèles X et Y de la résultante R.

Pour cela (fig. 351-I), joignons DB et considérons le triangle ADB comme un funiculaire dont nous construirions le dynamique à côté (fig. II). Sur ce dynamique, MN est la résultante ; les rayons polaires 1 et 3 sont parallèles respectivement à AD et à DB; le rayon moyen n° 2 est OP parallèle à AB (fig. 351-II); les réactions sont donc : $Y = N\beta$ et $X = \beta M$. Cela posé, revenons à la question.

1° Si les appuis étaient à rotule fixe, le problème ne pourrait être résolu par la statique pure; il serait indé-

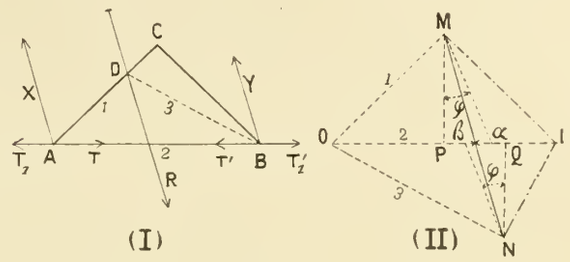


Fig. 351

terminé, et en joignant un point quelconque I de la droite OP aux points M et N, nous aurions un système NI et IM de deux réactions possibles des appuis A et B.

Nous ne pourrions déterminer ces réactions qu'en faisant intervenir les défigurations élastiques de la ferme.

Si nous admettions que la ferme est indéfigurable, nous pourrions, puisque la distance AB des nœuds est supposée invariable, assimiler la ferme à une pièce indéfigurable posée sur deux appuis fixes (voir théorème n° 367-*c*) et considérer les deux réactions comme parallèles à la résultante.

2° Si les appuis sont à simple frottement, le problème est encore indéterminé, mais nous pouvons limiter les solutions possibles. Il ne faut pas, en effet, que les nœuds A et B se déplacent et, pour cela, les réactions ne doivent pas faire avec la verticale un angle supérieur à l'angle de frottement φ.

Dans les fermes en bois, les nœuds extrêmes reposant directement sur les murs, φ est l'angle de frottement de bois sur pierre égal à 20° environ; dans les fermes en fer, on interpose ordinairement entre les abouts des arbalétriers et la maçonnerie une semelle en fer ou en fonte et l'on doit prendre $\varphi = 10°$ correspondant au frottement de deux métaux à sec.

Dès lors, construisons sur le dynamique (fig. 351-II) les angles αMP et βNQ égaux à l'angle de frottement φ; les réactions devront être comprises dans ces angles, ce qui ne sera possible que si, tout d'abord, la résultante générale R fait avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement ; il en sera ainsi en général, sinon tout s'effondrera.

Les réactions ne pourront donc pas sortir du parallélogramme $M\alpha N\beta$; les valeurs extrêmes à admettre sont : $X = \alpha M$ et $y = N\alpha$ ou bien $X = \beta M$ et $Y = N\beta$.

Cela prouve donc que, en supposant les réactions diri-

gées suivant MN, nous prenons, en quelque sorte, des moyennes peu différentes des valeurs possibles de ces réactions; et nous ne commettrons ainsi dans le calcul des tensions des différentes barres que des erreurs assez faibles.

3° Si nous supposons que l'on fixe d'une manière invariable l'un des nœuds, B par exemple, par une rotule fixe, l'autre A restant à simple frottement, les réactions ne devront pas sortir du quadrilatère PMαN, et l'erreur commise en prenant MN comme direction des réactions sera, encore, relativement faible.

4° Si l'on veut faire intervenir l'action de la température, on remarquera qu'une élévation de température tend à produire un allongement de AB, ce qui fait que les nœuds A et B poussent horizontalement sur leurs appuis; les réactions s'obtiendront donc en composant avec X et Y des poussées horizontales telles que AT et BT′ (fig. I).

Si la température s'abaisse la distance AB tend à diminuer, et les nœuds A et B tirent horizontalement sur leurs appuis; les réactions s'obtiendront en composant avec les réactions X et Y des forces horizontales AT_1 et BT'_1 de sens contraire à AT et BT′.

Dans les deux cas, les réactions se rencontreront sur la résultante et ne devront pas sortir du parallélogramme Mα, Nβ.

En résumé, ainsi que nous l'avons affirmé, en prenant les deux réactions des appuis parallèles à la résultante des forces extérieures, nous ne serons peut-être pas dans les conditions exactes de la réalité, mais nous nous écarterons très peu des valeurs de ces réactions compatibles avec l'équilibre général de la ferme et avec l'équilibre partiel de chacun de ses appuis. C.Q.F.D.

370. **Calcul des tensions des barres.** — (*a*) **Réactions des appuis** (fig. 352). — Construisons (fig. II) le dynamique *mpqrstvxyn* des forces appliquées sur les pannes de la ferme; la résultante générale est *mn*; nous appuyant sur ce qui précède, faisons l'hypothèse que les réactions sont parallèles à cette résultante et construisons (fig. I) un funiculaire αβ en prenant un pôle quelconque O.

Menons par le pôle O, sur le dynamique, une parallèle à la base αβ de ce funiculaire jusqu'à sa rencontre au point *a* avec la résultante *mn*; les deux réactions sont :

$$X = am = 5750^k, \qquad Y = na = 5000^k.$$

(*b*) **Charges sur chaque nœud.** — Nous avons dit que nous supposions l'arbalétrier coupé au droit de chaque nœud; alors chaque portion d'arbalétrier détermine sur ses nœuds d'appui des réactions parallèles à la résultante des charges qu'elle supporte; nous allons, sur le dynamique lui-même, trouver les charges qui incombent à chaque nœud. A cet effet, considérons la portion 1,2, de l'arbalétrier de gauche; elle supporte deux charges obliques de 1550^k. Le dynamique de ces deux forces est *mpq*. Les réactions 1γ et 2δ aux points 1 et 2 s'obtiendront en menant sur le dynamique une parallèle O*b* à la base γδ du funiculaire partiel obtenu en composant les deux forces de 1550^k.

$bm = 1250^k$ est la charge reportée sur le nœud n° 1, *bq* est la charge reportée sur le nœud n° 2. Si nous opérons de même pour le tronçon 2 4, d'arbalétrier, nous trouverons sur le nœud 2 une charge donnée par la longueur *qe* du dynamique; cette charge jointe à celle qui provient du tronçon 1, 2, donne $bq + qe = 3775^k$. Sur le nœud 4, la charge provenant de l'égout de gauche est *et*.

Le tronçon 4.5 d'arbalétrier de droite donne sur le nœud 4 une charge verticale *tg*, qui représente ce que le faîtage reçoit de l'égout de droite. En composant les deux forces *et* et *tg* sur le dynamique, nous avons en *eg* la charge oblique du faîtage, laquelle est de 3050 k.

Enfin on obtient la charge sur le nœud 5, qui est de 2100 k. et la charge sur le nœud 7, de 640 k.

(*c*) **Séparation des espaces.** — Nous désignerons, comme pour les fermes en bois, les différents espaces par les lettres A, B, C, D, etc., en remarquant que le triangle 3, 4, 6 ne constitue qu'un seul espace, attendu que l'aiguille verticale ne sert qu'à soutenir le tirant horizontal pour l'empêcher de fléchir en son milieu ; elle n'intervient pas dans l'épure des tensions.

(*d*) **Nœud n° 1.** — Le nœud n° 1 est soumis à la réaction $X = am = 5750$ k. et à la force oblique $mb = 1250$ k.; la résultante de ces deux forces est $ab = 4525$ k.

Ce nœud jonctionne les trois espaces A, B, et C; son dynamique est *abc*, obtenu en menant par le point *a* la parallèle *ac* à la barre A.C et par le point *b* la parallèle *bc* à B.C. En cheminant dans le sens amorcé par la réaction *ab*, nous voyons que $bc = 13950$ k., poussant sur le nœud n° 1, l'arbalétrier est comprimé; tandis que $ca = 12850$ k. tire sur le n° 1; le tirant CA est donc tiré.

(*e*) **Nœud n° 2.** — A ce nœud aboutissent quatre forces savoir : CB, connue par l'épure précédente, BE, charge sur le nœud, égale à 3775 k.; ED, et DC inconnues mais dont les directions nous sont données.

Le dynamique *bcdc* de ce nœud est donc facile à construire en menant *ed* parallèle à ED, et *cd* parallèle à CD, ce qui détermine le sommet *d*.

Le cheminement se fait dans le sens amorcé par la force *be*, qui, en tant que charge, doit être parcourue de haut en bas, c'est-à-dire de *b* vers *e*. Nous avons alors sur l'arbalétrier la compresssion $ed = 12375$ k. et sur la bielle la compression $dc = 3600$ k.

(*f*) **Nœud n° 3.** — C'est encore un nœud à quatre forces

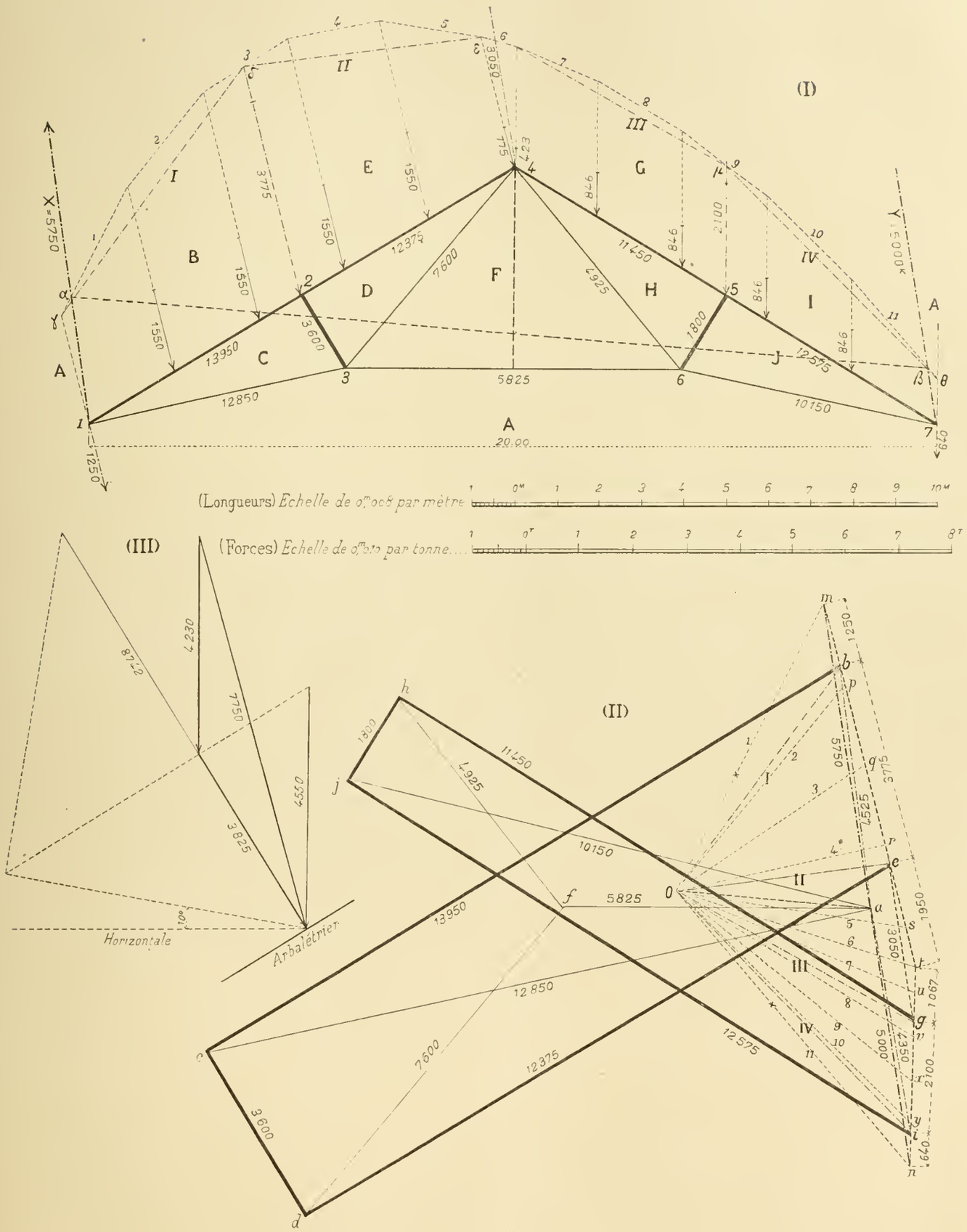

(I)
(II)
(III)
(Longueurs) Echelle de 0m008 par mètre courant
(Forces) Echelle de 0m010 par tonne
Horizontale
Arbalétrier
X=5750
Y=15000
20.00
5825
12850
13950
12375
7600
3600
11450
4925
10150
12575
1800
4230
8712
7750
4550
3825

Fig. 352

dont deux sont connues, tandis que les deux autres sont données en direction. Son dynamique amorcé par *ac* est *acdf*.

(*g*) **Nœud n° 7.** — Le n° 7 est comme le nœud n° 1 soumis à deux forces : la réaction $Y = na = 5000$ k. et la force verticale $in = 640$ k., dont la résultante est $ia = 4350$ k.

Son dynamique est *iaj*.

(*h*) **Nœuds 5 et 6.** — Ces nœuds sont analogues aux nœuds 2 et 3.

Le dynamique du nœud 5 est *gijh*.

Celui du nœud 6 est *hjaf*; le côté *fh* doit être parallèle à FH pour que le dynamique général se ferme ; cela fournit une vérification précieuse.

(*i*) **Nœud n° 4.** — C'est un nœud à cinq forces, qui sont actuellement toutes connues ; le dynamique de ce nœud est *eghfd*.

371. **Calcul des pièces de la ferme à simple tension.** — (*a*) **Tableau des efforts.** — Les tensions des différentes barres étant connues, nous pourrons déterminer leurs dimensions; nous les calculerons pour le côté gauche de la ferme qui est le plus fatigué, et nous construirons les deux moitiés de la ferme avec les mêmes dimensions, car le vent peut souffler aussi bien sur un égout que sur l'autre.

Formons d'abord le tableau indiquant les dimensions de ces pièces ainsi que les tensions qu'elles supportent :

Désignation des Pièces		Nature des efforts	Valeurs des efforts (en kilos)	Longueur des pièces (en mètres)
Tirants d'arbalétriers.	1.3	Traction . .	12850	6,20
	3.4	Id. . . .	7600	6,20
Tirant de ferme . . .	3.6	Id. . . .	5825	7,90
Arbalétrier.	1.2	Compression	13950	5,875
		Flexion. . .	M = 2875	
	2 4	Compression	12375	5,875
		Flexion. . .	M = 2875	
Bielle	2.3	Compression	3600	2,00
Pannes		Flexion. . .	M = 1162,5	6,00

Nota. — Le moment fléchissant M sur l'arbalétrier a été déterminé par une épure (voir plus loin n° 372-*b*).

(*b*) **Pièces tirées. Tirants.** — Les tirants seront cylindriques. Nous calculerons leur section circulaire en admettant une résistance de sécurité de 8 k. par millimètre carré. — Ayant leur surface Ω, le tableau des nombres de la fin du livre donnera le diamètre.

Le tirant 1.3 supportant 12850^k, sa section en millimètres carrés sera

$$\Omega = 12850 : 8 = 1606, \qquad \text{d'où} \qquad d = 46^{mm}.$$

Pour le tirant 3, 4, nous aurons

$$\Omega_1 = 7600 : 8 = 950, \qquad \text{d'où} \qquad d_1 = 35^{mm}.$$

Pour le tirant de ferme 3, 6,

$$\Omega_2 = 5825 : 8 = 728 \qquad \text{d'où} \qquad d_2 = 31^{mm}.$$

L'aiguille verticale supportant ce dernier tirant en son milieu doit en porter la moitié soit :

$$\frac{0,000728 \times 7,9 \times 7800}{2} = 22^k,43.$$

La section devrait donc être

$$\Omega_3 = 22,43 : 8 = 3^{mm2} \qquad \text{par excès, d'où} \qquad d = 2^{mm}.$$

Cette dimension étant beaucoup trop faible, pratiquement, on lui donnera un diamètre de 10$^m/^m$ environ, au moins.

Il sera bon, d'ailleurs, de forcer toutes ces dimensions.

(*c*) **Pièces comprimées. — Bielles.** — Les contrefiches, ou *bielles*, sont en fonte, à section *cruciforme* dans leur partie médiane (fig. 352-*bis*) ; leurs extrémités sont cylindriques. Du côté de l'arbalétrier, la bielle porte sur un sabot en fonte dans lequel elle est maintenue par un boulon; à l'autre extrémité, elle porte sur une double flasque en tôle, qui sert aussi à recevoir les extrémités des tirants.

Nous admettrons pour la résistance de sécurité de la fonte à la compression R = 8.

I. *Sections aux extrémités.* — Nous calculerons les sections de la pièce aux extrémités, où le flambage n'est pas à craindre, par la formule $\Omega = N : R$; mais pour tenir

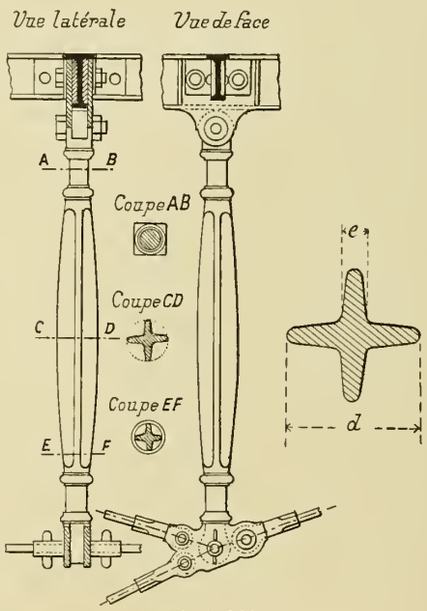


Fig. 352 bis

compte de l'excentricité possible du point d'application de la charge, nous prendrons seulement 0,8R comme résistance de sécurité.

Nous aurons donc $\Omega = \frac{3600}{0,8 \times 8} = 562,5^{mm2}$ correspondant à un diamètre de 27^{mm}.

Mais ce diamètre sera augmenté pour des raisons de construction et d'ajustage.

II. *Section au milieu.* — Pour calculer cette section nous nous servirons de l'abaque n° 7 des pièces aboutées (page 274), après avoir calculé les modules du type adopté, s'il ne se trouve pas dans le tableau donné à la page 272.

Nous prendrons une section en croix de largeur d, avec des épaisseurs d'ailes $e = 1/6d$; nous avons alors obtenu :

$\Omega = md^2 = 0,3055d^2$ | $r^2 = Kd^2 = 0,0465d^2$ | $K' = m : K = 6,4444$.

Calculons $N : K'l^2$ en prenant pour la longueur de sinuosité l, la longueur même de la bielle c'est-à-dire 2^m, puisque nous ne supposons pas qu'il y ait encastrement aux extrémités. Nous avons, dès lors,

$$\frac{N}{K'l^2} = \frac{3600}{6,4444 \times 4} = 140.$$

Sur l'abaque n° 7 dit : *abaque des matériaux* (page 274), menons la radiante 140 qui rencontre la courbe *fonte* en un point qui nous donne pour la résistance de sécurité à adopter : $R' = 1^k,9$.

Nous aurons alors

$$d = \sqrt{\frac{N}{mR'}} = \sqrt{\frac{3600}{0,3055 \times 1,9}} = 79^{mm}.$$

Il en résulte $e = 1/6d = 13^{mm},5$.

Passons maintenant au calcul des arbalétriers, mais établisssons, d'abord, la théorie, *approchée*, des pièces à la fois comprimées et fléchies.

372. **Méthode générale pour le calcul des pièces comprimées et fléchies.** — L'arbalétrier est soumis à une compression longitudinale et à une flexion due aux charges normales agissant sur toute sa longueur. La compression tend à produire, dans le sens du plan de la ferme, un flambage d'autant plus accentué que la pièce a déjà pris une flèche sous l'influence des charges qui lui sont normales.

Le flambage, dans le sens perpendiculaire au plan de la ferme, n'est pas à redouter 1° parce que les pannes, assemblées de part et d'autre de l'arbalétrier, produisent sur lui des entretoisements qui réduisent la longueur de sinuosité à des limites où tout danger de flambage est à peu près écarté, 2° Parce que, dans ce sens, les charges normales ne produisent pas de flexion.

La tension unitaire maxima dans l'arbalétrier se composera de la somme des tensions unitaires maxima dues à la flexion et à la compression combinées.

(*a*) **Formule dite : « d'équarrissage complexe ».** — Soit l la longueur d'un tronçon de l'arbalétrier supposé coupé au droit des nœuds : soit b sa hauteur, Ω sa section, I son moment d'inertie ;

Soit M le moment fléchissant maximum auquel il est soumis, N la compression longitudinale ; calculons les tensions :

1° *Tension unitaire* R_1 *due à la flexion.* — Elle a pour valeur

$$R_1 = \frac{Mb}{2I}.$$

2° *Tension unitaire* R_2 *due à la compression.* — Nous la calculerons par la formule de Rankine déjà étudiée (v. n° 336.) Elle a pour valeur

$$R_2 = \frac{N}{0,8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega l^2}{I}\right),$$

dans laquelle nous avons frappé la résistance de sécurité du coefficient 0,8 pour tenir compte de l'excentricité de la charge due à la flexion produite par le moment fléchissant M. (1).

On prendra pour les valeurs du coefficient K et de la résistance de sécurité R

Fer	$K = 0,00012$	et	$R = 6^k$
Acier doux.	$K = 0,00012$	et	$R = 8$ ou 10
Bois	$K = 0,00140$	et	$R = 0^k,6$

Comme nous supposons l'arbalétrier coupé au droit des nœuds, la longueur l de sinuosité sera égale à la longueur vraie du tronçon d'arbalétrier considéré.

La tension unitaire maxima développée dans l'arbalétrier sera la somme des deux tensions R_1 et R_2 trouvée ci-dessus et comme elle ne devra pas dépasser la résistance vraie, R, de sécurité, nous aurons la relation :

$$\text{(A)} \qquad R = \frac{Mb}{2I} + \frac{N}{0,8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega l^2}{I}\right).$$

Posons $l = nb$, cette équation se met sous la forme

$$\text{(A')} \qquad R = \frac{Mb}{2I} + \frac{N}{0,8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega n^2 b^2}{I}\right).$$

Nous donnons à l'une ou à l'autre de ces deux équations le nom de *formule d'équarrissage complexe* parce qu'elle tient

(1) Au n° 336, nous écrivions la formule de Rankine sous la forme

$$R' = \frac{R}{1 + K\left(\frac{l}{r}\right)^2},$$

qui peut s'écrire, en chassant le dénominateur,

$$R = R'\left[1 + K\left(\frac{l}{r}\right)^2\right].$$

Je dis que c'est bien la même formule que celle que nous écrivons ici. En effet, R du n° 336 c'est la résistance *vraie* de sécurité, telle que nous la connaissons c'est-à-dire l'effort unitaire auquel peut être soumis *réellement* la fibre la plus fatiguée. R', du n° 336, c'est la résistance *apparente* de sécurite, obtenue en divisant la charge totale N par la surface totale Ω, comme si le flambage n'était pas à considérer ; on a donc $R' = N : \Omega$. Enfin r du n° 336 c'est le rayon de giration et l'on a $\Omega r^2 = I$. En remplaçant R' et r du n° 336 par ces valeurs et ensuite en introduisant 0,8 de R au lieu de R on retrouvera la formule ci-dessus.

Les valeurs de K et R données ci-dessous sont celles de la ligne D du tableau n° 3 de la page 270.

compte à la fois de la compression avec flambage et de la flexion.

S'il fallait vérifier un arbalétrier de dimensions connues, il suffirait d'appliquer l'une de ces deux formules.

(*b*) **Marche à suivre dans un projet.** — Mais dans un projet, les dimensions sont inconnues ; pour les calculer, nous proposerons d'opérer de la manière suivante, l'arbalétrier pouvant être soit en bois soit en fer.

I. *Arbalétrier en bois.* — La section étant rectangulaire, nous avons :

$$\Omega = ab \qquad \text{et} \qquad I = \frac{ab^3}{12}.$$

La formule d'équarrissage complexe (A') devient alors :

$$R = \frac{6M}{ab^2} + \frac{N}{ab}\left(\frac{1+12Kn^2}{0,8}\right).$$

En général on se donne la hauteur d'équarrissage b, de sorte que l'inconnue est la largeur a; en résolvant l'équation précédente par rapport à a, on obtient :

$$a = \frac{6M}{Rb^2} + \frac{N}{b}\left(\frac{1+12Kn^2}{0,8R}\right).$$

Dans cette formule a et b doivent être exprimées en prenant le mètre pour unité, et R est la résistance de sécurité du bois rapportée au mètre carré, c'est-à-dire 600.000 k. Mais l'usage est de calculer les équarrissages de bois en centimètres; si donc on veut obtenir a en centimètres on évaluera aussi b en centimètres, ce qui reviendra à remplacer dans la formule précédente a par 100 a, b par 100 b, b^2 par 10.000 b^2 et à faire R = 60 k au lieu de 600.000 k.; après simplifications, on obtiendra la formule

$$a = \frac{10M}{b^2} + \frac{N}{b}\left(\frac{1+12Kn^2}{48}\right).$$

Posons $\frac{1+12Kn^2}{48} = \varphi$, elle devient

(B) $$a = \frac{10M}{b^2} + \frac{N}{b}\varphi.$$

Le coefficient φ est un peu long à calculer, c'est pourquoi (fig. 353) l'abaque n° 10, ci-contre, en donne graphiquement la valeur pour des valeurs de $n = (l : b)$ comprises entre 5 et 27.

II. *Arbalétrier en fer composite.* — On se donnera aussi, arbitrairement, la hauteur b du fer composite et la méthode, qui n'est d'ailleurs qu'approximative, consistera à calculer la section Ω' de chacune des tables, en négligeant l'âme; après quoi, on composera cette table avec des cornières, des semelles et la portion d'âme emprisonnée entre les cornières, de manière à réaliser cette surface Ω'. Enfin, à titre de vérification, on calculera exactement, cette fois, le moment d'inertie de la poutre ainsi faite ainsi que sa surface de section ; puis on substituera ces valeurs dans la formule d'équarrissage complexe A, et on vérifiera si la valeur de R à laquelle elle conduit ne s'éloigne pas trop de la résistance de sécurité admise.

Abaque N° 10

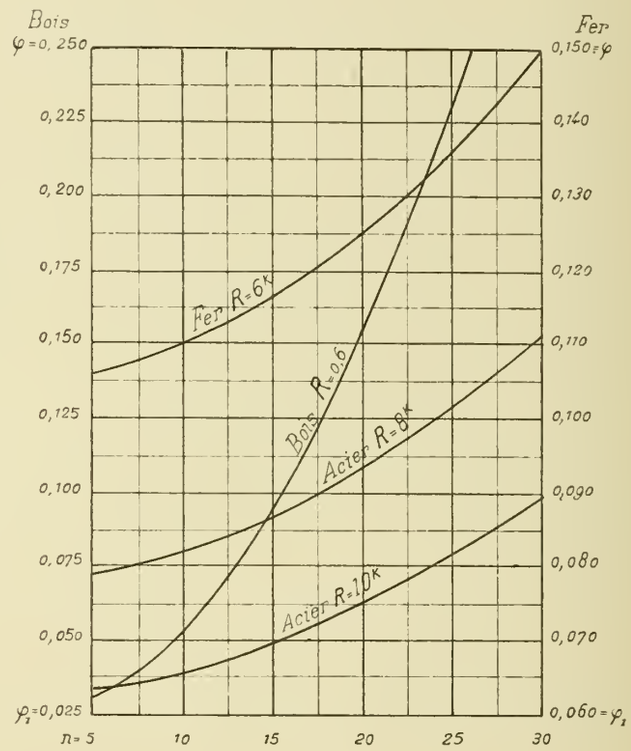


Fig 353

Soit Ω la section totale des deux tables et Ω' la section de l'une d'elles, on aura

$$\Omega = 2\Omega' \qquad \text{et approximativement} \qquad I = \frac{\Omega' b^2}{2}.$$

La formule d'équarrissage complexe A' devient, en y substituant ces valeurs,

$$R = \frac{M}{\Omega' b} + \frac{N}{\Omega'}\left(\frac{1+4Kn^2}{1.6}\right), \qquad \text{d'où}$$

$$\Omega' = \frac{M}{bR} + \frac{N(1+4Kn^2}{1.6.R}.$$

Dans cette formule b est à évaluer en mètres. Ω' en mètres carrés et R est la résistance de sécurité rapportée au mètre carré.

Mais il est dans les usages de calculer les sections de fers composites en prenant pour unité le millimètre; si nous voulons donc que Ω' soit donnée en mm^2, il faudra dans la formule précédente remplacer b par 1000 b, et prendre pour R une valeur un million de fois plus petite, c'est-à-dire prendre R égal à 6 k. pour le fer, et à 8 ou 10 k. pour l'acier. La formule devient alors :

$$\Omega' = \frac{1000M}{bR} + N\,\frac{1+4Kn^2}{1.6.R}.$$

Posons $\varphi = \frac{1 + 4Kn^2}{1.6.R}$, la formule devient

$$\text{(C)} \qquad \Omega' = \frac{1000M}{bR} + N\varphi.$$

Il est bien entendu, dans cette formule (C), que Ω' sera donnée en mm^2, que b doit être évalué en millimètres et que R est la résistance de sécurité (6, 8 ou 10 k.) par mm^2.

Le coefficient φ sera fourni graphiquement par l'abaque n° 10, pour des valeurs de n comprises entre 5 et 30 et une courbe spéciale répond à chacune des valeurs de R égale à 6, 8 ou 10 k.

Nous composerons une table de fer au moyen de deux cornières et d'une semelle de manière à obtenir la section Ω', qui vient d'être trouvée par cette formule (C), mais qui, en réalité, n'est qu'une première approximation. Nous calculerons ensuite la section complète Ω et le moment d'inertie exact I de la poutre composite qui en résultera. Nous porterons ensuite ces valeurs dans la formule (A) qui est :

$$R = \frac{Mb}{2I} + \frac{N}{0{,}8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega l^2}{I}\right).$$

Si la valeur ainsi trouvée pour R est très voisine de la résistance de sécurité par millimètre carré que nous avons admise, la composition de la poutre sera bonne; si elle en diffère notablement, en plus ou en moins, il faudra augmenter ou diminuer légèrement les dimensions des éléments (âme, semelles, cornières) de la poutre; c'est à quoi l'on arrivera le plus simplement en modifiant l'épaisseur des semelles sans toucher aux autres éléments. Comment faire cette modification?

Nous proposons, afin d'éviter des tâtonnements trop nombreux, pour ce calcul des semelles à modifier, d'opérer de la manière suivante :

Soit e_1 l'épaisseur de semelle qui a fourni une résistance R, que nous supposons, pour fixer les idées, trop faible, ce qui prouve que e_1 est trop fort. Nous prendrons une épaisseur e_2 plus petite que e_1 et nous calculerons la valeur correspondante de la résistance R_2; laquelle sera, évidemment, plus grande que R_1 déjà trouvée; nous ferons la même chose pour une troisième valeur e_3, conduisant à une autre résistance R_3.

Nous construirons (fig. 354) une courbe d'erreur ayant pour abcisses les épaisseurs de semelle e_1, e_2 et e_3 et pour ordonnées les valeurs correspondantes R_1, R_2 et R_3; en menant à l'axe des x une parallèle à une distance égale à la résistance de sécurité admise R, l'abcisse du point de rencontre de cette droite avec la courbe nous donnera une valeur très approchée de l'épaisseur e qui conviendra.

Nota. — On pourrait, pour aller plus vite, ne calculer que la valeur R_2 correspondante à e_2 et supposer que la courbe d'erreur est une ligne droite.

Dans le cas où l'on voudrait employer un fer du commerce, on le calculerait au moyen d'un abaque spécial comme nous le verrons à la fin de ce paragraphe.

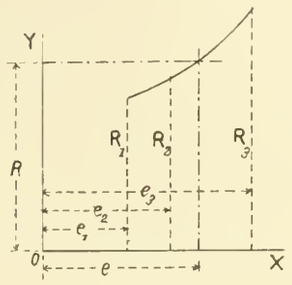


Fig. 354

373. **Applications à l'arbalétrier de la ferme.** — Nous supposerons d'abord que cet arbalétrier est à section constante; nous calculerons alors le tronçon 1, 2, le plus fatigué, celui pour lequel la compression longitudinale est de 13.950 k.

La portée de chacun des tronçons est $l = 5^m{,}875$; ils sont également chargés normalement. Nous allons d'abord calculer le moment fléchissant maximum dû aux charges normales. — On se souvient que nous avons laissé cette question en suspens.

(*a*) **Calcul du moment fléchissant.** — Remarquons que si une pièce oblique AB est soumise à des forces normales telles que N, le funiculaire des moments construit sur AB comme base, donnera en chaque point le même moment qu'un second funiculaire construit sur la projection Ab de AB en prenant des forces verticales P dont les forces N seraient les composantes suivant une direction normale à AB (fig. 355).

En effet, le moment fléchissant dans une section C de la pièce AB est égal au moment, par rapport à ce point, de la résultante R des forces situées à gauche de la section C; si cette résultante est appliquée en D, le moment a pour valeur R × CD.

Le point C est projeté en c, le point D, en d; la force verticale V dont R serait la composante normale, est appliquée en d, et donne pour le moment par rapport au point c la valeur V × cd.

Mais à cause de la similitude des triangles CDD′ et DMK, on a

$$\frac{V}{CD} = \frac{R}{CD'}$$

et puisque CD′ = cd, on en tire

$$V \times cd = R \times CD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous pourrons donc construire le funiculaire sur la projection Ab en employant les forces P.

Nous avons tracé sur la figure 352-III, la force verticale de 4550^k qui aurait l'action normale du vent pour composante ; en y ajoutant la charge verticale d'un égout, qui

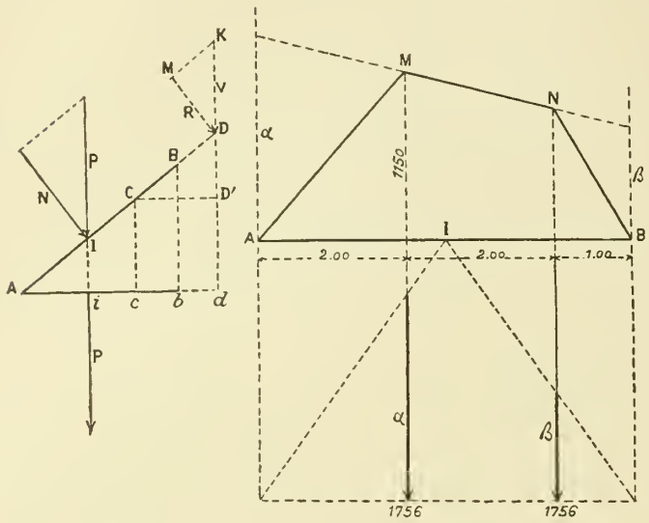


Fig. 355 Fig. 356

est de 4230^k, nous avons sur l'égout de gauche la force totale de 8780^k. Il en résulte pour chaque panne

$$8780 : 5 = 1756^k.$$

La projection du tronçon d'arbalétrier a 5^m de long ; les forces de 1756^k y sont appliquées et donnent un funiculaire Collignon (fig. 356), dont l'ordonnée maxima, mesurée à l'échelle des forces, est de 1150^k, ce qui donne (avec la distance polaire de $2^m,50$) pour moment maximum $1150 \times 2,50 = 2875^{km}$.

Nota. — Le funiculaire $\alpha\beta$ (fig. 352-I) donnerait aussi ce moment par le trapèze 1-2-3, dont la base est la droite I, ou $\alpha\delta$, en opérant comme suit :

1° On mesure, en kilos, son ordonnée maxima (550 k.) ;

2° on mesure, en mètres (fig. II), la distance du pôle O au côté *be* (5,20) ;

3° le produit $550 \times 5,20 = 2860^{km}$, au lieu de 2875.

(*b*) **Calcul d'un arbalétrier en bois.** — On a trouvé

$$M = 2875^{km} \quad | \quad N = 13950 \quad | \quad l = 5^m,875;$$

prenons arbitrairement, en *centimètres*, $b = 50^{cm}$. Il en résulte $n = (l : b) = (5,875 : 0,50) = 11,75$.

L'abaque n° 10 (page 314) nous donne, en y prenant la courbe des bois : $\varphi = 0,065$ et par suite, en appliquant la formule (B)

$$a = \frac{28750}{2500} + \frac{13950 \times 0,065}{50} = 11^{cm},5 + 18^{cm},1 = 29^{cm},6.$$

Forçons et prenons $a = 30^{cm}$ $b = 50^{cm}$; c'est exagéré pour du bois ; c'est pourquoi le fer s'impose.

(*c*) **Calcul d'un arbalétrier en fer composite.** — Nous prenons arbitrairement pour la hauteur de cet arbalétrier $b = 0^m,400$, ce qui donne

$$n = \frac{l}{b} = \frac{5,875}{0,400} = 14,7.$$

Nous trouvons sur l'abaque n° 10 pour la courbe fer ($R = 6^k$) la valeur $\varphi = 0,116$ correspondant à $n = 14,7$. En appliquant la formule (C)

$$\text{(C)} \qquad \Omega' = \frac{1000M}{bR} + N\varphi,$$

nous aurons en y faisant $R = b$,

$$\Omega' = \frac{1000 \times 2875}{6 \times 400} + 13950 \times 0,116, \qquad \text{ou}$$

$$\Omega' = 1198 + 1618 = 2816^{mm^2}.$$

Nous obtiendrons cette surface Ω' au moyen de deux cornières de 65 sur 65 sur 7^{mm}, une semelle de 150^{mm} sur 5^{mm}, une âme de 5^{mm} (fig. 357). Nous avons ainsi :

$$\Omega' = 2(58 + 65)7 + 150 \times 5 + 65 \times 5$$

ou $$\Omega' = 1722 + 750 + 325 = 2797^{mm^2},$$

c'est-à-dire à très peu près 2816^{mm^2}.

Vérification. — Il en résulte $\Omega = 2\Omega' + 260 \times 5 = 6894$.

$$I = \frac{0,150 \times 0,\overline{400}^3 - 0,015 \times 0,\overline{390}^3 - 0,116 \times 0,\overline{376}^3 - 0,014 \times 0,\overline{260}^3}{12}$$

$$I = 0,00018706.$$

Portons ces valeurs dans la formule (A)

$$R = \frac{Mb}{2I} + \frac{N}{0,8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega l^2}{I}\right),$$

il vient, en faisant $K = 0,00012$ (v. 372-*a*).

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2875 \times 0,2}{0,00018706} \\ + \dfrac{13950}{0,8 \times 0,006894}\left(1 + \dfrac{0,00012 \times 5,\overline{875}^2 \times 0,006894}{0,00018706}\right) \end{array} \right.$$

ou $$R = 3073880 + 2915450$$

ou $$R = 5989330,$$

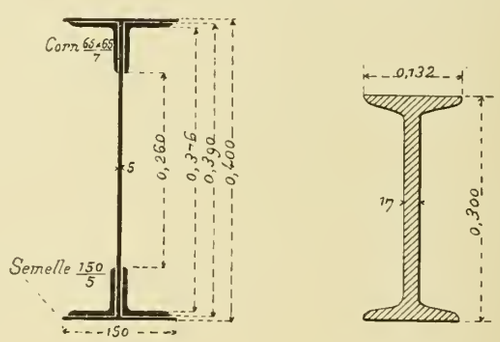


Fig. 357 Fig. 357 bis

valeur assez rapprochée de 6 000000 ; la composition de la poutre peut donc être admise comme bonne.

Cette poutre pèse, par mètre courant (7800 étant le poids spécifique du fer)

$$0,006894 \times 7800 = 53^k,775.$$

374. Calcul d'un arbalétrier en fer double T du commerce.

(*a*) **Etablissement d'un abaque.** — La formule approximative, lorsqu'on essaie de l'appliquer à la recherche d'un fer laminé du commerce, donne un moment d'inertie trop grand et une section trop petite ; ce qui tient à ce qu'on n'y a fait entrer que la surface des tables, en négligeant l'âme, et que, dans les fers laminés, cette âme n'est pas du tout négligeable. Elle conduit encore à des tâtonnements et à des calculs pénibles que nous proposons de simplifier par l'emploi d'un abaque spécial, dont nous donnons ci-dessous la construction et l'usage.

La formule exacte à employer est (v. n° 372-*a*) :

$$\text{(A)} \qquad R = \frac{Mb}{2I} + \frac{N}{0{,}8\Omega}\left(1 + \frac{K\Omega l^2}{I}\right).$$

De nombreuses constatations nous ont prouvé que le terme $K\Omega l^2 : I$ a une valeur qui, en général, diffère assez peu de 0,15, nous adopterons donc cette valeur pour un premier essai.

De plus, les albums de forges ne donnent pas les surfaces des sections mais les poids des fers par mètre courant : soit p ce poids et soit 7800 la densité du fer, on aura

$$\Omega = p : 7800.$$

Ils donnent aussi $I : v$ et non pas I.

Introduisons ces valeurs dans la formule (A) et remarquons de $v = b/2$, elle devient

$$R = \frac{M}{I : v} + \frac{N \times 1{,}15 \times 7800}{0{,}8p} \qquad \text{ou}$$

$$\text{(A'')} \qquad R = \frac{M}{I : v} + \frac{N \times 11212{,}5}{p}$$

et puisque nous voulons que $R = 6^k$ par ^{mm2}, c'est-à-dire, par mètre carré 6×10^6, nous pouvons écrire

$$\frac{M}{6(I : v) \times 10^6} + \frac{N}{\dfrac{p \times 6 \times 10^6}{11212{,}5}} = 1.$$

Posons $M = x$ et $N = y$, nous voyons que cette équation représente une droite ayant pour abscisse à l'origine $6(I : v) \times 10^6$, et pour ordonnée à l'origine

$$\frac{p \times 6 \times 10^6}{11212{,}5}.$$

A chaque fer correspondra une droite ainsi déterminée ; l'abaque n° **11** donne les droites répondant aux divers types de fers en double T des forges de la Providence ; cet abaque est divisé en deux parties, l'une pour les fers ordinaires, l'autre pour les fers à larges ailes.

Les forges construisent pour chaque hauteur de fer un type à âme mince dit à *minimum* et un type à *maximum* c'est-à-dire à âme épaisse ; la droite répondant au premier est en trait fin ; celle qui répond au second, est en gros trait (fig. 358).

Mais ces mêmes forges peuvent, en écartant plus ou moins les axes des cylindres de laminoirs, nous fournir toutes les épaisseurs d'âme comprises entre le fer à type *minimum* et le fer à type *maximum*.

Pour les épaisseurs d'âme donnant ces types intermédiaires, l'augmentation de poids et l'augmentation de $(I : v)$ sont proportionnelles à l'augmentation d'épaisseur de l'âme. Nous donnons en pointillé, pour les types de fer les plus hauts, les droites répondant aux épaisseurs variables de l'âme de millimètre en millimètre.

On pourrait construire un abaque analogue pour les fers provenant des autres forges.

(*b*) **Emploi de l'abaque n° 11.** — Voici comment on se servira de cet abaque :

Soit à calculer l'arbalétrier de la ferme Polonceau étudiée plus haut.

Nous avons $M = 2875$. $N = 13590$.

Nous prenons sur l'axe horizontal $M = 2875$ et nous suivons la verticale de ce point jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale menée par le point $N = 13950$ pris sur l'axe vertical.

Sur l'abaque des fers ordinaires, la rencontre a lieu dans la région répondant au fer dont la hauteur est $b = 0^m{,}300$, et entre les lignes pointillées correspondant aux épaisseurs d'âme de 16^{mm} et de 17^{mm}.

Nous prendrons 17^{mm} pour cette épaisseur. Le fer proposé aurait donc comme dimensions

$$b = 0^m{,}300, \qquad a' = 0^m{,}132, \qquad e = 0^m{,}17.$$

Il faut le vérifier.

(*c*) **Vérification du fer trouvé au moyen de l'abaque.** — Pour vérifier ce fer, reprenons la formule exacte (A) mais transformée en y faisant entrer les valeurs de $I : v$ et de p,

On y fera $K = 0{,}00012$ (v. 372-*a*),

$$b = 2v, \qquad \text{et} \qquad \Omega = p : 7800.$$

Elle se présente alors sous la forme

$$\text{(A''')} \quad R = \frac{M}{I : v} + \frac{9750N}{p}\left[1 + \frac{pl^2}{325b \times 10^5 \times (I : v)}\right].$$

Calculons d'abord le poids et le $(I : v)$ du fer obtenu.

Pour le fer *à maxima* de 0,300 de hauteur l'album des forges nous donne, en prenant le mètre pour unité :

Epaisseur de l'âme, $0^m{,}020$.

$$I : v = 0{,}000835814 \qquad \text{et} \qquad p = 78^k.$$

Pour le fer à âme mince, c'est-à-dire *à minima* :

Epaisseur de l'âme, $0^m{,}010$.

$$I' : v = 0{,}000785814 \qquad \text{et} \qquad p' = 54^k{,}5.$$

Les différences sont

$(I : v) - (I' : v) = 0,00005$ et $p - p' = 23^k,5$.

Pour avoir la valeur de $(I : v)$ du fer de 0,017 d'épaisseur d'âme, nous devrons ajouter à la valeur $(I' : v)$ donnée pour le fer à âme mince les 0,7 de la différence $(I : v) - (I' : v)$, soit $0,00005 \times 0,7 = 0,000035$, ce qui donne

$$I : v = 0,000785814 + 0,000035 = 0,000820814.$$

De même pour le poids on ajoutera à p' les 0,7 de la différence $p - p'$ soit $23,5 \times 0,7 = 16,45$, ce qui donne

$$p = 54,5 + 16,45 = 70^k,95.$$

Nous prenons les 0,7 de ces différences parce que, le fer minimum ayant 10^{mm} d'épaisseur d'âme, le maximum ayant 20^{mm} et le fer choisi ayant 17^{mm}, cela représente les

Abaque N° 11.

FORGES DE LA PROVIDENCE

Fers ordinaires. *Fers à larges ailes.*

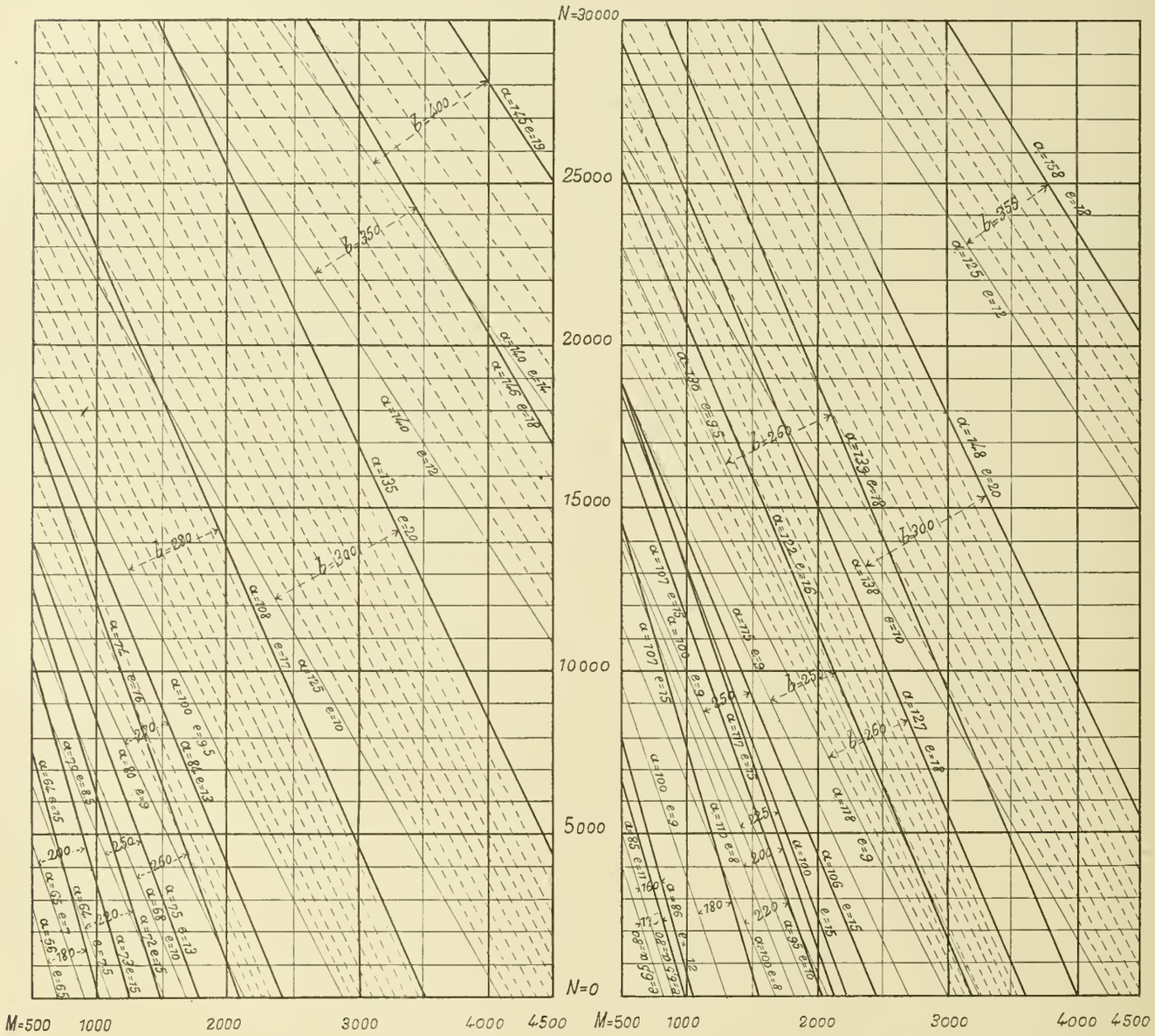


Fig. 358

0,7 de la différence et que rien n'étant changé aux épaisseurs d'ailes les poids aussi bien que les moments de résistance $(I : v)$ varient dans le même rapport, 0,7.

Portons ces valeurs dans la formule, il vient :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2875}{0{,}000820814} \\ + \dfrac{9750 \times 13950}{70{,}95} \left(1 + \dfrac{70{,}95 \times \overline{5{,}875}^2}{325 \times 0{,}30 \times 0{,}000820814 \times 10^5} \right). \end{array} \right.$$

La parenthèse prend la valeur $(1 + 0{,}306)$ et l'on a en effectuant les calculs :

$$R = 3502000 + 2503000 = 6005000;$$

valeur acceptable, car elle diffère très peu de 6000000; par suite le fer trouvé est bon.

Nous aurions pu prendre un fer à larges ailes dont les dimensions auraient été trouvées d'une manière analogue.

Remarque I. — Si le fer trouvé au moyen de l'abaque donnait une valeur de R trop différente de 6 k., on augmenterait ou on diminuerait de 1^{mm}, puis de 2 si c'était nécessaire l'épaisseur trouvée pour l'âme, et on referait la vérification ci-dessus avec la nouvelle valeur adoptée.

Remarque II. — Si nous voulons employer un fer laminé, nous trouvons qu'il pèse $70^k,95$ par mètre, tandis que le fer composite que nous avions choisi ne pesait que $53^k,775$.

Ici, comme dans le cas des poutres de planchers, il y aura en général intérêt à employer des fers composites de préférence aux fers laminés.

§ 9. — Pièces secondaires des combles en fer

375. Pannes en fer. — Théorie des pièces déversées. — (*a*) **Préliminaires.** — Nous avons fait, au début de l'étude des combles, la convention que les pannes étaient coupées au droit des fermes; nous calculerons donc ces pannes comme des pièces appuyées à leurs extrémités et supportant une charge uniformément répartie.

Dans les fermes en fer, l'espacement des fermes pouvant être assez considérable, les pannes deviennent des pièces fort importantes. Elles sont alors constituées par des fers double T assemblés à leurs deux extrémités sur les arbalétriers.

La panne peut être posée sur l'arbalétrier comme dans les fermes en bois; mais cette disposition n'est pas à recommander et on préfère l'assembler sur l'âme de l'arbalétrier (fig. 359). On ne tient pas compte, néanmoins, dans le calcul, de l'encastrement plus ou moins complet que produit ce mode d'assemblage.

Le fer est quelquefois placé de manière que son axe soit vertical; on doit alors fixer à sa partie supérieure une fourrure en bois sur laquelle seront cloués les chevrons (fig. 359-I).

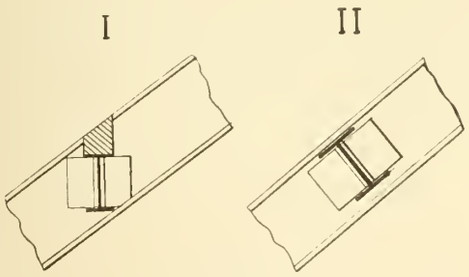


Fig. 359

Le plus ordinairement, l'axe du fer est perpendiculaire au rampant du comble, et il faut alors calculer la panne comme *pièce déversée* (fig. 359-II).

Nous démontrerons d'abord le théorème général suivant :

(*b*) **Théorème général des pièces déversées** (fig. 360). — *Enoncé.* — « Lorsqu'une pièce horizontale, reposant sur « deux appuis de niveau, est soumise à un couple ou mo- « ment fléchissant dont le plan a pour trace sur la section « droite de la pièce une ligne droite ON, ne se confondant « pas avec un des axes principaux d'inertie, l'effort unitaire « maximum p développé dans la section est inversement « proportionnel au segment $Of = \lambda$ intercepté sur cette « trace, entre le centre O de l'ellipse d'inertie et la droite « $\alpha'\beta'$ antipolaire, par rapport à l'ellipse d'inertie, du point P « du contour de la section qui est le plus éloigné de l'axe « de flexion OM, ou, plus simplement :

La résistance de la pièce est proportionnelle au plus petit des deux rayons vecteurs interceptés dans le noyau central par la trace du plan du couple de flexion.

Démonstration. — Soient OX et OY (fig. 360) les axes principaux d'inertie de la section, I_x et I_y les moments d'inertie par rapport à ces axes; soient aussi a' et b' les demi-axes de l'ellipse d'inertie, nous avons :

$$I_y = \Omega a'^2 \qquad \text{et} \qquad I_x = \Omega b'^2.$$

Soit γ l'angle que fait la droite ON, trace du plan du couple fléchissant, avec l'axe OX; l'axe de flexion est OM, conjugué du diamètre ON dans l'ellipse d'inertie (v. n° 140-*c*). La fibre la plus fatiguée se trouve au point P pour lequel la tangente au contour de la section est parallèle à l'axe OM de flexion. Soient v et v_1 les coordonnées de ce point P par rapport aux axes OX et OY.

L'axe du couple fléchissant est $O\mu = M$ perpendiculaire à ON; on peut le décomposer en deux axes de couples $O\mu_x$ et $O\mu_y$ dirigés suivant les axes OX et OY; ces axes de couples ont pour valeurs

$$O\mu_x = M_x = M \sin \gamma \qquad \text{et}$$
$$O\mu_y = M_y = M \cos \gamma.$$

Le premier détermine autour de l'axe OX un infléchissement donnant lieu à un effort unitaire au point P dont la valeur p' est :

$$p' = \frac{M_x}{I_x : v} = \frac{Mv \sin \gamma}{\Omega b'^2}.$$

L'autre détermine autour de OY un infléchissement donnant pour le point P un effort unitaire p'' qui a pour expression

$$p'' = \frac{M_y}{I_y : v_1} = \frac{Mv_1 \cos \gamma}{\Omega a'^2}.$$

Soit p l'effort unitaire total développé au point P; il est égal à la somme des efforts p' et p''; on a donc :

$$(1) \qquad p = p' + p'' = \frac{M}{\Omega}\left(\frac{v \sin \gamma}{b'^2} + \frac{v_1 \cos \gamma}{a'^2}\right).$$

Soient α et β les pôles, par rapport à l'ellipse d'inertie, des droites PR et PS, la droite $\alpha\beta$ est la polaire du point P par

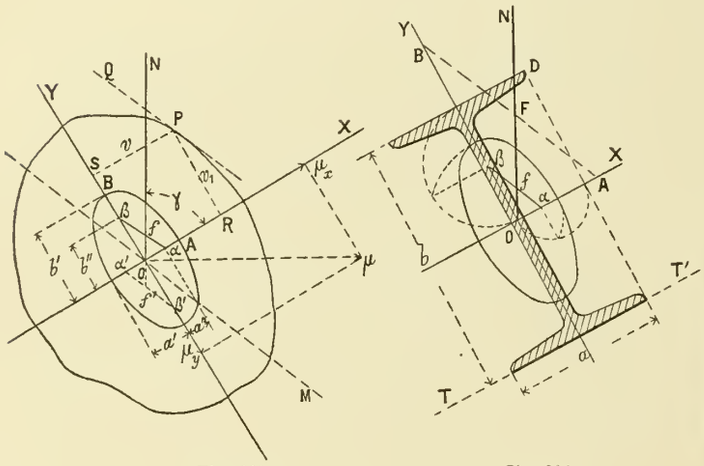


Fig. 360 Fig. 361

rapport à cette ellipse, et si l'on appelle a'' et b'' les distances $O\alpha$ et $O\beta$, on a (v. Compl^t. la théorie des polaires) :

$$a'' = \frac{a'^2}{v_1} \qquad \text{et} \qquad b'' = \frac{b'^2}{v}. \qquad \text{Donc,}$$

$$(1') \qquad p = \frac{M}{\Omega}\left(\frac{\sin \gamma}{b''} + \frac{\cos \gamma}{a''}\right), \qquad \text{cela posé :}$$

Prenons sur OM une longueur $Of = \lambda$ telle que

$$(2) \qquad p = \frac{M}{\Omega} \times \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{il en résultera :}$$

$$(2') \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\sin \gamma}{b''} + \frac{\cos \gamma}{a''}.$$

Cette relation montre que le point f est sur la droite $\alpha\beta$ (1).

La première forme de l'énoncé du théorème est donc démontrée. Je dis que la seconde l'est aussi. En effet :

Le point α étant le pôle de la ligne PR et β celui de la ligne PS, il en résulte que la droite $\alpha\beta$ est la polaire du point P; la droite qui lui est symétrique $\alpha'\beta'$ est donc l'antipolaire de ce même point P et le point f' symétrique de f, situé sur cette antipolaire, est, par conséquent, l'antipôle de la tangente PQ menée au contour de la section et conjuguée, en direction, à la droite Nff'.

Le point f' est donc bien le point du noyau central situé sur la trace NO du plan du couple. Ainsi donc l'effort unitaire p de la fibre dangereuse est inversement proportionnel à Of ou à son égal Of'; comme, d'autre part, si l'on s'impose que cet effort unitaire soit égal à la résistance de sécurité R, la pièce pourra résister à un moment fléchissant d'autant plus grand que cet effort unitaire sera plus petit. Nous pouvons donc dire que :

La résistance d'une pièce déversée est proportionnelle au plus petit rayon vecteur Of', intercepté dans son noyau central par la trace du plan du couple fléchissant. C.Q.F.D.

Nota. — Pour les sections qui sont symétriques par rapport à leur centre de gravité O, le noyau central est, lui aussi, symétrique, et l'on peut prendre le rayon vecteur Of au lieu de son prolongement Of'.

Tel sera le cas des fers en double T, mais ce ne sera pas celui des fers en U ni des cornières.

376. **Calcul de vérification d'une panne en fer double T laminée ou composite** (fig. 301). — (*a*) **Marche à suivre** — Dans le cas d'une panne double T, la fibre la plus fatiguée est toujours la fibre extrême D, située à l'angle de l'une quelconque des ailes. Pour ce point D, les distances v_1 et v du cas général précédent sont $v = 1/2a$ et $v_1 = 1/2b$ et les coordonnées a'' et b'' des points α et β qui sont les extrémités de la droite représentative de la résistance de la pièce, ont pour expression

$$a'' = \frac{I_y}{v_1 \Omega} \qquad \text{et} \qquad b'' = \frac{I_x}{v\Omega}.$$

Ces points sont les sommets du noyau central et, de même que pour les pannes en bois à section rectangulaire, la droite représentative $\alpha\beta$ est un des côtés du noyau central.

Pour vérifier une panne inclinée en fer double T, on peut donc procéder comme suit :

1° On dessine (fig. 361) cette panne à aussi grande échelle que possible, en la faisant reposer sur le rampant du toit TT'; on détermine les points α et β extrémités de son noyau central, et l'on joint α et β par une droite.

2° On mène par le centre une droite ON parallèle aux charges (cette droite est inclinée si l'on tient compte du vent; elle est verticale dans le cas contraire), et l'on mesure la longueur $Of = \lambda$ comprise entre le centre O et la droite $\alpha\beta$.

3° En vertu de l'équation (2) du cas général précédent, laquelle peut s'écrire $(1')p\Omega\lambda = M$, on fait le produit $R\Omega\lambda$,

(1) Cela résulte de ce que l'équation de la droite $\alpha\beta$ est, en géométrie analytique :

$$(3) \qquad \frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} = 1. \qquad \text{Or on a :}$$

$$x = \lambda \cos \gamma \qquad \text{et} \qquad y = \lambda \sin \gamma.$$

Substituant ces valeurs dans (3), on retrouve précisément la relation (2).

R étant la résistance de sécurité adoptée, et ce produit doit donner le moment fléchissant M.

Si on trouve un nombre trop petit ou un nombre trop fort c'est que le fer sera trop faible ou trop fort, et on corrige comme nous le disons ci-après, à (*d*).

(*b*) **Noyau central d'un fer double T.** — Les dimensions a'' et b'' du noyau central sont faciles à déterminer lorsque les albums de forges donnent les deux moments de résistance, savoir : le $(I_x : v_1)$ du fer sur champ et le $(I_y : v)$ du fer à plat, et s'ils y joignent le poids par mètre.

En effet, en divisant le poids donné en kilos par 7800 k., qui est le poids de 1^{m3} de fer, on aura la surface Ω, rapportée au mètre carré. Dès lors, en divisant les moments de résistance par cette surface Ω, on aura les longueurs a'' et b''.

(*c*) **Noyau central amplifié.** — On peut se passer de faire ce calcul de Ω. En effet, au lieu de prendre

$$O\alpha = a'' = \frac{I_y}{v\Omega} \qquad \text{et} \qquad O\beta = b'' = \frac{I_x}{v_1\Omega},$$

cherchons simplement les moments de résistance $I_y : v$ et $I_x : v_1$ donnés par les albums de forge, et, *à une échelle métrique quelconque*, prenons (fig. 361) OA et OB égaux à ces nombres; joignons AB; prenons la longueur OF, interceptée par O*f* prolongée, et appelons λ_1 cette longueur OF; il est évident que de même qu'on a $OA = O\alpha \times \Omega$, et $OB = O\beta \times \Omega$, on aura aussi

$$\lambda_1 = \lambda \times \Omega.$$

Par conséquent, il sera bien plus simple, au lieu de faire le produit $R\Omega\lambda$, de faire le produit $R\lambda_1$.

Nota. — Nous nommerons AB, pris ainsi au lieu de $\alpha\beta$, le *noyau central amplifié*.

(*d*) **Résumé.** — 1° Supposons que l'on connaisse la forme du noyau central vrai, ce qui est une question de simple géométrie et de tangentes à mener, à l'ellipse d'inertie, par les principaux points du contour de la section.

2° Supposons que l'on connaisse par les albums de forge les deux $I : v$ répondant aux axes principaux d'inertie, ou tout simplement l'un d'eux.

3° On portera cet $I : v$ sur l'axe correspondant et l'on fera passer par l'extrémité de la longueur ainsi portée une courbe homothétique du noyau central, par rapport au centre. Ce sera le *noyau central amplifié*; soit λ_1 un rayon vecteur quelconque de cette courbe.

4° $M = R\lambda_1$ sera le moment fléchissant auquel, avec une résistance de sécurité égale à R, la section pourra résister lorsque le couple de flexion aura pour trace de son plan, sur le plan de la section, la droite λ_1.

377. Calcul d'établissement d'une panne déversée en fer double T laminé. — (*a*) **1re Méthode, par tâtonnements.** — Nous procéderons de la manière suivante :

1° Calculons la valeur de λ_1 correspondant au moment fléchissant M auquel la panne est soumise ; sa valeur est

$$\lambda_1 = M : R.$$

Soient OX et OY les axes principaux d'inertie de la panne, soit OM_1 la trace du plan du couple; portons sur cette droite une longueur $OM = \lambda_1$. (Le lecteur fera facilement la figure nécessaire pour suivre ces explications.)

2° En étudiant les fers laminés à larges ailes, nous avons reconnu que le rapport $\frac{Iy : v}{Ix : v_1}$ varie généralement entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{9}$; le *noyau central amplifié* d'un tel fer sera donc une droite dont la pente par rapport à l'axe OY est comprise entre 1 sur 6 et 1 sur 9. Menons par le point M deux droites inclinées, l'une à 1 sur 6, l'autre à 1 sur 9 sur l'axe OY; elles coupent cet axe aux points P et P'. Les longueurs OP et OP' donnent à l'échelle de λ_1 les valeurs limites du moment de résistance $(I_x : v_1)$ des fers susceptibles de répondre à la question.

3° Cherchons dans une table de fers ceux dont le moment de résistance $(I_x : v_1)$ est compris entre ces limites; traçons le noyau central amplifié de chacun d'eux. Nous prendrons celui pour lequel la valeur de λ_1 sera la plus rapprochée par excès de la valeur OM.

Remarque. — Cette opération revient, en somme, à construire une partie très restreinte de l'abaque dont il sera parlé plus loin. C'est pourquoi nous n'insistons pas davantage sur cette méthode.

(*b*) **2e Méthode, par des abaques.** — Les abaques dessinés ci-après ne sont autre chose que les reproductions des noyaux centraux amplifiés des fers en double T, en U ou en cornières empruntés aux forges de la Providence ; leurs rayons vecteurs reproduisent des valeurs λ_1 telles que nous les avons définies ci-dessus, mais multipliées par la résistance de sécurité $R = 6.000.000^k$.

Or, comme on a $M = R\lambda_1$ les rayons vecteurs de ces abaques donnent donc les moments fléchissants M auxquels, suivant l'inclinaison du couple, c'est-à-dire suivant le déversement de la pièce, cette dernière peut résister.

Ils sont établis pour $R = 6^k$ par mm^2 ; si, pour R, on acceptait 8, 10 ou 12 k., les moments à trouver sur l'abaque, ou à y porter, seraient à augmenter dans la proportion des nombres 8, 10 ou 12, au nombre 6.

Sur ces abaques on distinguera :

1° *Les transversales des fers* répondant aux divers types de fers, et reproduisant une partie de leurs noyaux centraux amplifiés comme il a été dit.

2° Les *courbes des moments*. Elles devraient être des cercles concentriques ayant pour rayons les valeurs des moments fléchissants auxquels peut résister la pièce, suivant son déversement plus ou moins grand ; mais, pour plus

de clarté dans la lecture, nous avons dilaté ces cercles en largeur et ils sont devenus des ellipses. Les droites, dilatées dans le même rapport, sont restées des droites.

3° Les *radiantes de pente* répondant aux diverses pentes de déversement. Ces radiantes divergent de l'origine O.

Sur les abaques n° 12, fers à double T, et n° 13, fers en U, la fibre dangereuse sera toujours, quel que soit l'angle de déversement, située sur l'extrémité extérieure d'une quelconque des ailes ; c'est pourquoi les transversales de ces fers se composent de lignes droites, non brisées.

Abaque N° 12.

FORGES DE LA PROVIDENCE

Fers double T *larges ailes*, **déversés.**

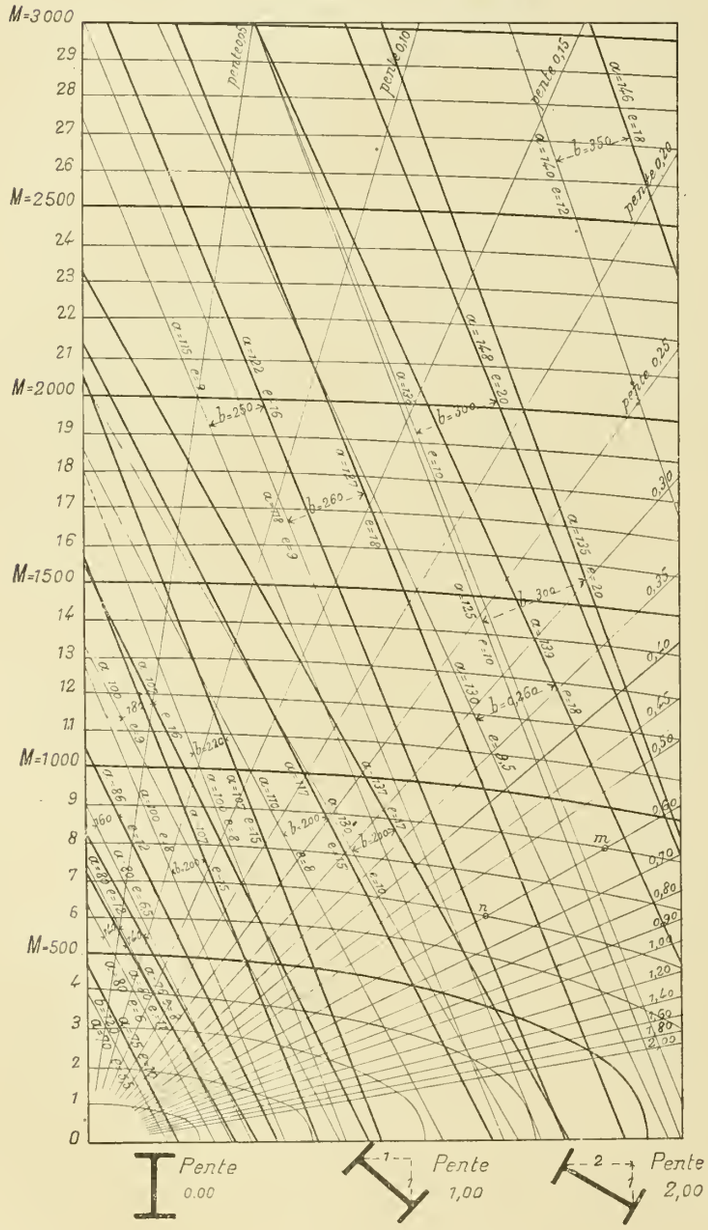


Fig. 362

Abaque N° 13.

FORGES DE LA PROVIDENCE

Fers en U, **déversés.**

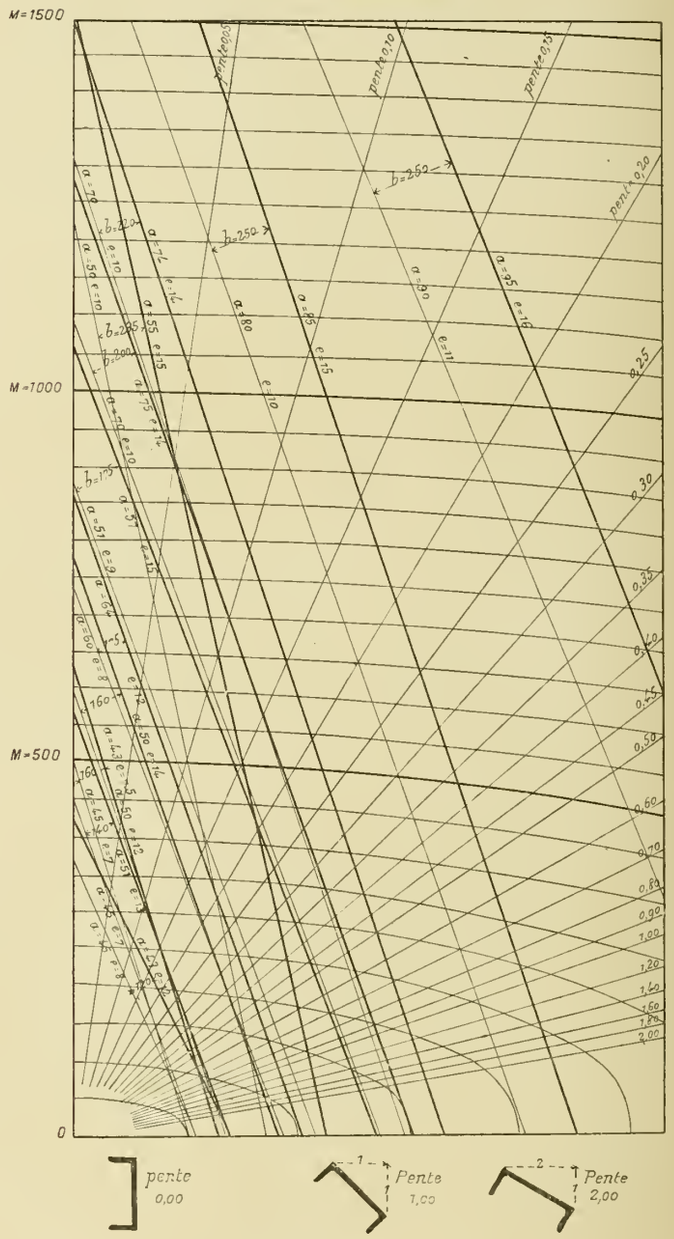


Fig. 363

Pour les cornières à branches égales (abaque n° 14), lorsque la pente est moindre que 1,00, répondant à une inclinaison de 45°, la fibre dangereuse est à l'extrémité de l'aile supérieure ; pour les pentes plus fortes, elle est à l'extrémité de l'aile inférieure : c'est pourquoi les transversales sont brisées sur la radiante répondant à la pente 1,00.

Enfin, pour chaque type de fer, spécifié par sa hauteur d'âme quand il s'agit soit de double T soit de fer en U, ou par sa longueur d'aile quand il s'agit d'une cornière, il y a deux transversales répondant l'une au type à *maximum* (gros trait) et l'autre au même type, à *minimum* (trait fin). De plus, pour les cornières, des traits pointillés répondent aux diverses épaisseurs d'âme intermédiaires.

Abaque N° 14.

Cornières à branches égales, **déversées.**

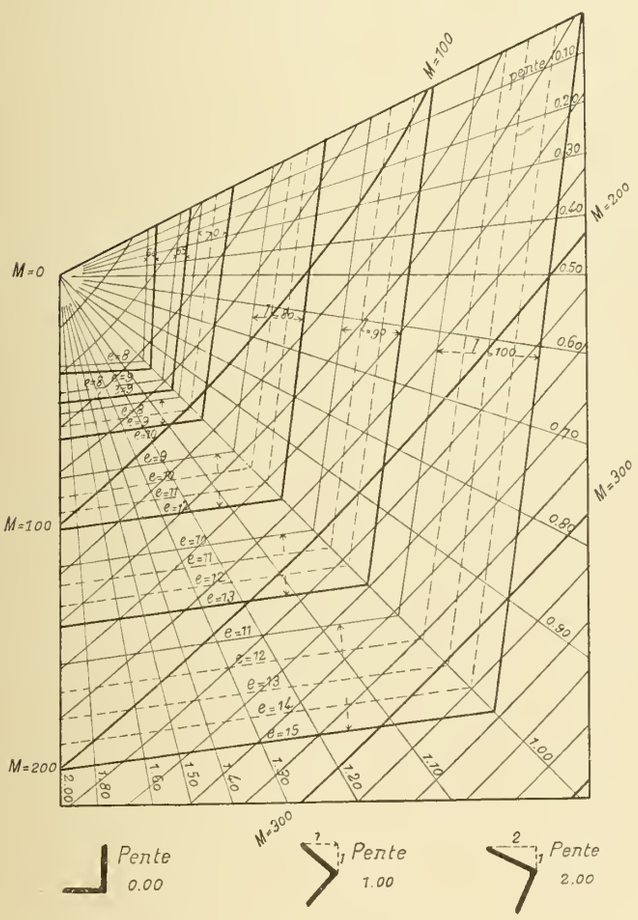


Fig. 364

(*c*) **1re Application.** — Calculer une panne en double T qui serait déversée à la pente de 0,60 (c'est-à-dire posée sur un toit incliné à la pente 0,60) et qui aurait à supporter un moment fléchissant M = 900 km.

Sur l'abaque n° 12 prenons l'*ellipse des moments* marquée 900, et suivons-la jusqu'à sa rencontre en *m* avec la *radiante de pente*, marquée 0,60.

Le point *m*, ainsi obtenu, tombe entre les *transversales* de plusieurs fers entre lesquels on pourra choisir.

Premier fer. — Nous aurions un fer pour lequel :

$$b = 300 \quad | \quad a = 125 \quad | \quad e = \begin{cases} 10, \text{ minimum} \\ 20, \text{ maximum} \end{cases} \text{diff. } 10$$

Et comme *m* partage sensiblement aux 3/10 l'intervalle entre les deux transversales de ce fer, nous augmenterons des 3/10 de la différence, ce qui fera 3 mm., l'épaisseur minima et nous prendrons le fer

$$b = 300 \quad | \quad a = 125 + 3 = 128 \quad | \quad e = 10 + 3 = 13.$$

Autre fer. — *m* tombe aussi entre les lignes d'un fer à larges ailes qui a pour dimensions

$$b = 260 \quad | \quad a = 130 \quad | \quad e = \begin{cases} 9{,}5 \text{ min.} \\ 18{,}0 \text{ max.} \end{cases} \text{diff. } 8{,}5$$

et partage leur intervalle aux 3/4.

On augmentera donc l'épaisseur minima, qui est 9,5, des 3/4 de 8,5, ce qui donnera 6,37, et nous prendrons 6,5 en forçant ; nous aurons donc

$$b = 260 \quad | \quad a = 130 + 6{,}5 = 136{,}5 \quad | \quad e = 9{,}5 + 6{,}5 = 16.$$

(*d*) **2e Application.** — Calculons la panne du comble étudié ci-dessus. Les données sont : longueur 6 m. ; charge uniformément répartie 1550 k. ; moment fléchissant

$$M = 1550 \times 6 : 8 = 1162{,}5 \text{ km.}$$

Pente de déversement, c'est-à-dire pente du toit 0,60 ; on mesure cette pente par le rapport de la hauteur de la ferme à sa demi-portée ; cela donne 6 : 10 = 0,60.

1° *Panne double* T, *en fer.* — Sur l'abaque n° 12 considérons l'ellipse marquée 1162,5 (comprise à vue d'œil entre 1000 et 1200) ; suivons-la jusqu'à la radiante de pente marquée 0,60, et marquons leur point de rencontre.

Sur notre abaque, ce point se trouverait en dehors du cadre. En réalité, il ne tomberait dans aucun des fers de notre tableau. Celui dont il se rapprocherait le plus serait le fer double T, marqué $b = 350$, avec ses lignes prolongées hors du cadre. Nous pourrions donc dire que cette panne ne serait exécutable en *fer* laminé que sous de très gros échantillons, inacceptables.

2° *Panne double* T, *en acier.* — Si nous admettons de l'acier, travaillant à 10 k. au lieu de 6, nous la calculerons comme si elle était en fer, mais avec un moment fléchissant réduit dans le rapport de 6 à 10, c'est-à-dire ayant pour valeur $M' = 1162{,}5 \times 0{,}6 = 697{,}50$ km, soit en forçant 700.

Dès lors l'ellipse de moment, marquée 700, recoupe la radiante de pente, marquée 0,60, en un point *n*, situé dans les transversales du fer

$$b = 260 \quad | \quad a = 118 \quad | \quad e = \begin{cases} 9 \text{ min.} \\ 18 \text{ max.} \end{cases} \text{diff. } 9$$

Et comme ce point *n* partage l'intervalle de ces transversales aux 4/10 environ, nous augmenterons l'épaisseur minima qui est 9, des 4/10 de la différence qui est 9, ce qui fait

3,6, soit 4 en forçant ; nous aurons donc le double T en *acier* (fig. 365-IV) :

$b = 260$ | $a = 118 + 4 = 122$ | $e = 9 + 4 = 13$.

378. **Calcul d'établissement d'une panne déversée en fer composite.** — Nous nous donnerons arbitrairement la hauteur b du fer, et nous la prendrons, généralement, égale à la distance intérieure des ailes de l'arbalétrier sur lequel cette panne doit être rivée ou boulonnée.

Nous nous donnerons aussi, arbitrairement, la largeur d'ailes a. En prenant a égal, au moins, à la moitié de b on sera dans de bonnes conditions pour un premier essai.

(*a*) **Méthode d'essai :** Voici la marche générale à suivre :

1° En acceptant, comme il le sera expliqué plus loin, un noyau central approximatif d'essai, on calculera la section totale Ω du fer, laquelle section ne sera qu'approchée.

2° On réalisera cette section Ω par des cornières, des semelles et une âme convenablement choisies.

3° On calculera, rigoureusement, les deux moments principaux d'inertie et les moments de résistance correspondants de la poutre ainsi constituée.

4° On appliquera, d'après ces données, la formule exacte des pièces déversées, ou plutôt le tracé graphique qui en a été déduit, et l'on verra si la fibre fatiguée travaille sensiblement à la résistance de sécurité.

5° Si l'écart est trop considérable, on modifiera les cornières et, surtout, les semelles en conséquence.

(*b*) **Calcul approximatif de la section Ω.** — Si nous connaissions (fig. 365-I) la véritable section et si, en déversant cette section à la pente du toit, $\alpha\beta$ (fig. 365-II) était la limite de son noyau central, en coupant par la verticale ON, le segment $Of = \lambda$ devrait satisfaire à l'équation de condition $R\Omega\lambda = M$.

Mais nous ne connaissons pas la section ni, par suite, la ligne $\alpha\beta$. Cependant, en comparant un grand nombre de fers composites à larges ailes établis sur les proportions analogues à celles indiquées ci-dessus, on constate (fig. 365-I) que le point α se tient très sensiblement au sixième du demi-petit axe de la section et que β se tient aux deux tiers environ du demi-grand axe.

Nous tracerons donc à grande échelle (fig. II) un noyau central d'essai $\alpha\beta$, allant du sixième aux deux tiers. Nous mesurerons le segment $Of = \lambda$ (fig. II) et nous en déduirons la valeur approchée

$$\Omega = \frac{M}{R\lambda},$$

ce qui nous permettra de constituer un fer composite ; une application éclaircira la question.

(*c*) **Application.** — Soit à construire en fer composite la panne de la ferme précédente, pour laquelle on a $M = 1162{,}5$ km. et un déversement de 0,60.

Nous la construirons en acier ($R = 10000000$).

Prenons arbitrairement

$$b = 0{,}280 \qquad \text{et} \qquad a = 0{,}165.$$

Nous construisons, avec un déversement de 0,60 (fig. 365-II), le noyau central approché en prenant

$$O\alpha = \frac{a}{12} = 0{,}01375 \qquad \text{et} \qquad O\beta = \frac{b}{3} = 0{,}0933.$$

Nous coupons ce noyau central d'essai par la verticale Of et nous mesurons le segment intercepté $Of = \lambda = 0{,}022$.

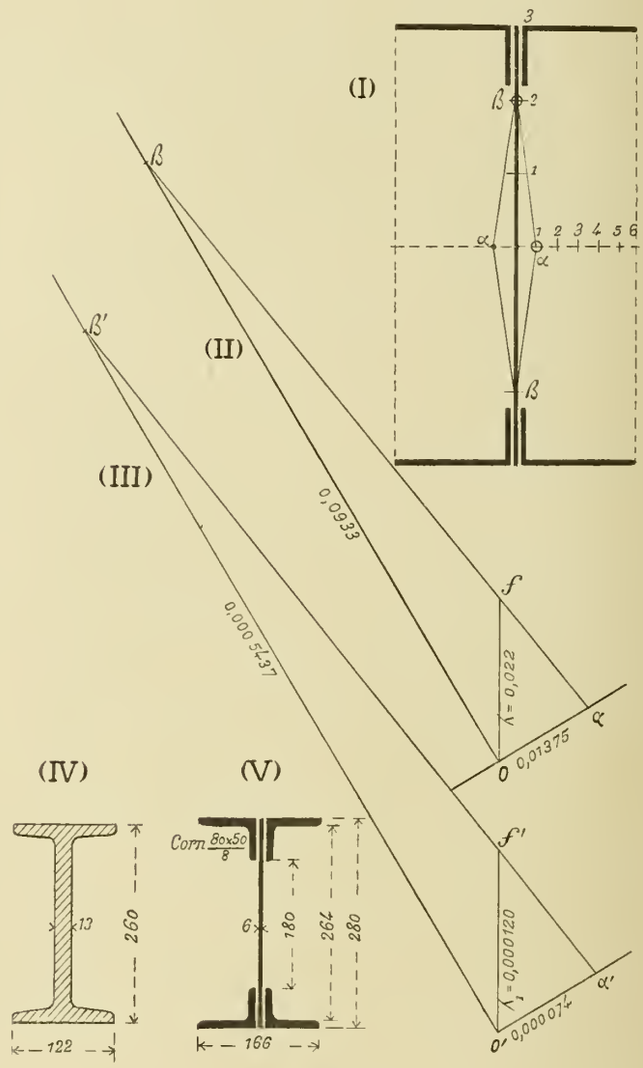


Fig. 365

Nous en déduisons, pour la surface totale, en mètres carrés

$$\Omega = \frac{M}{R\lambda} = \frac{1162{,}5}{0{,}022 \times 10000000} = 0{,}005284.$$

Nous composons un fer comme suit (fig. 365-V) :

Ame de	$0{,}280 \times 0{,}006$	0,001680
4 cornières	$4 \times (0{,}080 + 0{,}042) \times 0{,}008$. .	0,003904
	Surface totale $\Omega =$	0,005584

Vérification.

Calculons, très exactement cette fois, les moments de résistance par rapport aux deux axes :

$$\frac{I_x}{v_1} = \frac{0{,}166 \times 0{,}280^3 - 0{,}144 \times \overline{0{,}264}^3 - 0{,}016 \times \overline{0{,}180}^3}{6 \times 0{,}280} = 0{,}000543736\,;$$

$$\frac{I_y}{v} = \frac{0{,}180 \times \overline{0{,}006}^3 + 0{,}084 \times 0{,}022^3 + 0{,}016 \times \overline{0{,}166}^3}{6 \times 0{,}166} = 0{,}000074419.$$

Sur une nouvelle figure (fig. 365-III) nous portons en $O'\alpha'$ et $O'\beta'$, à une échelle quelconque, ces valeurs de $I : v$. Cela nous donne ce que nous avons nommé le *noyau central amplifié* ; nous joignons α' et β' ; nous recoupons par la verticale $O'f'$ et nous obtenons une longueur interceptée $O'f' = \lambda_1 = 0{,}000120$; d'où

$$R = \frac{M}{\lambda_1} = \frac{1162{,}5}{0{,}000120} = 9687500,$$

au lieu de 10000000 ; le fer est donc très acceptable.

Nota. — Si nous divisons par la surface Ω les $I : v$ précédents, nous obtiendrons les dimensions du *noyau central vrai.*

$$\beta'' = \frac{I_x}{v_1\Omega} = \frac{0{,}000543736}{0{,}005584} = 0{,}0973,$$

$$\alpha'' = \frac{I_x}{v\Omega} = \frac{0{,}000074419}{0{,}005584} = 0{,}0133.$$

Nous avions pris pour le noyau central d'essai

$$\beta' = 0{,}0933 \qquad \text{et} \qquad \alpha' = 0{,}01375.$$

On voit que ce noyau d'essai différait très peu du noyau vrai, ce qui justifie notre manière de procéder.

379. **Calcul des chevrons.** — Les chevrons supportent, par l'intermédiaire des lattes et des voliges, le poids de la couverture proprement dite et celui de la surcharge, neige ou vent. Ils sont donc dans les conditions d'une pièce *oblique* recevant des charges égales entre elles et également espacées dans le cas des lattes, et une charge uniformément répartie dans le cas des voliges. L'écartement des lattes est assez faible pour que l'on puisse, dans chacun de ces deux cas, considérer la charge comme uniformément répartie.

Le chevron est fixé sur les pannes, et, par suite, on peut le supposer coupé au droit de chacune d'elles, chaque tronçon étant indépendant des tronçons voisins et pouvant être considéré comme une pièce reposant sur deux appuis à rotules fixes.

(*a*) **Tensions en chaque point.** — Soit AB (fig. 366-I) un tronçon de chevron compris entre deux pannes ; nous pouvons le supposer chargé par des forces élémentaires p non indiquées sur le croquis, égales et également espacées, dont la somme est égale à la charge totale P. Chacune de ces forces p peut être décomposée en une force n normale au chevron, et en une force tangentielle q.

Si l'on décompose, de même, la force totale P en une force normale N et en une force tangentielle Q, ces composantes seront égales respectivement aux sommes des forces n et q.

Les forces normales n produiront une flexion, et les forces tangentielles q donneront lieu à une tension longitudinale.

En doublant indéfiniment le nombre des forces p, nous obtiendrons à la limite la charge uniformément répartie.

En résumé, le chevron est dans les conditions d'une pièce qui serait à la fois chargée uniformément par des forces normales et comprimée par des forces longitudinales allant en croissant uniformément depuis le haut jusqu'au bas.

Evaluons les efforts fibraires.

1° *Tensions dues aux forces normales.* — Les forces normales déterminent en chaque point un moment fléchissant dont la représentative est la parabole indiquée *courbes des M* sur la figure 366-I, et l'effort unitaire p_1 développé par ce moment fléchissant sur la fibre extrême de chaque section a pour valeur

$$p_1 = \frac{M \times v}{I}.$$

La représentative de cet effort unitaire p_1 serait une dilatation de la parabole précédente, c'est-à-dire une autre parabole marquée *courbe des* $Mv : I$ sur la même figure, et dessinée en trait mixte.

Une seconde parabole, symétrique de la précédente, sera dessinée en dessous et représentera les efforts de compression en admettant que la précédente représente les efforts de traction.

2° *Tension due aux forces longitudinales.* — Il résulte du théorème du n° 367-*c*, que le chevron étant fixé à ses deux extrémités sur les pannes, les réactions des appuis A et B sont égales entre elles, de signe contraire et ont pour valeur absolue $\frac{1}{2}Q$.

En B, la panne supérieure tire le chevron avec une force égale à $\frac{1}{2}Q$, tandis que en A la panne inférieure le comprime avec la même intensité ; et comme la charge longitudinale du chevron varie uniformément de A en B, la représentative de la tension totale due aux efforts longitudinaux serait la droite inclinée, dessinée en trait plein, allant depuis $-\frac{1}{2}Q$ au point A jusqu'à $+\frac{1}{2}Q$ au point B.

L'effort unitaire correspondant p_2 s'obtiendra en divisant l'effort total par la section Ω, qui est constante. Sa représentative sera une droite, dessinée en trait mixte, et allant depuis $-Q : 2\Omega$ en A, jusqu'à $+Q : 2\Omega$ en B.

L'effort unitaire total p en un point quelconque sera la somme $p = p_1 + p_2$ des efforts unitaires précédents. Sa représentative s'obtiendra en ajoutant analytiquement la parabole et la droite ; cela donnera deux paraboles (marquées en gros trait noir sur la figure); la supérieure pour

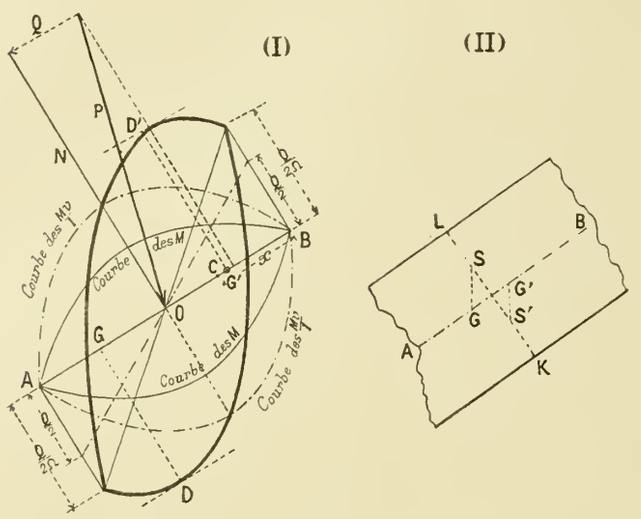


Fig. 366

les efforts de traction, l'inférieure pour ceux de compression.

(*b*) **Section dangereuse.** — En menant à ces paraboles les tangentes D' et D parallèles à AB, on aura en G', à plomb du point D', la section dangereuse à la traction, et en G, à plomb du point D, celle dangereuse à la compression. Nous allons chercher la position des points G' et G, centres des sections dangereuses, et, pour cela, nous allons calculer les abscisses OG' et OG de ces points. Pour y arriver nous userons de l'artifice suivant.

Assimilons la parabole et la droite, dessinées en traits mixtes, à des représentatives de moments fléchissants que l'on aurait additionnées. A ces moments fléchissants répondent des efforts tranchants, et au point D' l'effort tranchant total doit être nul, puisque l'effort tranchant est proportionnel à la pente de la représentative des moments et que, en D', cette pente doit, elle aussi, être nulle.

L'effort tranchant répondant à la parabole trait-mixte est nul au point milieu O. Et comme cette parabole serait due à des efforts normaux uniformément répartis, dont le total serait $Nv : I$, ce qui répond par mètre courant à $Nv : Il$, il en résulte qu'au point G', situé à une distance $x_1 = OG'$ du point O, l'effort tranchant t_1, répondant à la parabole trait-mixte, aura pour valeur

$$t_1 = -\frac{Nv}{Il}x_1.$$

A la droite trait-mixte répond un effort tranchant t_2 positif, constant, égal à sa pente ; on aura donc

$$t_2 = +\frac{Q}{\Omega l}.$$

Ecrivons que le total $t_1 + t_2$ est nul, ce qui donne l'équation

$$\frac{Q}{\Omega l} - \frac{Nv}{Il}x_1 = 0,$$

d'où l'on tire pour l'abscisse de la section dangereuse :

$$x_1 = \overline{OG'} = \frac{Q}{N} \times \frac{I}{\Omega v}.$$

Interprétation des résultats. — Remarquons que $I : \Omega v$ c'est la demi-largeur du noyau central de la section, et que $Q : N$ c'est la pente de la force P, par rapport à la normale au chevron. Nous en concluons le tracé suivant (fig. 366-II) :

1° On prend, sur la section milieu du chevron, en S' et S, les extrémités du noyau central de cette section ;

2° Par ces points, on mène en SG et en S'G' des parallèles aux efforts P qui attaquent le chevron. Ils sont ici verticaux ;

3° Les points où ces parallèles rencontrent l'axe du chevron, donnent en G, point inférieur, la section dangereuse à la compression, et en G', point supérieur, la section dangereuse à l'extension.

(*c*) **Formule d'équarrissage du chevron.** — Calculons l'effort unitaire de la fibre extrême pour une section quelconque située à la distance x du milieu O.

En ce point milieu, le moment fléchissant dû à la force N uniformément répartie, a pour valeur $1/8Nl$. Pour le point situé à la distance x à droite, il faut diminuer ce moment de tout le moment qui est dû aux forces normales réparties, à partir du point O, sur cette longueur x. Le total de ces forces est $Nx : l$; le bras de levier de leur résultante est $x : 2$; par conséquent, le moment à retrancher a pour valeur $\frac{Nx^2}{2l}$. Le moment fléchissant M a donc pour valeur

$$M = \frac{Nl}{8} - \frac{Nx^2}{2l}.$$

Il donne lieu à un effort unitaire extrême p_1 qui est :

$$p_1 = \frac{Mv}{I} = \frac{v}{I}\left(\frac{Nl}{8} - \frac{Nx^2}{2l}\right).$$

Quant à l'effort longitudinal, il est nul au point O, et à la distance x de ce point, il donne pour valeur p_2 de la tension unitaire qu'il développe

$$p_2 = \frac{Qx}{l\Omega},$$

l'effort unitaire total p est égal à $p_1 + p_2$; on a donc :

$$p = \frac{Nlv}{8I} + \frac{Qx}{l\Omega} - \frac{Nvx^2}{2lI}.$$

Si dans cette formule on remplace x par la valeur x_1

trouvée ci-dessus, on aura l'effort unitaire maximum p', lequel est, après réduction,

$$\text{(A)} \qquad p' = \frac{Q^2 I}{2Nlv\Omega^2} + \frac{Nlv}{8I}.$$

En faisant dans cette formule $p' = R$ résistance de sécurité, on aurait l'équation d'équarrissage du chevron.

(*d*) **Remarque pratique.** — Dans cette formule A, le premier terme est dû aux efforts longitudinaux, et le second terme est dû à la flexion causée par les efforts normaux. Je dis que le second l'emporte de beaucoup sur le premier et que l'on peut, par suite, négliger ce premier terme.

En effet, prenons le rapport K des deux termes; il est

$$K = \frac{Q^2 I}{2Nlv\Omega^2} : \frac{Nlv}{8I} = 4\frac{Q^2}{N^2} \times \frac{I^2}{l^2 v^2 \Omega^2}.$$

Admettons un chevron rectangulaire en bois; remplaçons I, v et Ω par leurs valeurs en fonction de l'équarrissage a et b; appelons α l'angle que fait le rampant du comble avec l'horizontale, et remarquons que $Q : N = \sin\alpha : \cos\alpha$. Ce rapport K devient, après simplifications,

$$K = \frac{b^2 \sin^2\alpha}{9l^2 \cos^2\alpha}.$$

$l \cos\alpha$ est la projection, sur l'horizontale, de l'espacement des pannes; sa valeur moyenne est 2 mètres; α peut varier entre 15° et 75°, et b, hauteur du chevron, varie de $0^m,08$ à $0^m,12$. Avec ces données, les valeurs extrêmes du rapport K sont

0,0000124 et 0,000373.

Elles sont très petites, et, par suite, le premier terme est négligeable. On peut donc calculer le chevron par la formule d'équarrissage

$$R = \frac{Nlv}{8 \times I},$$

ce qui revient à ne pas tenir compte des efforts longitudinaux.

380. **Applications.** — (*a*) **Chevrons en bois.** — Nous avons vu au n° 373-*a* qu'on pouvait construire le funiculaire des moments en prenant comme base la projection de la pièce AB sur l'horizontale et comme charge une charge verticale P_1, dont la composante normale N serait la même que la composante normale de la charge P.

Soient p la charge par mètre carré d'égout, p_1 la charge verticale correspondante, l_1 la projection de AB sur l'horizontale, c'est-à-dire la distance, entre pannes, en projection horizontale, laquelle se tient aux environs de 2 mètres; soient a et b les dimensions de la section des chevrons, et δ leur écartement d'axe en axe; en prenant $R = 600000$, la formule d'équarrissage devient :

$$800000\, ab^2 = p_1 l_1^2.$$

Cette formule est analogue à celle des solivages parallèles en bois; elle permet :

1° De calculer l'écartement δ des chevrons, si leur section a et b est donnée;

2° De calculer les dimensions des chevrons si leur écartement δ est imposé.

Comme les chevrons se font avec des bois du commerce dont l'équarrissage est donné, c'est ordinairement la première question qu'on aura à résoudre. Dans la pratique, on place souvent, sans les calculer, les chevrons à $0^m,33$ d'axe en axe, en prenant un équarrissage variable de 0,08 sur 0,08 à 0,08 sur 0,12 ou 0,11 sur 0,11, suivant que la couverture est plus ou moins lourde. Cependant, on emploie aussi d'autres écartements qui peuvent atteindre $0^m,80$ dans les couvertures en tuiles mécaniques.

Le tableau suivant fait connaître l'écartement à donner aux chevrons pour $l_1 = 2^m,00$ dans le cas où $p_1 = 400$ k., correspondant à une couverture très lourde avec une surcharge très forte et nous avons trouvé :

ÉCARTEMENT A DONNER AUX CHEVRONS

Equarrissage...	0,08 sur 0,08	0,08 sur 0,10	0,08 sur 0,12	0,11 sur 0,11
Espacement...	$\delta = 0,256$	0,400	0,576	0,665
En supposant une charge totale $p_1 = 400^k$ par m^2 de surface couverte.				

On voit donc que l'on pourrait, dans bien des cas, avoir des espacements supérieurs à $0^m,33$; mais, d'autre part, plus l'espacement des chevrons est grand, plus on doit augmenter les dimensions des liteaux ou des voliges; on perdrait, de ce côté, ce que l'on gagnerait comme volume de bois en écartant davantage les chevrons.

(*b*) **Chevrons en fer.** — Si l'on veut constituer les chevrons en fers à nervures, on mettra la formule sous la forme

$$R = \frac{p_1 l_1^2 \delta}{8(I : v)}, \qquad \text{d'où l'on tirera :}$$

1° Si le fer a des dimensions données

$$\delta = \frac{8R(I : v)}{p_1 l_1^2};$$

2° Si l'écartement des chevrons est donné

$$\frac{I}{v} = \frac{p_1 l_1^2 \delta}{8R}.$$

(*c*) **Application aux chevrons de la ferme Polonceau.** — La charge propre d'un égout est de 4230 k.; la composante verticale de l'action du vent est de 4550 k.; soit au total 8780 k. pour une surface d'égout de $70^m,50$.

Soit, par mètre carré, $8780 : 70,50 = 124^k,5$.

La longueur, projetée sur l'horizontale, d'un tronçon de chevron, est de $2^m,00$.

Prenons des chevrons en bois de 0,08 sur 0,08, la formule nous donne

$$\delta = \frac{800000 \times 0{,}08 \times \overline{0{,}08}^2}{4 \times 124{,}5} = 0^m{,}82.$$

Nous pourrons donc placer les chevrons à plus de 0,33 d'axe en axe, puisque nous avons une couverture en ardoises relativement légère.

Si nous nous étions donné un écartement δ égal, par exemple, à $0^m{,}40$, nous aurions eu

$$ab^2 = \frac{4 \times 124{,}5 \times 0{,}40}{800000} = 0{,}000249,$$

et si nous prenons $b = 0{,}08$, il en résulte

$$a = \frac{0{,}000249}{0{,}0064} = 0{,}038 \quad \text{soit} \quad 0{,}04.$$

Nous prendrons donc des chevrons de 0,08 sur 0,08, et nous conseillerons de les écarter à 0,50 d'axe en axe.

§ 10. — Ferme Polonceau a trois bielles par arbalétrier

381. **Préliminaires.** — (*a*) **Données.** — (Voir plus loin, fig. 368.)

Portée de la ferme, $30^m{,}00$.

Espacement des fermes, $5^m{,}00$.

Longueur d'égout mesurée sur l'épure, $17^m{,}00$.

Surface d'un égout, $17{,}00 \times 5 = 85^{m2}$.

Charge propre d'un égout (75 k. par mètre carré d'égout), $75 \times 85 = 6375$ k.

Espacement des pannes sur le rampant, $2^m{,}125$.

Il y a une panne sur chaque nœud et une panne entre deux nœuds.

(*b*) **Pression du vent.** — Nous avons admis, comme dans l'étude précédente, que le vent soufflant sur un égout du comble a pour puissance 124 k. $\times 85 = 10540$ k. Nous avons trouvé, en procédant comme il a été dit au n° 344, que la composante normale à l'égout est de 4200 k. (fig. III).

(*c*) **Charge sur chaque panne.** — 1° *Egout non exposé au vent.* — Comme il y a sept pannes et, en plus, le faîtage et la sablière, chaque panne porte un huitième de la charge ; soit $6375 : 8 = 796^k{,}875$ ou 797 k. Le faîtage et la sablière supportent chacun un seizième, ou $6375 : 16 = 398^k{,}4375$ ou 399 k. La sablière reporte directement sur le mur la charge qu'elle reçoit.

2° *Egout exposé au vent.* — En composant la charge verticale de l'égout et la composante normale due au vent, nous avons trouvé (fig. III) une force oblique de 10250 k. Chaque panne en supporte un huitième, soit

$$10250 : 8 = 1281^k{,}25 \quad \text{ou} \quad 1282 \text{ k.}$$

Le faîtage et la sablière en supportent un seizième,

$$10250 : 16 = 640^k{,}625 \quad \text{ou} \quad 641 \text{ k.}$$

La sablière reporte directement sur le mur la charge qui lui est appliquée de ce chef.

(*d*) **Charge sur chaque nœud.** — A cause de la distribution des pannes, qui sont placées au droit de chaque nœud et au milieu de l'intervalle de deux nœuds, nous avons admis, comme on le fait ordinairement, que chaque nœud prenait la charge de deux pannes, à l'exception du faîtage qui ne prend que la charge d'une panne de chaque égout et des nœuds d'appui dont la charge est reportée directement sur les murs.

Les nœuds intermédiaires sont donc chargés :

1° Sur l'égout non exposé au vent, de 1594 k.;

2° Sur l'égout exposé au vent, de 2564 k.

Le faîtage supporte 2150 k.

(*e*) **Réactions des appuis.** — Nous avons choisi un type de ferme avec un appui fixe à gauche et un appui à roulement à droite ; ce dernier ne peut développer qu'une réaction verticale, tandis que l'autre peut donner une réaction oblique. Nous obtiendrons ces réactions en décomposant la résultante générale des charges agissant sur le comble, en deux forces appliquées aux points d'appui 1 et 15, celle de l'appui 15 devant être verticale. Nous nous sommes placés dans le cas le plus défavorable en supposant que le vent frappe l'égout de gauche, c'est-à-dire du côté de l'appui fixe. (Voir n° 369-*a*.)

Prenant un pôle quelconque ω (fig. II), nous avons construit le dynamique des charges avec ses rayons polaires 1, 2, 3 ... 8, puis le funiculaire en pointillé $\alpha\beta$ (fig. I), en ayant soin de faire passer son premier côté par le point d'application α de la réaction oblique cherchée.

Nous avons mené (Dyn. fig. II) le rayon polaire ωa parallèle au côté de fermeture $\alpha\beta$ du funiculaire (fig. I) et nous en avons déduit (fig. II) en ia la réaction verticale de 6750 k. de l'appui 15 et en ab la réaction oblique de 7750 k. de l'appui 1.

382. **Calcul des tensions des barres.** — (*a*) **Nœuds.** — **N°s 1, 2 et 3.** — La construction des dynamiques correspondant à ces trois nœuds se fait comme il a été dit au n° 370. On obtient ainsi :

Pour le nœud n° 1, le triangle *abj* ;

Pour le nœud n° 2, le quadrilatère *bckj* ;

Pour le nœud n° 3, le quadrilatère *jkla*.

(*b*) **Nœud N° 4. — Indétermination apparente. — Moyens de la lever.** — A ce nœud aboutissent quatre barres, et les tensions de trois d'entre elles sont inconnues; il y a donc indétermination momentanée, et il faut trouver, par une autre méthode, la tension inconnue de l'une des barres.

Nous pouvons employer trois méthodes générales qui sont les suivantes :

I. *Méthode de Culmann.* — Elle consiste à couper le système par une surface, plane ou courbe, ne rencontrant pas plus de trois barres, pourvu que ces barres ne se coupent pas en un même point; soit WW′ ce plan (fig. I). Cherchons sur le dynamique la résultante de toutes les forces situées d'un même côté du plan WW′, à gauche par exemple; cette résultante est *ea* (Dyn.) en grandeur, et son point d'application se trouverait à l'intersection du côté 4 du funiculaire avec la ligne de fermeture $\alpha\beta$; ce point serait hors de l'épure.

Nous pourrons décomposer cette force en trois autres suivant les trois barres EO, OP et PA que rencontre le plan de section, comme il a été dit au n° 32, page 10.

Cette méthode est générale, mais elle est souvent d'une application difficile, les forces à décomposer étant très petites et les constructions sortant des limites de l'épure.

II. *Méthode de Ritter.* — Si nous considérons encore le plan de section WW′, les tensions des trois barres qu'il rencontre doivent équilibrer la résultante de toutes les forces situées à gauche de ce plan.

Par suite, la somme des moments de ces trois tensions, par rapport à un point quelconque du plan, doit être égale au moment de la résultante, par rapport au même point, mais de signe contraire.

Prenons les moments par rapport au nœud 8, où se croisent deux des barres, EO et OP, ce qui éliminera les tensions de ces barres, parce que les moments de ces deux barres par rapport à ce point seront nuls; nous n'aurons plus à considérer que le moment inconnu de la barre PA. En appelant T la tension de cette barre et h la distance du nœud 8 au tirant PA, le moment a pour expression $T \times h$.

La résultante partielle de toutes les forces situées à gauche est *ea* (Dyn.); son moment par rapport au point 8 s'obtiendra en menant par ce point une parallèle à *ea*, et prenant le segment $\gamma\delta$ intercepté sur cette parallèle entre les côtés 4 et $\alpha\beta$ du funiculaire (v. n° 34); cette ligne, mesurée à l'échelle des forces, sera multipliée par la distance $\omega\varepsilon$ du pôle du dynamique à la résultante partielle *ae*.

Nous trouvons ici $\gamma\delta = 8600$ k., $\omega\varepsilon = 7^{m},70$; le moment est donc égal à $8600 \times 7,70 = 66220$ km. et il est négatif.

Nous en tirons $T = \frac{66220}{h} = \frac{66220}{7,70} = 8600$ k.

Vérification. — Nous aurons une vérification du résultat trouvé en prenant le moment de la résultante *fa* des forces situées à droite et opérant de la même manière; nous trouvons ainsi

$$T = \frac{4900 \times 13,50}{7,70} = 8590^{kg.},$$

valeur suffisamment concordante avec la première, étant donnée l'échelle de l'épure. Cette méthode est générale et d'une application toujours facile.

Nota. — On pourrait aussi opérer arithmétiquement, c'est-à-dire : 1° abaisser du sommet de la ferme, 8, des perpendiculaires sur chacune des forces situées à gauche; 2° mesurer les bras de levier ainsi obtenus; 3° multiplier chacun d'eux par la force correspondante, ce qui donnera un moment partiel; 4° faire le total de tous ces moments partiels; et 5° opérer ensuite comme ci-dessus.

III. *Méthode de fausse position.* — Cette méthode est également générale; elle est purement graphique, et les constructions qu'elle nécessite se tiennent toujours dans les limites de l'épure; elle est basée sur le théorème suivant :

1° *Théorème.* — Etant données trois droites A, B, C et quatre directions concourantes 1, 2, 3 et 4 (fig. 367), si l'on mène successivement des droites 1′, 2′, 3′ et 4′, respec-

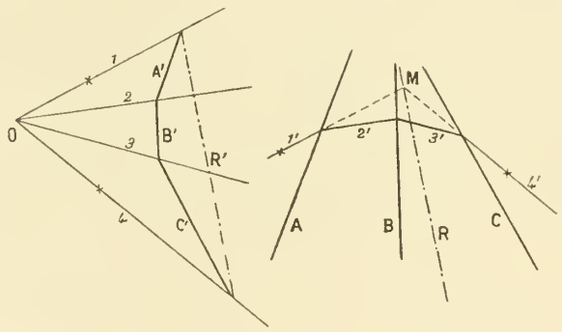


Fig. 367

tivement parallèles aux directions données, et allant d'une droite à la suivante, le lieu géométrique des points de rencontre M de la ligne initiale 1′ avec la ligne finale 4′ est une droite.

La théorie des dynamiques et des funiculaires nous donne la démonstration immédiate de ce théorème. En effet :

Nous pouvons considérer les directions 1, 2, 3 et 4 qui concourent au point O comme les rayons polaires d'un dynamique dont ce point O serait le pôle.

Menons trois droites consécutives A′, B′, C′ s'appuyant sur les quatre rayons polaires et respectivement parallèles aux droites A, B, C; et fermons, par une droite R′, le contour ainsi obtenu.

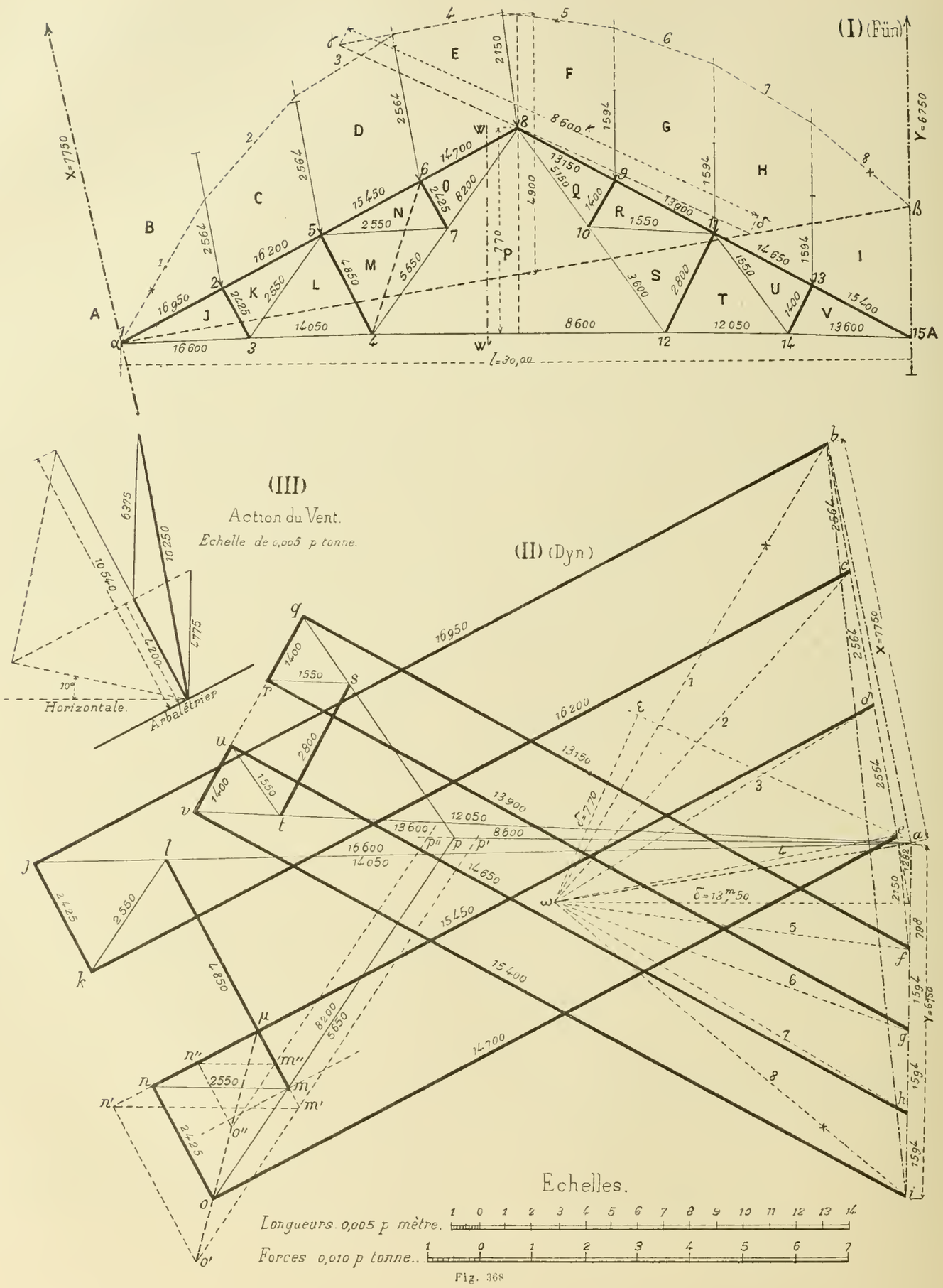

(I) (Fün)
(III)
Action du Vent.
Echelle de 0,005 p tonne.
(II) (Dyn)
Horizontale.
Arbalétrier
Echelles.
Longueurs. 0,005 p mètre.
Forces 0,010 p tonne..

Fig. 368

Le contour 1'2'3'4' sera un funiculaire du dynamique A'B'C'R', par suite le point M, intersection du côté initial 1' et du côté final 4', sera toujours un point de la résultante des forces A'B'C' dirigées suivant les trois droites A, B, C. Le lieu géométrique de ce point sera cette résultante; ce sera donc une droite ; C.Q.F.D.

Remarque. — Le théorème est général quel que soit le nombre n des droites et le nombre $n+1$ des directions données.

2° *Application du théorème.* — Considérons le nœud n° 4; la tension *al* est connue et si nous avions la valeur de la tension *ap* du tirant de ferme AP, la difficulté serait levée.

Prenons arbitrairement pour le point p une position d'essai p' sur la parallèle menée par le point a à la barre AP; le dynamique d'essai qui en résulte est $ap'm'la$.

Passons au nœud 5; nous aurons, en acceptant provisoirement les résultats qui viennent d'être obtenus, le dynamique $cklm'n'dc$.

Nous en déduirons alors pour le nœud n° 7 le dynamique $m'n'o'p'$.

Le point o', obtenu comme conséquence de ce dernier dynamique, devrait se trouver sur la parallèle menée par le point e à la barre EO; comme cette condition n'est pas remplie. l'hypothèse faite sur la position p' du point p est fausse.

Faisons une seconde hypothèse; soit p'' la deuxième position d'essai du point p; nous en déduirons comme ci-dessus les positions des points m'', n'' et o''.

Le point o'' n'est pas non plus sur la droite eo; mais, d'après le théorème précédent, le lieu du point o lorsque le point p se déplace sur la droite ap est la droite $o'o''$. L'intersection de cette droite $o'o''$ avec la droite eo donnera donc la position exacte du point o et par suite celle des points p, m et n.

Nous avons en effet les droites rp, lm et dn entre lesquelles nous menons les droites successives op, pm, mn et no du dynamique (fig. II) respectivement parallèles aux quatre directions concourantes du funiculaire (fig. I) OP, PM et NO et le lieu du point a est une droite déterminée par deux points o' et o''. (Pour sa direction, v. Rem. II).

Remarque I. — Si nous placions le point m'' en μ, intersection des droites dn et lm, le point o'' se confondrait avec le point μ et l'on pourrait par suite éviter le second essai.

Remarque II. — Il résulte encore de la démonstration du théorème précédent que si on mène sur la ferme (fig. I) la droite 4, 6, elle est parallèle à la droite $o'o''$ du dynamique, car les droites LM et ND sont respectivement parallèles aux droites lm et nd.

On peut donc éviter les essais en menant par le point μ une parallèle à la droite 4, 6, de la ferme, jusqu'à sa rencontre en o avec la droite eo; on en déduit ensuite les points m, n et μ.

Remarque III. — A cause de la symétrie de la poutre armée qui constitue l'arbalétrier, et de la symétrie des charges, les triangles mno, jkl, du dynamique sont isocèles et égaux; il en résulte que leurs bases jk et no sont en ligne droite, et que leurs sommets sont sur la droite lm, qui est parallèle à la fois aux droites jk et no; de plus, le point m est au milieu de l'intervalle des deux droites dn et eo, ce qui permet de le déterminer *à priori* et par suite d'en déduire la position des points n, p et o.

Il en résulte aussi que la différence entre les tensions des barres consécutives OP et MP (fig. I), d'une part, AJ et AL d'autre part est la même, et qu'elle est égale à la tension des barres MN et KL.

On voit encore que les tensions des petites contrefiches sont égales entre elles et égales à la moitié de la tension ml de la grande contrefiche.

Enfin, les tensions longitudinales dans les divers tronçons de l'arbalétrier croissent en progression arithmétique.

(*c*) **Fin de la construction du dynamique.** — Les tensions des barres aboutissant au nœud n° 4 étant déterminées par l'une quelconque des méthodes précédentes, on continuera facilement la construction du dynamique. Les remarques faites pour le côté gauche de la ferme s'appliquent aussi au côté droit; elles fourniront une série de vérifications importantes à faire.

(*d*) **Calcul du moment fléchissant dans l'arbalétrier.** — L'égout de gauche supporte une charge verticale de 6375 k. qui, augmentée de la composante verticale du vent dont la valeur est de 4775 k., donne une charge verticale totale de 11150 k.

Chaque panne en prend un huitième soit

$$11150 : 8 = 1393^{k},75 \quad \text{ou} \quad 1394 \text{ k.}$$

La projection de l'entre-panne sur l'horizontale est de

$$30^{m} : 8 = 3^{m},75.$$

Le moment M produit par la charge d'une panne, ou 1394 k., appliquée au milieu du tronçon d'arbalétrier est égal à

$$M = \frac{1394 \times 3,75}{4} = 1306,875 \text{ ou } 1307 \text{ Km.}$$

(*e*) **Calcul des pièces de la ferme.** — Nous dresserons d'abord le tableau des tensions des différentes pièces, en ne nous occupant que de la demi-ferme de gauche, qui est la plus éprouvée ; les deux demi-fermes seront, d'ailleurs, construites avec les mêmes dimensions, car il est probable que le vent pourra souffler d'un côté aussi bien que de l'autre. Cependant, si nous faisions l'épure en supposant que

le vent souffle sur l'égout de droite, du côté de l'appui à roulement, nous trouverions pour les tensions des barres de ce côté des valeurs un peu inférieures à celles que nous avons trouvées pour les barres du côté gauche dans l'épure actuelle ; nous pourrions donc, si la différence était assez importante, donner aux barres du côté droit des dimensions un peu moindres qu'à celles du côté gauche et réaliser une économie sur le poids de métal employé.

Nous ne ferons pas ici les calculs relatifs à la détermination des barres ; ils ont été donnés avec beaucoup de détails dans l'étude de la ferme précédente.

Afin de permettre au lecteur de comparer quelques types des fermes, au point de vue des efforts qui sont développés dans leur intérieur, nous allons donner, presque sans explications, les épures relatives à des fermes de même portée ($8^m,00$), de même pente et présentant, à une unité près, le même nombre de barres.

DÉSIGNATION DES PIÈCES		NATURE DES EFFORTS	VALEUR DES EFFORTS	LONGUEUR DES PIÈCES
				m
Tirants d'arbalétrier	1.3	Traction	16600 k.	4,75
	3.4	id.	14050	4,75
	4.7	id.	5650	4,75
	7.8	id.	8200	4,75
Tirant de ferme	4.12	id.	8600	10,90
Sous-Tirants	3.5	id.	2550	4,75
	5.7	id.	2550	4,75
Arbalétrier	1.2	Compression Flexion	16950 $M = 1307^{km}$	4,25
	2.5	Compression Flexion	16200 $M = 1307^{km}$	4,25
	5.6	Compression Flexion	15450 $M = 1307^{km}$	4,25
	6.8	Compression Flexion	14700 $M = 1307^{km}$	4,25
Bielles	5.4	Compression	4850	4,20
	2.3 et 6.7	id.	2425	2,10

§ 11. — Fermes diverses

383. (*a*) **Fermes anglaises**. — Les fermes anglaises sont de deux types :

1° A contrefiches verticales et tirants inclinés (fig. 369-I) ;

2° A contrefiches obliques et tirants verticaux (fig. 369-II).

Dans ces deux types, l'arbalétrier et l'entrait sont reliés par des barres comprimées dites *bracons* et par des *tirants ;* on peut multiplier à volonté ces barres, de manière à en avoir une sous chaque panne ; on évite ainsi que l'arbalétrier soit fléchi entre les nœuds.

Dans le premier système, les barres comprimées sont plus courtes ; le système est donc plus avantageux, puisque la résistance des pièces comprimées croît en raison inverse du carré de leur longueur.

Le tracé des diagrammes de ces fermes n'offre aucune difficulté, car nous n'avons jamais, en chaque nœud, que deux barres dont les tensions soient inconnues.

Les arbalétriers sont constitués, en général, par un fer composite (âme, cornières et semelles). Les tirants sont constitués par des fers plats ; les contrefiches ou *bracons*, par une double cornière ou par un double fer en U.

Les assemblages sont obtenus au moyen de goussets : à cause du peu d'importance des arbalétriers et de l'entrait, on ne considère pas les contrefiches comme encastrées à leurs extrémités.

(*b*) **Ferme belge** (fig. 369-III). — Cette ferme ne diffère de la ferme anglaise qu'en ce que les contrefiches sont normales à l'arbalétrier.

Les épures de cette ferme et des fermes anglaises ont été faites avec les mêmes données et en supposant qu'on ne tient compte que d'une surcharge de neige. Par conséquent, les réactions sont verticales et égales entre elles. Les données de toutes ces fermes sont les suivantes :

Portée de la ferme. . . . . $16^m,00$
Espacement des fermes. . . . . $5^m,00$
Longueur d'égout . . . . . $8^m,60$

Surface d'un égout, $8,60 \times 5 = 43^{m^2},00$.

Charge propre d'un égout (30 k. par mètre carré d'égout), $30 \times 43 = 1290$ k.

Surcharge de neige (30 k. par mètre carré projeté), $30 \times 40 = 1200$ k.

Espacement des pannes, $2^m,15$.

Charge totale par panne, $\frac{1290 \times 1200}{4} = 622^k,50$.

(*c*) **Ferme dissymétrique** (fig. 370). — Cette ferme, employée pour couvrir des ateliers, se compose d'un égout, généralement à pente faible, couvert en tuiles, ardoises ou zinc, et d'un égout à forte pente couvert par un vitrage. Ce dernier est ordinairement orienté au nord, afin d'éviter le soleil dans l'atelier.

Nous avons adopté les données suivantes :

Portée de la ferme. . . . . $8^m,00$
Espacement des fermes. . . . . $4^m,00$
Longueur de l'égout de gauche . $7^m,20$
Longueur de l'égout de droite . . $4^m,40$

Ferme Anglaise

à Contrefiches Verticales.

(I)

Ferme Anglaise

à Contrefiches Obliques

(II)

Ferme Belge

(III)

Echelles { *Longueurs. 0,010 p mètre*
Forces.....0,010 p tonne

Fig. 369

Ferme dissymétrique

Echelles { *Longueurs. . 0, 01 p. mètre.*
Forces.....0,020 p. tonne.

Fig. 370

Surface de l'égout de gauche . . $7,20 \times 4 = 28^{m2},80$
— de droite . . $4,40 \times 4 = 17^{m2},60$

Charge propre de l'égout de gauche (60 k. par mètre carré d'égout). . . . . $60 \times 28,80 = 1728$ k.

Charge propre de l'égout de droite (30 k. par mètre carré d'égout) . . $30 \times 17,60 = 1128$ k.

Surcharge de neige sur l'égout de gauche (30 k. par mètre carré projeté) . . . . . $30 \times 24 = 720$ k.

Espacement des pannes (égout de gauche). . . . $2^m,40$
— — de droite. . . . . $2^m,20$

Charge totale par panne (égout de gauche),

$$\frac{1728 \times 720}{3} = 810 \text{ k.}$$

Charge totale par panne (égout de droite),

$$\frac{1128}{2} = 564 \text{ k.}$$

Charge sur le faîtage $\frac{1728 \times 720}{6} \times \frac{1128}{4} = 687$ k.

Comme on le voit, nous n'avons pas supposé de surcharge de neige sur l'égout de droite dont la pente est trop forte pour que la neige puisse y tenir.

Un funiculaire $\alpha\beta$ nous a permis de déterminer les réactions sur les appuis. L'épure ne présente ensuite aucune difficulté, puisqu'on n'a jamais pour chaque nœud que deux barres dont les tensions soient inconnues. Il serait utile, dans le cas actuel, de refaire l'épure, en tenant compte de l'action du vent d'abord sur un égout, puis ensuite sur l'autre.

CHAPITRE II

POUTRES EN TREILLIS

1re SECTION

Systèmes articulés stricts

§ 12. — Treillis simples

384. **Généralités.** — (*a*) **Définitions** (fig. 371). — Les poutres en treillis sont composées de deux *membrures* A et A′, ordinairement horizontales, qui en constituent le contour, et de pièces intermédiaires *b*, *c*, *d*, *f*, *g* reliant ces membrures, et auxquelles nous donnons le nom de *barres de treillis*.

Lorsque les barres sont verticales, telles que *b*, *d*, *g*, on les nomme *montants*.

Le point M où plusieurs barres se réunissent s'appelle un *nœud*.

La membrure, soit supérieure ou *membrure haute* A, soit inférieure ou *membrure basse* A′, comprend (fig. II), en général, une ou plusieurs *semelles*, telles que *mn*, deux *cornières*, telles que K, et les portions de barres ou de montants qui sont pincées entre ces cornières. La membrure comprend donc tout ce qui est compris dans le rectangle *mnpq*.

(*b*) **Répartition des charges sur les nœuds.** — 1° Le poids propre de la poutre est supposé réparti également entre les divers nœuds ; chacun d'eux est considéré comme

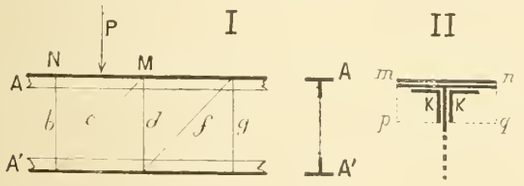


Fig. 371

supportant la moitié du poids de chacune des barres ou des portions de membrures qui y aboutissent.

2° Une surcharge uniformément répartie, agissant le plus généralement sur une seule semelle de la poutre, est considérée comme également répartie entre les différents nœuds placés sur cette semelle, s'ils sont équidistants, ce qui est le cas ordinaire.

3° Un poids distinct P agissant en un point d'une semelle, entre deux nœuds, M et N, sera remplacé par les deux composantes qu'il développerait sur ces deux nœuds, si la portion de membrure sur laquelle il est appliqué était coupée au droit de ces nœuds et simplement appuyée sur eux.

Les portions de charges afférentes aux nœuds d'appui, c'est-à-dire aux nœuds par lesquels la poutre entière repose sur ses appuis, sont considérées comme reportées directement sur les points d'appui, et n'entrent pas en ligne de compte dans le calcul des réactions qui servent à construire l'épure des tensions des barres. C'est ce que nous avons déjà fait remarquer dans l'étude des fermes.

Lorsque nous aurons calculé, au moyen des charges ainsi appliquées aux nœuds, les efforts de tension ou de compression auxquels les barres sont soumises, nous devrons tenir compte, en outre, pour les membrures, des efforts de flexion développés par la charge uniformément répartie ou par la charge isolée qui peut y être placée ; ces efforts de flexion s'ajouteront aux efforts longitudinaux. C'est ce que nous avons déjà fait dans le cas d'un arbalétrier de ferme Polonceau (voir n° 372).

Opérer ainsi, revient à supposer que les divers éléments qui constituent la poutre sont articulés aux nœuds, hypothèse qui, en général, n'est pas réalisée par la construction. Il faut remarquer cependant que, dans la plupart des cas, les solives, les pièces de pont ou les pannes qui transmettent les charges aux poutres sont assemblées au droit des nœuds,

Poutres chargées sur la membrure haute.

Poutres en V. (Système Warren.)

Fig. 372. — *Poutre en V supérieure.*

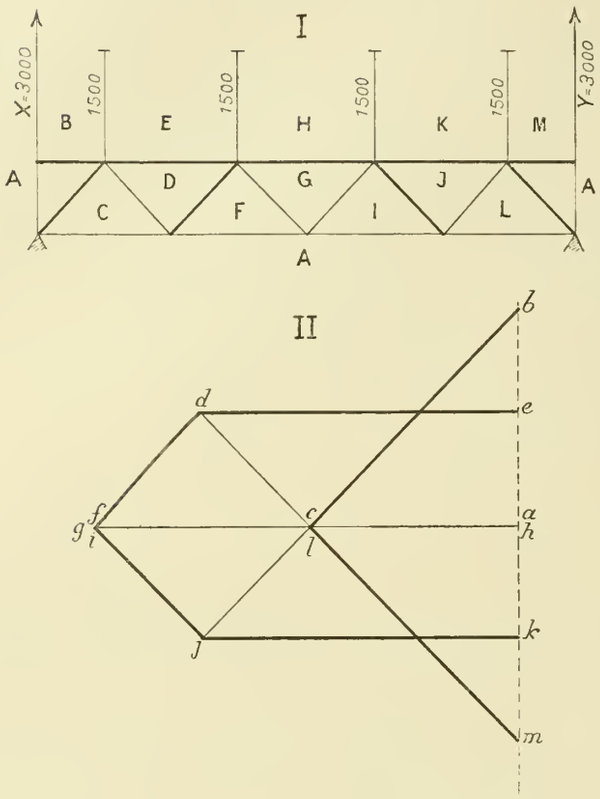


Fig. 372bis. — *Poutre en V inférieure.*

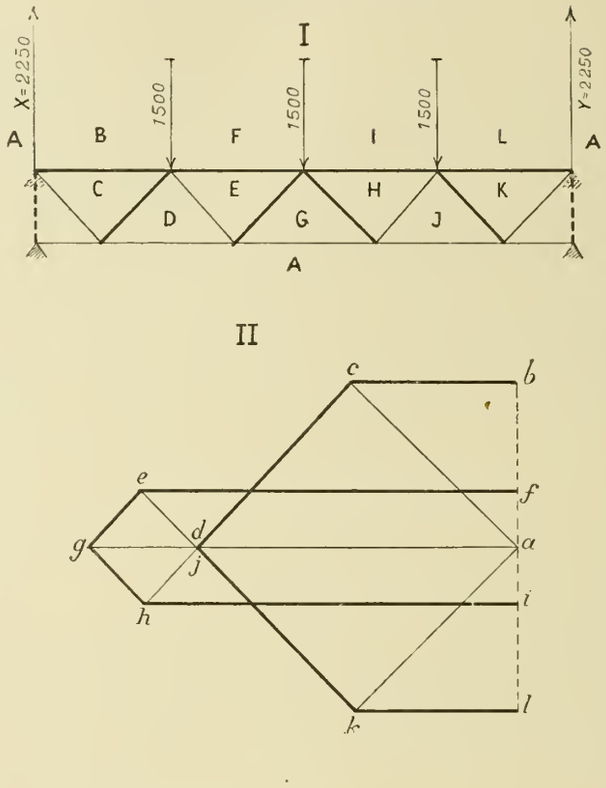


Fig. 373. — *Poutre en N supérieure. (Système Howe.)*

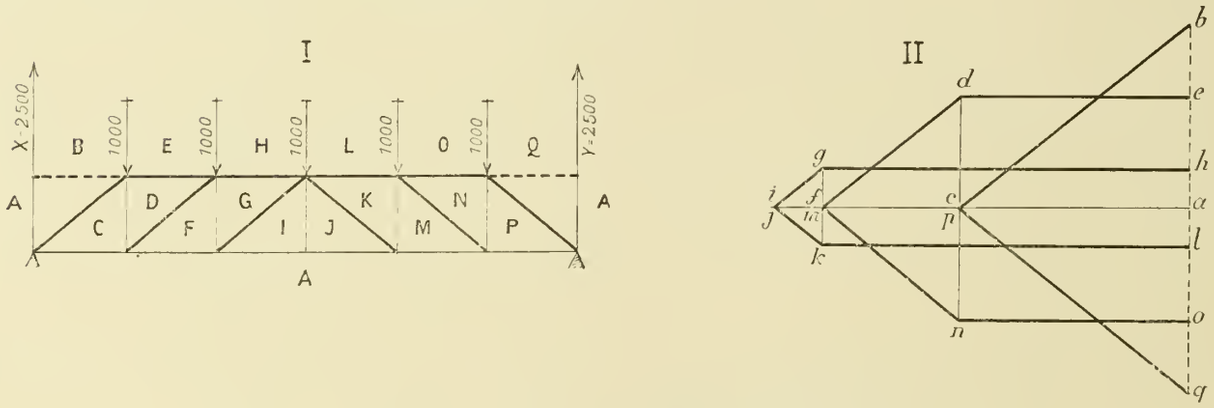
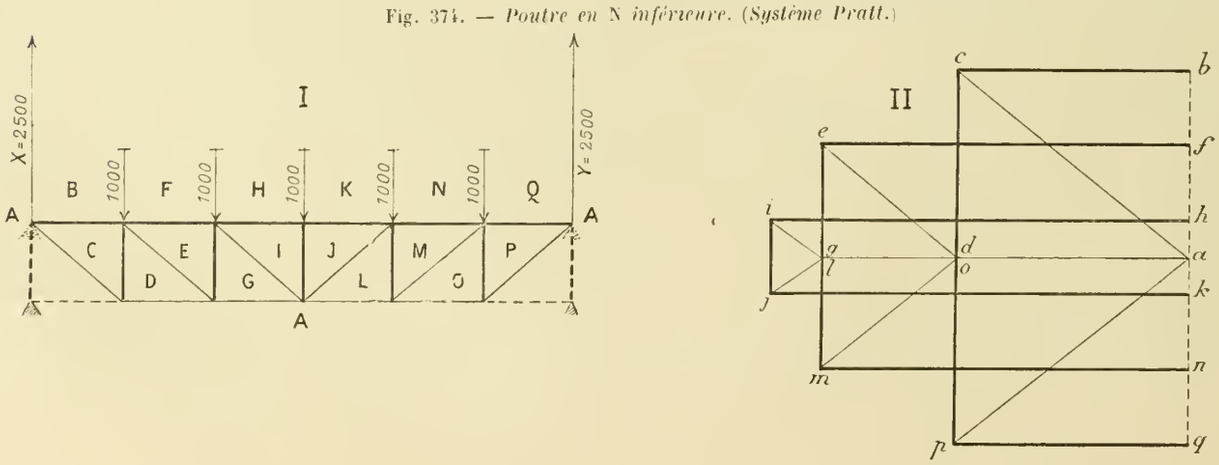


Fig. 374. — *Poutre en N inférieure. (Système Pratt.)*



et alors le mode de répartition des charges que nous avons adopté est conforme à la réalité.

385. **Divers systèmes de treillis simples.** — Les divers systèmes de treillis simples peuvent se ramener à deux types :

1° Le treillis en V du type **Warren** (fig. 372 et 372 *bis*), lequel se subdivise en *Poutre en* V *supérieure* (fig. 372), ainsi dénommée parce qu'elle est située en entier au-dessus des points d'appui, et en *Poutre en* V *inférieure* (fig. 372 *bis*), située au-dessous de ses points d'appui.

2° Le treillis en N, lequel se subdivise en *Poutre en* N *supérieure* (dite type **Howe**, fig. 373) et *Poutre en* N *inférieure* (dite type **Pratt**, fig. 374). Dans le type **Howe**, nous verrons que les barres inclinées sont comprimées, tandis que les montants sont tirés ; ce sera le contraire dans le type **Pratt**.

On ajoute quelquefois, dans la poutre Warren, une tige verticale allant d'un nœud de l'une des membrures au milieu de la membrure opposée ; cette tige ne sert qu'à transmettre au nœud la charge appliquée à son autre extrémité, ce qui soulage la membrure au milieu de laquelle la tige vient s'attacher. Ces tiges ne sont pas figurées sur le croquis.

Nous allons faire, rapidement, une étude comparative des tensions pour ces quatre types de poutres en treillis dans les trois hypothèses suivantes :

1re Hypothèse. — La poutre est uniformément chargée sur la membrure haute.

2e Hypothèse. — Elle est uniformément chargée sur la membrure basse.

3e Hypothèse. — Elle est uniformément chargée sur chacune des deux membrures.

386. **Poutres uniformément chargées sur la membrure haute** (fig. 372 et 372 *bis*, 373 et 374). — (*a*) **Poutre en V supérieure.** — Le nœud d'appui est sur la membrure basse (fig. 372). La charge uniformément répartie étant de 6000 k. sur la semelle supérieure de la poutre, il y a quatre nœuds recevant chacun 1500 k.; les réactions des appuis sont égales chacune à 3000 k. Nous séparons les intervalles et nous construisons l'épure des tensions, comme il a été dit pour les fermes (fig. 372-II).

(*b*) **Poutre en V inférieure.** — Le nœud d'appui est sur la membrure basse (fig. 372 *bis*). Dans ce cas, il n'y a sur la semelle supérieure que trois nœuds supportant chacun 1500 k.; les réactions des appuis sont égales chacune à 3000 k., puisque la charge de la poutre est de 6000 k.; mais au point de vue de l'épure des tensions des barres, nous ne devons considérer que des réactions de $\frac{3 \times 1500}{2} = 2250$ k., la demi-charge sur la barre BC étant reportée directement sur le point d'appui. Ces deux épures nous donnent les résultats comparatifs suivants :

1° La semelle supérieure est comprimée, la semelle inférieure est tirée.

2° Les barres symétriques par rapport à la verticale du milieu de la poutre sont également tirées ou comprimées, les barres comprimées étant celles qui, prolongées, se rencontreraient au-dessus de la poutre, les barres tirées, celles qui se rencontreraient au-dessous.

3° Dans les membrures, les efforts de traction ou de compression sont minima près des points d'appui, maxima au milieu de la poutre.

4° Dans les barres, les efforts sont, au contraire, minima au milieu de la poutre et maxima près des appuis.

Remarque I. — Dans le cas où le nœud d'appui est sur la semelle inférieure (fig. 372-I), les deux barres inclinées FG et GI qui se rencontrent sur l'axe de la poutre ne sont soumises à aucun effort (fig. 372-II).

Remarque II. — A ses extrémités, la poutre est ordinairement terminée par un montant vertical *ab*, relié au nœud voisin par un bout de membrure *bc* (fig. 375).

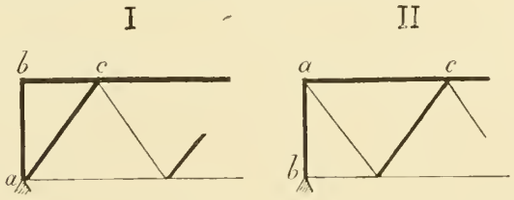


Fig. 375

Dans le 1er cas (fig. 375-I), le montant *ab* ne subit aucun effort si la charge est sur la semelle inférieure ; si elle est sur la semelle supérieure, il supporte une compression égale à la portion de charge afférente au nœud d'appui.

Dans le 2e cas (fig. 375-II), le montant *ab* est comprimé et supporte la réaction totale du point d'appui ; la membrure *bc* ne subit aucun autre effort qu'une flexion due à son propre poids ; on lui donne généralement la même section qu'à la membrure voisine.

En réalité, dans le cas de la fig. 375-I, les barres *ab* et *bc* sont tout à fait inutiles et on peut les supprimer ; dans le cas de la fig. 375-II, la barre verticale *ba* doit être considérée comme un prolongement de la pile d'appui, et la barre horizontale qui aboutit à sa base *b* est inutile.

(*c*) **Poutre en N supérieure dite : Howe** (fig. 373). — Cette poutre supporte une charge uniformément répartie de 6000 k.; comme il y a cinq nœuds sur la semelle supérieure, chacun d'eux supporte 1000 k.; les réactions des appuis à considérer pour l'épure des tensions sont égales à 2500 k.

Nous trouvons les résultats suivants :

1° La semelle supérieure est comprimée, la semelle inférieure est tirée.

2° Toutes les barres obliques sont comprimées, tous les montants sont tirés ; les efforts sont les mêmes dans deux barres symétriques par rapport à l'axe de la poutre.

3° Pour les efforts supportés par les membrures et par les barres, nous faisons les mêmes remarques que dans le cas de la poutre Warren. L'effort supporté par le montant IJ, qui est dans l'axe, est nul.

(*d*) **Poutre en N inférieure; type Pratt** (fig. 374). — Cette poutre est dans les mêmes conditions que la précédente ; la seule différence consiste en ce que les barres obliques sont tirées, tandis que les montants sont comprimés. Le montant IJ qui est dans l'axe transmet simplement au nœud inférieur la charge appliquée à son extrémité supérieure.

(*e*) **Comparaisons.** — 1° *Membrures.* Les dynamiques II et II montrent que les membrures hautes du système Howe supportent les mêmes efforts, en valeur absolue, que les membrures basses du système Pratt; seulement ce sont des compressions dans le premier cas et des tractions dans l'autre; il en est de même pour les autres membrures. Or, à égalité de longueur et à égalité d'effort, une pièce comprimée doit, à cause du flambement, prendre plus de métal qu'une pièce tirée ; à ce point de vue, le système Pratt ayant deux barres (BC et PQ) comprimées de plus que l'autre lui serait inférieur.

2° *Barres.* Les barres tirées dans le système Howe sont comprimées dans l'autre et inversement. Ici le système Pratt prend un grand avantage parce que, d'une part, les barres comprimées sont les plus courtes en tant que barres verticales, et, d'autre part, leurs efforts sont moindres que pour les barres obliques.

En définitive, les systèmes dits *inférieurs*, soit en V, soit en N, sont plus économiques que les systèmes dits *supérieurs*.

387. **Poutres uniformément chargées sur la membrure basse** (fig. 376, 377, 378 et 379). — (*a*) **Poutres en V, système Warren** (fig. 376 et 377). — Le calcul des réactions se fait comme précédemment. La séparation des espaces est analogue. L'épure se fait de la même manière, et nous arrivons aux mêmes conclusions que dans le cas où la charge est sur la semelle supérieure.

Lorsque le nœud d'appui est sur la semelle supérieure, les deux barres qui se rencontrent sur l'axe ne sont soumises à aucun effort.

On remarquera la ressemblance des dynamiques pour les poutres chargées en haut et pour celles chargées en bas. Le dynamique fig. 376-II est identique au dynamique fig. 372 *bis*-II, et 377-II est identique à 372-II ; seulement les pièces tirées dans l'un sont comprimées dans l'autre et inversement.

Des remarques analogues sont à faire pour les poutres en N qui suivent.

(*b*) **Poutre en N supérieure** (*système Howe*), fig. 378. — Explications inutiles.

(*c*) **Poutre en N inférieure** (*système Pratt*), fig. 379. — Explications inutiles.

(*d*) **Avertissement.** — Dans les exemples qui précèdent nous avons déterminé les tensions des barres en construisant un diagramme qui n'était autre chose que la réunion, en une seule figure, des dynamiques partiels établissant l'équilibre de chacun des nœuds de la poutre; c'est la méthode du *dynamique* dite méthode de **Cremona** (1).

Mais on peut y arriver, plus simplement peut-être et avec plus de précision, en construisant d'abord le polygone funiculaire représentatif des moments fléchissants en chaque point et en déduisant de ces moments les tensions des barres. Ce sera la méthode du *funiculaire*, ou des *moments* dite encore méthode de **Culmann**.

Nous allons exposer cette méthode, rendue très pratique par l'emploi des funiculaires Collignon si faciles à construire avec précision. Nous la recommandons surtout lorsque les charges sont différentes sur chaque nœud.

388. **Poutres uniformément chargées sur chacune des deux membrures.** — Dans une poutre en treillis, le poids propre de la poutre doit, d'après ce que nous avons dit au n° 381, être réparti entre les différents nœuds; pour une première étude, on supposera que tous les nœuds sont, de ce fait, également chargés.

Quant à la charge uniformément répartie, elle sera placée sur l'une des semelles de la poutre et répartie entre les nœuds de cette semelle.

(*a*) **Poutre Warren** (fig. 381). — Cette poutre pèse 5.000 k.; chaque nœud prend pour sa part 500 k. La charge uniformément répartie placée sur la semelle supérieure est de 2.500 k.; chaque nœud de cette semelle porte un cinquième de cette charge soit 500 k., de telle sorte que chaque nœud de la semelle supérieure porte 1.000 k., tandis que chaque nœud de la semelle inférieure porte 500 k. — Les réactions des appuis sont égales entre elles et ont pour valeur 3.500 k.

(*b*) **Tension des barres: emploi du dynamique** (*Cremona*). — 1. *Séparation des espaces. Conventions.* — La construction du diagramme de **Cremona** présente quelques difficultés lorsque les charges sont réparties à la fois sur chacune

(1) **Cremona**, ingénieur italien, avec **Culmann** l'un des créateurs de la Statique graphique.

Poutres chargées sur la membrure basse.

Poutres en V. (Système Warren.)

Fig. 376. — *Poutre en V supérieure.*

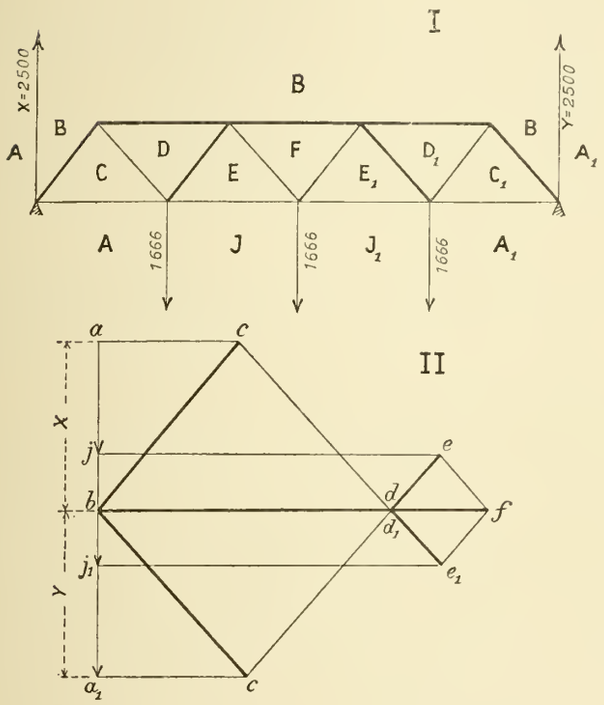


Fig. 377. — *Poutre en V inférieure.*

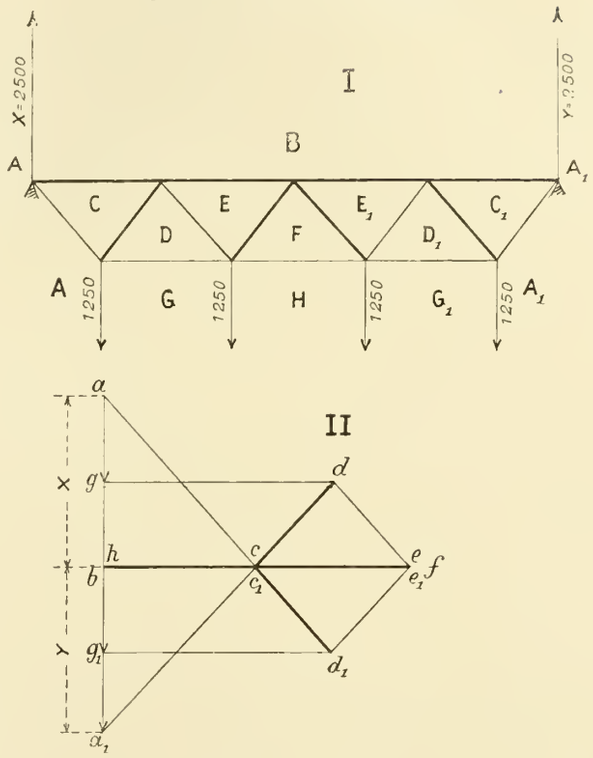


Fig. 378. — *Poutre en N supérieure. (Système Howe.)*

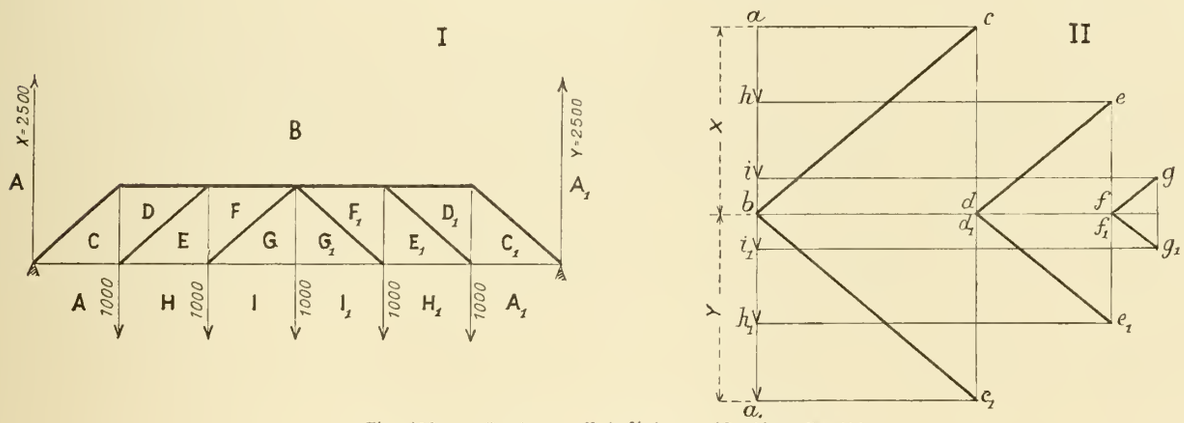
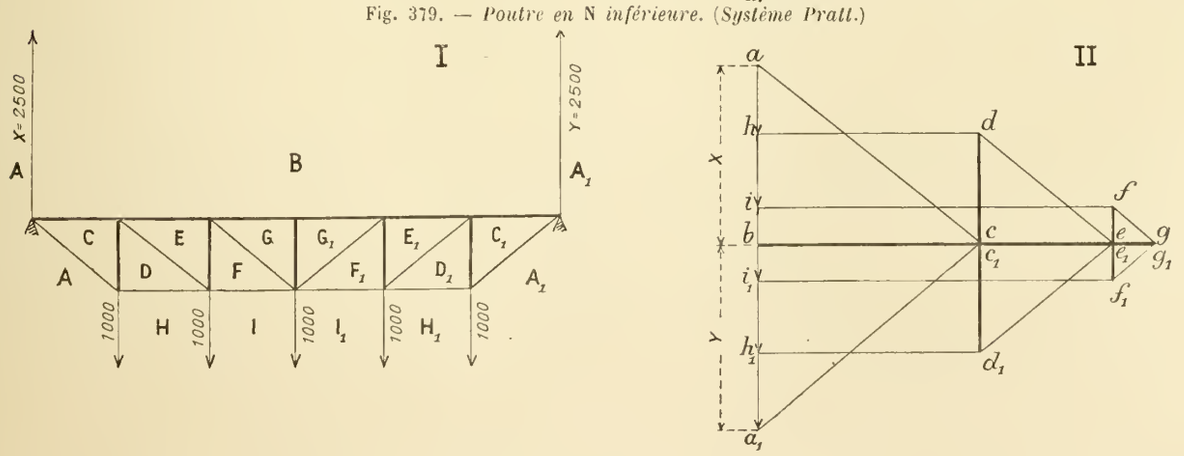


Fig. 379. — *Poutre en N inférieure. (Système Pratt.)*



des deux membrures ; elles tiennent à la manière de faire entrer, dans le diagramme, les forces inférieures telles que f (fig. 380-I) et de séparer les espaces.

Quand il s'agira de l'équilibre statique de la pièce la force basse f sera supposée prolongée jusqu'en f'' au-dessus de la membrure haute dans l'espace E, entre les deux forces hautes BE et EH; et cet espace E sera, de ce fait, séparé par la force f'' en deux espaces qui seront l'un E à gauche et l'autre E_1 à droite. Alors, dans le diagramme des efforts statiques (fig. 381-IV), les forces basses apparaissent avec les lettres ee_1 — hh_1 — kk_1 — nn_1.

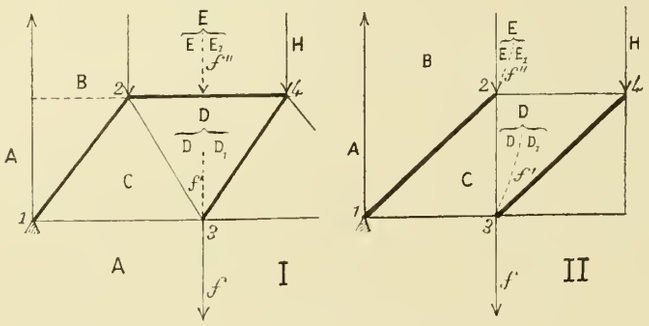


Fig. 380

Quand il s'agira d'étudier le dynamique d'un nœud inférieur, tel que le nœud n° 3, la même force f sera prolongée en f' dans l'espace D, qu'elle divisera en deux espaces partiels D et D_1; sur les diagrammes des nœuds (fig. 381-IV) les forces basses apparaîtront sous les dénominations dd_1 ou gg_1 ou jj_1 ou mm_1.

Dans le cas de la poutre en N (fig. 380-II), on fera des conventions analogues, en imaginant que la force f, quand elle est transportée en f' ou en f'', est accolée à la barre verticale, de sorte que l'espace partiel de gauche D ou E est infiniment petit, tandis que celui de droite D_1 ou E_1 est égal à l'espace total primitif.

II. *Epure* (fig. 381-I et IV). — Séparons les intervalles comme il vient d'être dit, et construisons l'épure.

L'équilibre statique est fourni en portant bout à bout (fig. IV) les charges, savoir: be (charge haute), ee_1 (charge basse), e_1h (charge haute), etc.....

A cause de la symétrie, les réactions des appuis sont égales entre elles et à 3.500 k.

L'une Y a pour représentative pa, l'autre X a pour représentative ab (fig. IV).

Le nœud d'appui BAC a pour dynamique bac.

Le nœud supérieur n° 2 sépare les espaces CBED; son dynamique est $cbedc$.

Le nœud inférieur n° 3 sépare les espaces $DCAFD_1$; son dynamique est $dcafd_1d$.

On voit que la force basse qui apparaissait pour l'équilibre statique en ee_1 apparaît maintenant en dd_1.....

Le lecteur achèvera facilement l'épure.

Nous voyons que : 1° La semelle supérieure est comprimée, la semelle inférieure est tirée.

2° Les barres symétriques par rapport à l'axe sont également tirées ou comprimées ; les barres comprimées étant celles qui, prolongées, se rencontreraient au-dessus de la poutre.

3° Dans les membrures, les efforts sont maxima au milieu de la poutre ; minima aux extrémités. Dans les barres, les efforts sont, au contraire, minima au milieu et maxima aux extrémités.

(*c*) **Tensions des barres. Méthode des moments** (*Kulmann*) (fig. 381-I, II et III). — Le principe de cette méthode a été donné à l'occasion de la ferme Polonceau à trois bielles par arbalétrier. (N° 382-*b*-II.)

Elle consiste à couper la poutre par un plan tel que RS rencontrant trois barres (fig. 380-I). Si nous enlevons le tronçon situé à gauche de ce plan, nous pouvons le remplacer par la résultante des forces qui y sont appliquées. On sait que cette résultante transportée dans le plan de la section est égale à l'effort tranchant dans la section RS de la poutre ; le moment du couple de transport qu'il faut lui adjoindre n'est autre chose que le moment fléchissant dans la même section RS.

Les efforts de réaction développés par les trois barres coupées ED, DF, FA, font équilibre à la résultante des forces situées à gauche de RS, ou encore à l'ensemble de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la section RS.

Construisons un funiculaire de Collignon (fig. 381-II et III) qui nous donne la représentative des moments fléchissants et celle des efforts tranchants (v. n° 42); nous allons pouvoir en déduire les tensions des différentes barres.

Sur la figure 381-III, le funiculaire des moments est le polygone XZY. Les représensatives des efforts tranchants sont les horizontales, en gradins, figurées en traits mixtes.

1° *Tensions des membrures* (fig. I, II et III). — Raisonnons sur une portion quelconque de membrure; sur la portion de membrure basse FA, par exemple.

Prenons les moments par rapport au point 4 (fig. I) où se rencontrent les barres ED et DF; la somme de ces moments doit être nulle.

Si h est la hauteur comprise entre les centres de gravité des membrures haute et basse, la tension fa de la membrure basse FA a pour moment $fa \times h$; ce moment est négatif, puisqu'il doit être égal et de signe contraire au moment fléchissant positif au point 4, lequel est mesuré par $\beta_1\delta$ de la fig. III. Il en résulte que la réaction qu'exerce la barre FA sur la partie de gauche de la poutre est dirigée de gauche à droite; la membrure FA est donc tirée.

En valeur absolue, nous aurons, en remarquant que dans le funiculaire Collignon XZY la distance polaire est $d = 1/2l$,

$$\overline{fa} = \frac{\overline{\beta_1\delta} \times l}{2h}. \tag{1}$$

Construisons fa; à cet effet :

Prenons sur l'axe de la poutre (fig. III) une longueur $\omega\lambda$ égale à h, joignons le point λ à l'extrémité de gauche X; menons par le point δ une horizontale ; le segment fa intercepté entre la verticale Xf et la droite $X\lambda$ donne, à l'échelle des forces, la valeur absolue, de la tension fa, de la membrure FA.

Cela résulte de la similitude des triangles faX et $X\omega\gamma$ (fig. III); on a en effet :

$$\frac{h}{\overline{\omega X}} = \frac{\overline{fX}}{\overline{fa}} \quad \text{et comme} \quad \overline{fX} = \overline{\beta_1\delta} \quad \text{et} \quad \overline{\omega X} = \frac{l}{2},$$

on en déduit l'égalité (1).

Si nous prenons maintenant les moments par rapport au point 3, nous obtiendrons la tension ed de la membrure haute ED; nous reconnaîtrons, de la même manière, que c'est une compression, donnée sur l'épure par la longueur ed interceptée entre la verticale d'origine Xd et l'oblique $X\lambda$, sur l'horizontale menée par le sommet γ du funiculaire des moments qui est à plomb du nœud opposé à la membrure considérée.

En résumé la tension dans une membrure se trouve toujours en prenant les moments par rapport au nœud qui lui est opposé.

Poutres chargées sur chacune des membrures

Poutre en V supérieure (système Warren)

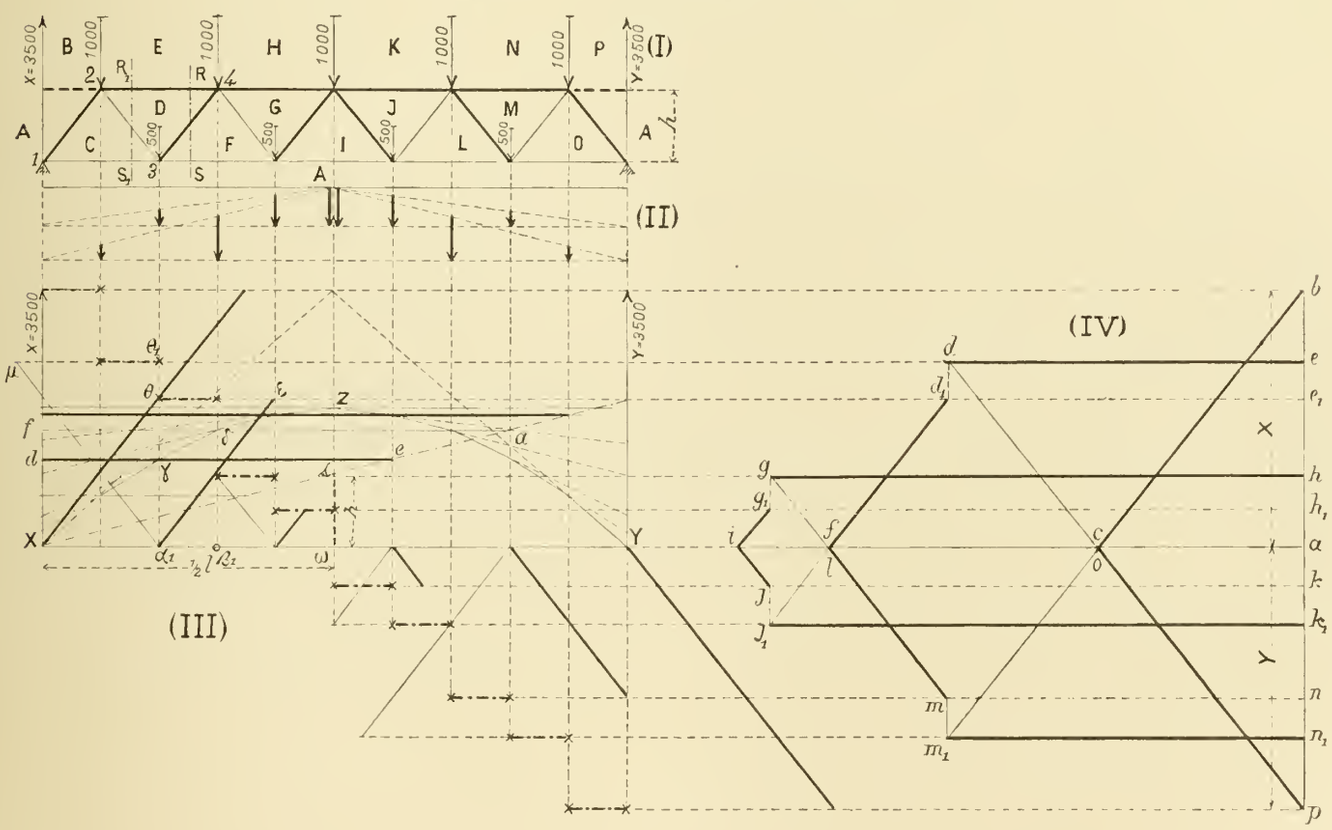


Fig. 381

2° **Tensions des barres obliques** (fig. I et III). — Pour obtenir la tension de la barre oblique DF, projetons sur un axe vertical les tensions des trois barres ED, DF, FA et la résultante des forces agissant sur le tronçon de gauche.

La somme de ces projections doit être nulle.

Les tensions des barres DE et FA, qui sont horizontales, ont des projections nulles ; la force provenant du tronçon de gauche est l'effort tranchant dans la section RS, effort positif égal à $\alpha_1 0$ (fig. III). En menant par le point α_1 une parallèle $\alpha_1\varepsilon$ à la barre DF, jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale du point 0, la longueur $\alpha_1\varepsilon$ donne, à l'échelle des forces, la tension de la barre DF ; cette tension, devant avoir une projection négative, est dirigée dans le sens $\varepsilon\alpha_1$; par suite c'est une compression, car elle pousse sur le nœud n° 3.

En coupant la poutre par un plan R_1S_1 qui rencontre la barre CD, et en opérant de même, nous aurons la tension de cette barre; c'est une traction. On l'obtient sur l'épure en menant par le point α_1 une parallèle à la barre CD, et prenant le segment $\alpha_1\mu$ intercepté sur cette parallèle, entre le point α_1 et le point μ où elle rencontre l'horizontale menée par le point θ_1; $\alpha_1\theta_1$ étant l'effort tranchant dans la section R_1S_1.

La tension d'une barre oblique s'obtient donc au moyen de l'effort tranchant entre les extrémités de cette barre.

Cette étude nous conduit aux mêmes conclusions que la précédente; les résultats fournis par la méthode des moments sont identiques à ceux que donne l'épure des tensions faite par le polygone dynamique, comme on peut le voir en comparant les figures III et IV.

Remarquons que les tensions dans les barres inclinées parallèles changent de signe en même temps que l'effort tranchant.

Enfin, bien que la méthode des moments soit absolument générale, les procédés graphiques que nous venons de donner ne s'appliquent qu'aux poutres droites de hauteur constante.

Poutres chargées sur chacune des membrures

Poutre en N supérieure (système Howe)

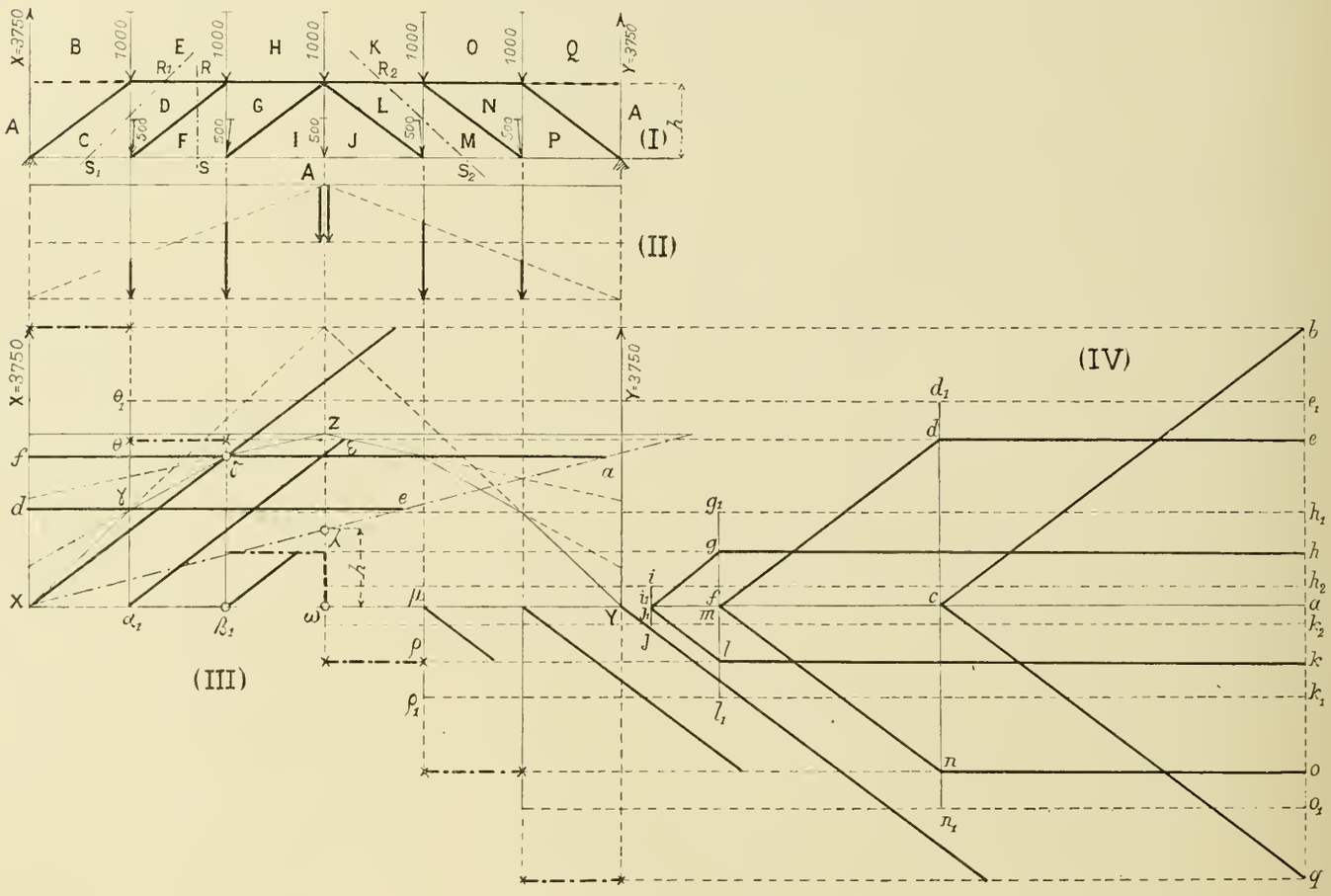


Fig. 382

(*d*) **Poutre en N supérieure type Howe** (fig. 382). — Cette poutre pèse 6.000 k.; chaque nœud prend pour sa part 500 k.; la charge uniformément répartie placée sur la semelle supérieure est de 3.000 k.; chaque nœud de cette semelle porte un sixième de cette charge, soit 500 k. De telle sorte que chaque nœud de la semelle supérieure porte 1.000 k., tandis que chaque nœud de la semelle inférieure porte 500 k. Les réactions des appuis sont égales entre elles et ont pour valeur 3.750 k.

I. *Epure des tensions; méthode* **Cremona** (fig. 382-IV). — Cette épure se fait comme la précédente. Elle nous montre que :

1° La semelle supérieure est comprimée, la semelle inférieure est tirée.

2° Les barres obliques sont toutes comprimées et les barres symétriques par rapport à l'axe sont soumises à des tensions égales.

3° Les montants verticaux sont tirés; la tension de chacun

d'eux est égale à ce qu'elle serait si toute la charge était sur la semelle supérieure, plus la valeur de la charge appliquée au nœud inférieur. Les montants symétriques par rapport à l'axe sont également tirés; le montant sur l'axe, IJ, ne fait que transmettre, au nœud de la semelle supérieure, la charge appliquée à son extrémité inférieure.

4° Dans les membrures, les efforts sont maxima au milieu de la poutre, et minima aux extrémités; dans les barres et les montants, les efforts sont, au contraire, minima au milieu et maxima aux extrémités.

II. *Méthode des moments* (**Kulmann**) (fig. 382-I, II et III). — Comme dans le cas précédent, nous construirons un funiculaire de Collignon (fig. II et III) qui nous donne les moments fléchissants en XZY et les efforts tranchants. Ces derniers sont figurés en traits mixtes horizontaux.

Nous calculerons encore les tensions des barres en coupant la poutre par un plan qui ne rencontre que trois barres; nous trouverons les résultats suivants :

1° *Tensions des membrures* (fig. I et III). — En coupant la poutre par le plan RS, nous rencontrons les deux membrures ED et FA.

Prenons les moments par rapport au nœud CDFA, nous obtiendrons la tension de la barre ED; c'est une compression. Les moments par rapport au nœud FGHE nous fourniront la tension de la barre FA; c'est une traction *fa* (fig. III).

Nous déduirons ces tensions de la courbe des moments, comme il a été dit plus haut pour la poutre Warren.

La tension dans une membrure se trouve donc encore en prenant les moments par rapport au nœud qui lui est opposé.

2° *Tensions des barres obliques* (fig. I et III). — Le même plan de section RS coupe la barre oblique DF; la projection, sur la verticale, de la tension de cette barre est égale et de signe contraire à l'effort tranchant $\alpha_1\theta$ dans la section RS de la poutre.

Menons par le point α_1 une parallèle $\alpha_1\varepsilon$ à la barre DF, jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale menée par le point θ; la longueur $\alpha_1\varepsilon$ donne la tension de la barre DF. C'est une compression.

La tension dans une barre oblique s'obtient donc au moyen de l'effort tranchant entre les extrémités de cette barre.

3° *Tensions des montants* (fig. I et III). — Coupons la poutre par le plan oblique R_1S_1 qui rencontre le montant CD. La projection, sur la verticale, de la tension de ce montant, c'est-à-dire cette tension elle-même est égale et de signe contraire à la somme des projections des forces appliquées au tronçon de gauche qui est enlevé, c'est-à-dire à la résultante de ces forces.

Ces forces comprennent : 1° toutes les forces situées à gauche du montant CD; 2° la force appliquée à son nœud supérieur. La résultante de ces forces est donc égale à l'effort tranchant dans l'intervalle situé à droite du montant CD, soit $\alpha_1\theta$, augmenté, en valeur absolue, de la valeur de la charge appliquée au nœud inférieur de ce montant, ce qui donne, pour la résultante, la valeur $\alpha_1\theta_1$.

La tension du montant CD est une traction ayant pour valeur $\alpha_1\theta_1$.

Le montant sur l'axe subit une traction égale à la charge qui est appliquée à son nœud inférieur; il ne fait que transmettre cette charge au nœud supérieur.

Si nous coupons la poutre par un plan oblique R_2S_2 rencontrant le montant LM, nous trouverons que la tension de ce montant est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle situé à sa gauche, soit $\mu\rho$, augmenté en valeur absolue de la valeur de la charge appliquée au nœud inférieur de ce montant, ce qui donne la valeur $\mu\rho_1$; c'est une traction.

La tension dans un montant s'obtient donc en prenant l'effort tranchant dans l'intervalle voisin de ce montant et situé du côté de l'axe, augmenté, en valeur absolue, de la charge appliquée au nœud inférieur de ce montant.

(*e*) **Poutre en N inférieure** (système Pratt). — Nous n'avons pas fait les épures relatives à cette poutre dont l'étude est tout à fait analogue à celle de la poutre Howe.

Le calcul des tensions des membrures et des barres obliques se fait de la même manière; seulement ces dernières sont tirées.

Pour le calcul des montants, on coupera encore par des plans obliques rencontrant un montant et deux membrures.

On verra facilement que la tension d'un montant, qui est toujours ici une compression, s'obtient en prenant l'effort tranchant dans l'intervalle voisin de ce montant et situé du côté de l'appui, diminué, en valeur absolue, de la charge appliquée au nœud inférieur de ce montant.

Le montant sur l'axe ne supporte qu'un effort égal à la charge placée à sa partie supérieure, et qu'il transmet directement au nœud inférieur.

390. **Poutre chargée d'un poids unique sur un nœud.** — Nous supposerons que ce nœud appartient à la membrure haute (fig. 383 et 384).

(*a*) **Poutre Warren** (fig. 383-I et II). — Cette poutre est chargée d'un poids unique P appliqué au nœud α de la semelle supérieure.

La représentative des moments est $M_1\alpha_2N_1$, obtenue par la méthode Collignon; la représentative des efforts tranchants est Xtt_1y; l'effort tranchant change de signe dans la section α.

Appliquons la méthode donnée au numéro précédent

pour obtenir les tensions des membrures et des barres en les déduisant des deux représentatives des moments fléchissants et des efforts tranchants; nous verrons que, pour toutes les barres situées à gauche de la section α, c'est l'effort tranchant positif M_1X à gauche de α, qui détermine les tensions, tandis que pour les barres situées à droite de α, c'est l'effort tranchant négatif N_1y, existant à droite de α, qu'il faut considérer.

Les deux barres aboutissant au nœud α sont comprimées. Le sens des tensions des barres inclinées dans le même sens change en même temps que le signe de l'effort tranchant, c'est à-dire lorsqu'on passe d'un côté à l'autre du nœud α auquel est appliquée la charge.

Remarque. — Si la charge était appliquée à un nœud de la membrure basse, les résultats trouvés seraient analogues, mais les deux barres aboutissant au nœud chargé seraient tirées.

(*b*) **Poutre Howe** (fig. 384-I et II. — Le nœud α situé sur la semelle supérieure reçoit la charge P.

En opérant comme pour la poutre Warren, nous reconnaîtrons encore que pour toutes les barres situées à gauche de α, c'est l'effort tranchant positif M_1X à gauche de α qui détermine les tensions tandis que pour les barres situées à droite de α, c'est l'effort tranchant négatif N_1y à droite de α qu'il faut considérer.

Poutres chargées d'un poids unique sur un nœud.

Poutre en V

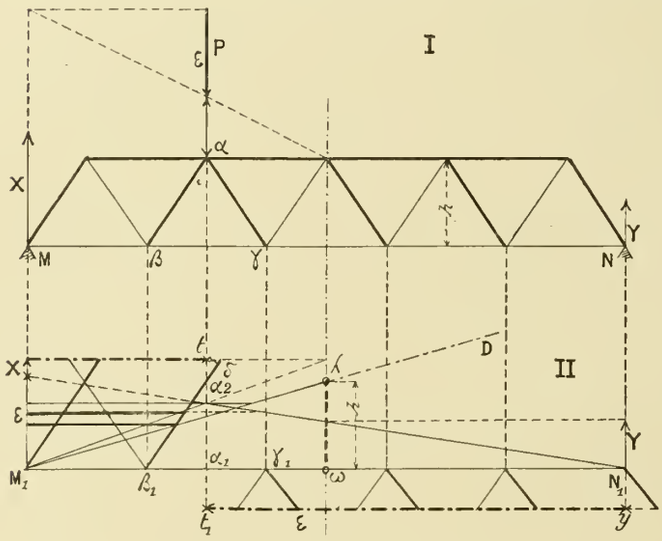


Fig. 383

Poutre en N

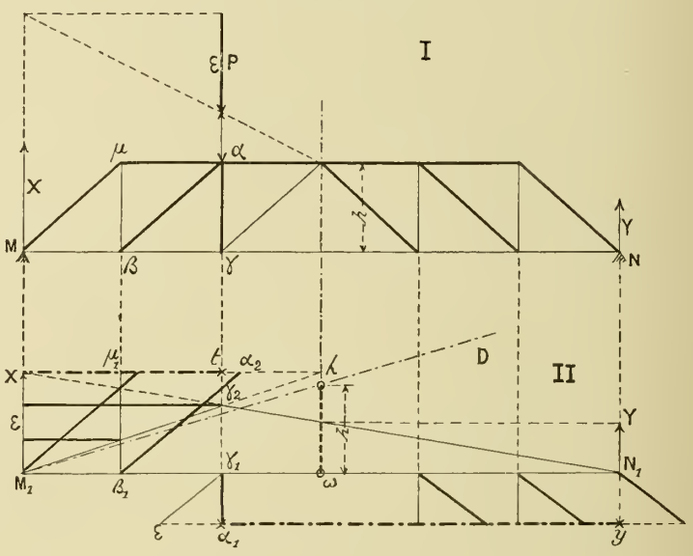


Fig. 384

Les deux barres aboutissant au nœud α sont comprimées; la tension du montant $\alpha\gamma$ est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle voisin de ce montant et situé du côté de l'axe de la poutre.

Remarque. — Si la charge était appliquée sur la semelle inférieure, les résultats seraient analogues, mais les deux barres aboutissant au nœud chargé seraient tirées. La tension dans le montant situé à plomb du nœud chargé est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle voisin de ce montant et situé du côté de l'appui.

(*c*) **Poutre Pratt.** — Nous n'avons pas fait l'épure; elle est très analogue à la précédente. Nous verrions facilement : 1° que si la charge est sur la semelle supérieure, les deux barres aboutissant au nœud chargé sont comprimées; la tension du montant au droit du nœud chargé est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle voisin et situé du côté de l'appui ;

2° Que si la charge est sur la semelle inférieure, les deux barres aboutissant au nœud chargé sont tirées; la tension du montant au droit du nœud chargé est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle voisin et situé du côté de l'axe.

§ 13. — Charges roulantes sur les poutres en treillis

391. **Moments fléchissants dus à une charge roulante unique :**

(*a*) **Transmission de la charge** (fig. 385). — Dans les poutres en treillis et, bien souvent aussi, dans les poutres à âme pleine, la charge roulante P se déplace sur des poutres longitudinales dites *longerons* telles que LL, parallèles

aux membrures MM, mais qui ne sont pas confondues avec elles. Les longerons reposent sur des poutres transversales dites *pièces de pont* (ou entretoises portantes) GG qui leur sont perpendiculaires et ces pièces de pont, à leur tour, viennent s'assembler dans la poutre maîtresse proprement dite, en des points A et B qui, généralement, sont situés sur l'une des membrures.

Lorsque la poutre est en treillis, cette attache se fait au droit d'un des nœuds du treillis.

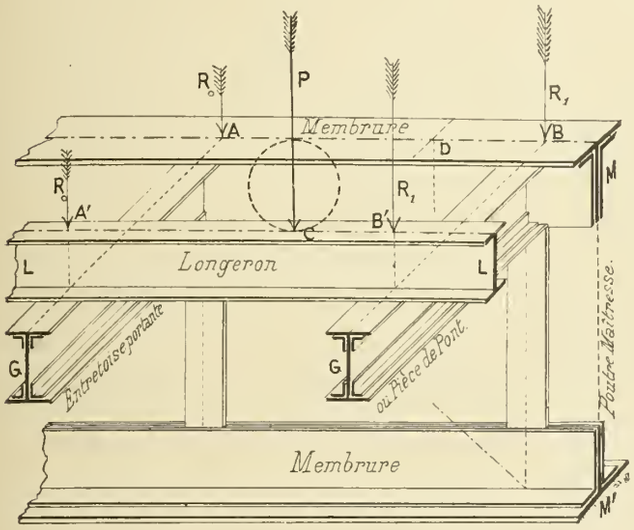


Fig. 385

Etudions ce dernier cas seulement.

La charge P donne, aux extrémités A' et B' du longeron, deux composantes R_0 et R_1 que la pièce de pont transmet en A et en B sur les nœuds de la membrure.

Une section quelconque D de la poutre subit, de ce fait : 1° un moment fléchissant et 2° un effort tranchant qui ne sont pas les mêmes que si la charge P circulait directement sur la membrure.

C'est ce que nous allons établir et étudier.

(*b*) **Moment fléchissant en un point.** — Soit AB (fig. 386-I), la portion de membrure comprise entre deux nœuds consécutifs A et B.

Supposons que C soit la position de la charge P sur le *longeron*. Proposons-nous de déterminer le moment fléchissant qu'elle produit sur un point D de la *membrure*.

Si la charge circulait sur la membrure elle-même nous avons vu (n° 273) que :

1° Si l'on traçait une parabole MVN ayant pour ordonnée maxima $IV = 1/4\ Pl$;

2° Si l'on prenait en C' le point de cette parabole situé au droit de la charge ;

3° En joignant C'M et C'N, ces deux droites seraient les représentatives des moments fléchissants.

Prenons en α et en β les points où ces droites rencontrent les verticales des nœuds A et B. Les moments fléchissants de la poutre, au droit des nœuds A et B, ont pour valeur $A\alpha$ et $B\beta$; et, comme la charge P est sur le longeron et non pas sur la membrure, il en résulte que, pour la poutre maîtresse, la représentative des moments entre les nœuds est la droite $\alpha\beta$ et non pas la ligne brisée $\alpha C'\beta$.

Par conséquent pour la section D le moment a pour valeur $D\delta'$ au lieu de $D\delta$. C'est-à-dire qu'il est de $\delta\delta'$ plus petit que si la charge circulait directement sur la membrure.

Et même, en prenant la section en C, au droit de la charge, le moment serait CC'' au lieu de CC' ;

Par conséquent nous avions raison de dire que le moment maximum ne se produit plus en C au-dessous de la charge, car il a lieu en $B\beta$ sur le nœud de droite.

Si la charge P arrivait en B, la représentative des moments serait $B'A''M$ (fig. II) et si elle était en A, sa représentative serait $A'B''N$. C'est-à-dire que, dans chacun de ces deux cas, elle serait la même que si la charge circulait sur la membrure même. Il en serait de même si elle était en F, hors des nœuds ; la représentative serait $\alpha_1\beta_1$ (fig. I).

(*c*) **Point d'indifférence d'un entre-nœuds.** — Prenons en k' (fig. II) le point où les deux droites B'M et A'N se coupent : Le point K de la poutre situé à plomb de k' sera nommé par nous le *point d'indifférence* pour la raison suivante :

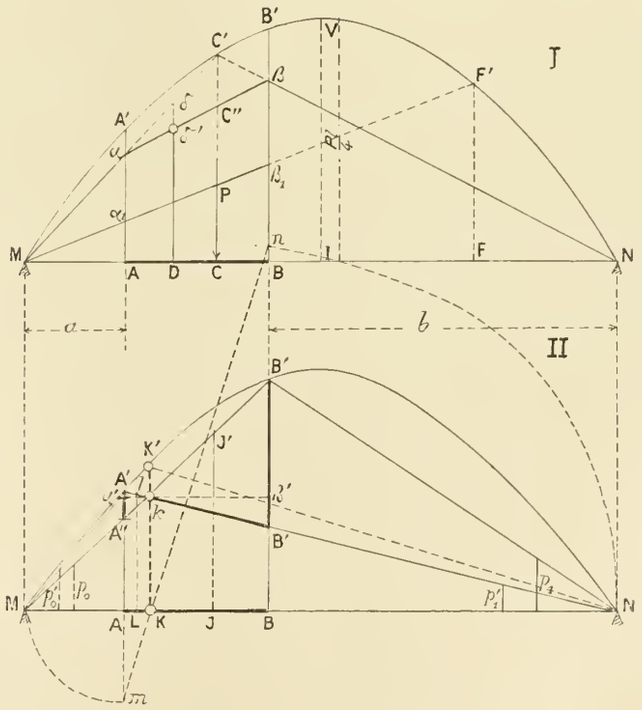


Fig. 386

Pour un point J situé à droite de K le moment sera maximum, lorsque la charge sera sur le nœud de droite B, et il aura pour valeur JJ' ; pour un point L situé à gauche de K

il sera maximum lorsque la charge sera sur le nœud de gauche et il aura pour valeur Ll.

En ce point K le moment maximum aura lieu indifféremment pour la charge placée sur le nœud de gauche ou sur celui de droite ; c'est ce qui justifie son titre.

Position du point d'indifférence. — Appelant p_0 et p'_0 les pentes des droites MB′ et MA′ ; p_1 et p'_1 celles des droites NB′ et NA′ ; rappelons que (V. n° 271) la somme des pentes $p_0 + p_1$ est égale à la somme des pentes p'_0 et p'_1 d'où l'on déduirait $p'_0 - p_0 = p_1 - p'_1$.

En vertu des triangles semblables A′KA″ et B′KB″ on a

$$\frac{AK}{KB} = \frac{A'A''}{B'B''} = \frac{AM(p'_0 - p_0)}{BN(p_1 - p'_1)} = \frac{AM}{BN} \qquad \text{donc :}$$

Le *point d'indifférence* partage l'entre-nœud dans le même rapport que celui des distances de chacun des nœuds à l'extrémité de la poutre situé de son côté.

Si les portions de membrures sont égales, alors il suffit de compter les nombres de segments situés à gauche et de ceux situés à droite ; par exemple s'il y a 3 segments à gauche de l'entre-nœuds AB et 5 situés à droite, le point d'indifférence partagera l'entre-nœud dans le rapport de 3 à 5.

(*d*) **Remarque** (fig. II). — Si la charge était en K, au point d'indifférence, les représentatives des moments hors des nœuds seraient les droites K′M et K′N recoupant les verticales des nœuds en α' et β' ; entre les nœuds la représentative serait la droite $\alpha'\beta'$; je dis qu'elle est horizontale.

Cela résulte évidemment de l'égalité de rapports précédente.

Cette remarque sera utilisée dans l'étude des efforts tranchants.

392. **Efforts tranchants dus à une charge roulante unique.** — L'effort tranchant est toujours donné par la pente de la représentative des moments ; par conséquent :

1° Si la charge est en F hors de la travée (fig. 386-I), l'effort tranchant est le même que si la charge circulait sur la membrure au lieu de se déplacer sur les longerons ; il est donné par la pente de la ligne $\alpha_1\beta_1$; il est donc positif si la charge est à droite de l'entre-nœud et négatif si elle est à gauche.

2° Si la charge est en C sur le longeron d'entre-nœud, alors l'effort tranchant est donné par la pente de la droite $\alpha\beta$; au lieu de l'être par les pentes des lignes αC′ et C′β ; il est donc constant, plus petit, en valeur absolue, qu'il n'eût été et il ne change pas de signe au droit de la charge.

3° Si (fig. II) la charge est au droit du *point d'indifférence*, l'effort tranchant, donné par la pente de la représentative $\alpha'\beta'$ des moments, est nul, puisque cette représentative est horizontale.

4° Par conséquent, si la charge est à gauche *du point d'indifférence*, l'effort tranchant est positif ; si elle est à droite, l'effort tranchant est négatif.

5° *Maxima.* — Le maximum de l'effort tranchant pour un point quelconque J de l'entre-nœud a lieu lorsque la charge est sur un des nœuds. Il y a un maximum positif, si la charge est sur le nœud de droite, et un maximum négatif, si elle est sur le nœud de gauche.

Les maxima positifs l'emportent, en valeur absolue, sur les négatifs dans la moitié de gauche de la poutre ; c'est le contraire dans la moitié de droite.

392 bis. **Démonstration algébrique des théorèmes précédents** (fig. 386 bis).

(*a*) **Moments fléchissants.** — Soit a la distance du nœud A à l'appui de gauche ; b la longueur de l'entre-nœud AB. Soit P une charge appliquée en C à une distance x de l'origine M. La réaction X de l'appui M, due à la charge P, est

$$X = \frac{P(l - x)}{l}$$

Cette charge P appliquée sur le longeron donne sur les nœuds A et B des composantes R_0 et R_1 qui ont pour valeur

$$R_0 = P\,\frac{a + b - x}{b} \qquad \text{et} \qquad R_1 = P\,\frac{x - a}{b}.$$

Soit D un point quelconque de l'entre-nœud et γ sa distance à l'origine ; calculons le moment fléchissant en ce point :

1er *Cas.* — La charge P est à gauche du nœud A ; alors le moment a pour valeur

$$M = P\,\frac{(l - x)\gamma}{l} - P(\gamma - x) = \frac{Px}{l}(l - \gamma).$$

Il est maximum pour $x = a$, c'est-à-dire lorsque la charge est sur le nœud A et il est alors égal à

$$(1) \qquad M_{max} = \frac{Pa}{l}(l - \gamma).$$

2e *Cas.* — La charge P est à droite du nœud B ; le moment a pour valeur

$$M = P\,\frac{(l - x)\gamma}{l}.$$

Il est maximum pour $x = a + b$, c'est-à-dire lorsque la charge est sur le nœud B et il a pour valeur

$$(2) \qquad M_{max} = \frac{P(l - a - b)\gamma}{l}.$$

3e *Cas.* — La charge P est entre les nœuds A et B ; le moment a pour valeur $X\gamma - R_0(\gamma - a)$, ou, en remplaçant X et R_0 par leurs valeurs ci-dessus et simplifiant,

$$(3) \qquad M' = \frac{Pa(a + b - \gamma)}{b} + \frac{Px}{bl}(\gamma l - la - \gamma b).$$

Pour $x = a$ et pour $x = a + b$, c'est-à-dire lorsque la charge est au droit des nœuds, on verra facilement que les valeurs de ces moments sont les mêmes que celles (1) et (2) trouvées ci-dessus ; et comme l'équation (3) est du 1er degré en x elle représente une ligne droite, qui est la représentative $\alpha'\beta'$ de la figure 386.

Si l'on a $\gamma\lambda - la - \gamma b > 0$, le maximum, pour le point D d'abscisse γ, aura lieu lorsqu'on aura $x = a + b$, c'est-à-dire pour la charge placée en B.

Si l'on a $\gamma l - la - \gamma b < 0$, il aura lieu pour $x = a$, c'est-à-dire pour la charge placée en A.

Si l'on a $\gamma l - la - \gamma b = 0$, c'est-à-dire pour

$$\gamma = \frac{la}{l - b},$$

il y aura égalité entre les deux maxima. Cette abscisse γ est précisément celle trouvée ci-dessus pour le point d'indifférence K.

(*b*) **Efforts tranchants.** — 1er *Cas.* — La charge P est à gauche de A. L'effort tranchant est égal à la réaction X de l'appui M, diminuée de P

$$T = \frac{P(l - x)}{l} - P = -\frac{Px}{l}.$$

Il atteint sa valeur maxima pour $x = a$ et cette valeur est

(4) $$T_{max} = -\frac{Pa}{l}.$$

2e *Cas.* — La charge P est à droite de B ; l'effort tranchant a pour valeur

$$T = \frac{P(l - x)}{l}.$$

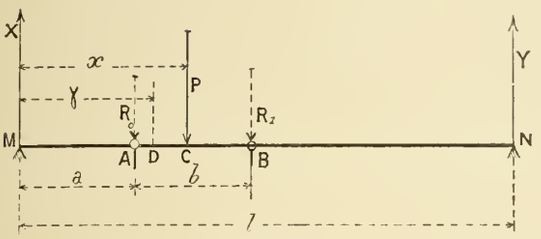


Fig. 386 bis

Son maximum a lieu pour $x = a + b$, et il est

(5) $$T_{max} = \frac{P(l - a - b)}{l}.$$

3e *Cas.* — La charge P est entre A et B. L'effort tranchant en D est égal à la réaction X de l'appui M, diminuée de la composante R_0 de la charge : ce qui donne après simplifications

(6) $$T = \frac{P(lx - bx - al)}{lb}.$$

Il est nul pour

(7) $$x = \frac{al}{l - b}.$$

Ce qui répond précisément au point d'indifférence K.

393. Application à une poutre en V.

(*a*) **Tension maxima des membrures.** — Nous avons vu (v. n° 388-*c*-**1°**) que pour calculer la tension d'un segment de membrure, on prenait le moment fléchissant répondant au nœud qui est opposé à cette membrure et, si M est ce moment, si h est la distance de la membrure à ce nœud (c'est ici la hauteur de la poutre), la tension F de la membrure doit développer par rapport au nœud un moment de réaction égal et opposé au moment fléchissant, ce qui donne

$$F = \frac{M}{h}.$$

Il résulte de là que pour calculer la tension maxima qu'une membrure peut avoir à supporter par le fait d'une charge unique qui circule sur les longerons, il faut :

1° Abaisser du nœud opposé une perpendiculaire sur cette membrure, prendre son pied I et mesurer la longueur h.

2° Chercher la position de la charge qui donnera le plus grand moment M_{max} au point I ; et calculer ce moment M_{max}.

3° La tension maxima F_{max} de la membrure, aura pour valeur

$$F_{max} = \frac{M_{max}}{h}.$$

Prenons une poutre Warren, et supposons qu'une charge roulante unique circule sur des longerons rattachés à la membrure supérieure (fig. 387).

Membrure basse. — Pour avoir les tensions du tronçon de membrure basse ($\alpha\beta$ par exemple), il faut prendre le moment maximum développé par la charge sur le nœud opposé A; on sait qu'il se produit au moment où la charge passe sur ce nœud; et ensuite appliquer la formule précédente.

On voit donc que pour les semelles inférieures les maxima seront les mêmes que si la charge circulait sur la membrure haute.

Membrure haute. — Pour un segment quelconque, AB par exemple, de cette membrure haute, il faut prendre le moment maximum développé au droit du nœud opposé β.

Cette fois il ne se produit plus lorsque la charge passe à plomb de β mais lorsque la charge est sur le nœud de droite B, puisque le tronçon est sur la moitié de gauche de la poutre; ce maximum est plus petit que celui qui se produirait si la charge circulait sur la membrure au lieu de se mouvoir sur les longerons.

On est dans l'habitude de calculer la tension de membrure en se servant du plus grand des deux. En opérant ainsi on commet une erreur représentée par I'I'' (fig. 387).

Dans cette figure, MVN est la parabole représentative des moments maxima que produirait la charge en roulant

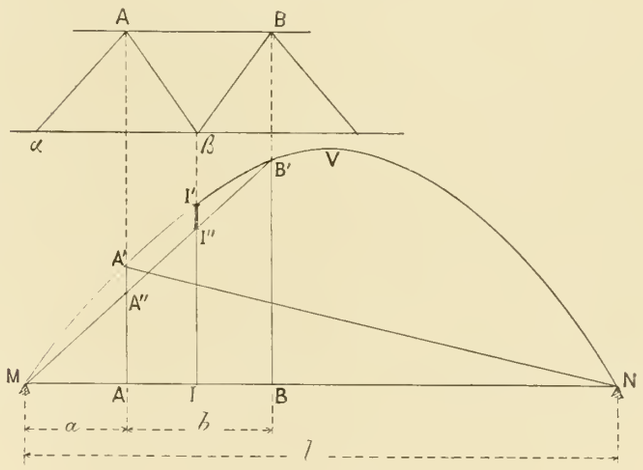


Fig 387

sur la membrure et II' serait le moment au-dessus du nœud β. Avec un longeron et une pièce de pont le moment maximum a lieu pour le nœud inférieur β lorsque la charge est sur le nœud supérieur de droite B. La représentative des moments est la corde B'M et le moment sur le nœud β est mesuré alors par II''.

L'erreur commise, *par excès*, en prenant II' est donc I'I'' ; elle est assez faible et d'autant plus faible 1° que le segment AB sera plus voisin de l'une des extrémités et 2° qu'il sera

plus petit, c'est-à-dire que les nœuds seront plus nombreux (1).

(*b*) **Tensions maxima des barres.** — Nous avons vu (n° 388-*c*-2°) que la tension d'une barre s'obtient en prenant l'effort tranchant au nœud (β par exemple) auquel aboutit cette barre et en exprimant que la projection de cette tension sur une verticale est égale à l'effort tranchant développé au droit de ce nœud. Cela posé, revenons à l'épure (fig. 388.)

(*c*) **Explication de l'épure** (fig. 388-I et II). — I. *Tensions des membrures.* — On a construit par la méthode **Collignon**, en M_1bN_1 (fig. II) la parabole représentative des moments maxima que développerait la charge si elle roulait sur la membrure.

On sait que l'ordonnée du sommet, ωb, est prise égale à 1/2 P, à l'échelle des forces, ce qui, avec la distance polaire $d = 1/2l$ du funiculaire Collignon, donne un moment maximum $\omega b = 1/2\,P \times 1/2l = 1/4Pl$.

Nous admettons que cette parabole nous donne les moments maxima au droit de chaque nœud. Nous avons vu que pour les nœuds du haut c'est exact, mais que pour ceux du bas nous commettons une erreur par *excès* que nous avons appris à mesurer (v. 391-*b*).

Par conséquent, les membrures basses, lesquelles dépendent des nœuds du haut, seront calculées juste; mais les membrures hautes, lesquelles dépendent des nœuds du bas, seront un peu trop fortes, ce qui sera sans danger. Cela posé, nous avons opéré comme il a été expliqué au n° 388 :

1° Nous avons porté $\omega\lambda = h$ (hauteur de la poutre) et nous avons tracé l'oblique des tensions de membrure $M_1\lambda D$.

2° Pour avoir la tension d'une membrure basse, αβ par exemple, opposée à A, nous avons pris en A_1a_1 l'ordonnée de la parabole située au droit du nœud opposé A; nous avons mené l'horizontale a_1aa_2 et la longueur a_1a_2, interceptée entre la verticale d'origine, et l'oblique des tensions de membrure, nous a donné *exactement* la tension cherchée.

3° Pour avoir la tension d'une membrure haute, AB par exemple, opposée au nœud bas β, nous avons pris en $\beta_1\beta_2$ l'ordonnée de la parabole et l'horizontale menée par β_2 nous a donné entre la verticale d'origine et l'oblique M_1D la tension cherchée, *avec un léger excès.*

(1) Avec les notations de la figure 386bis, on a :

$$\Pi' = \frac{P}{l}\left(l - a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \Pi'' = \frac{P}{l}\left(l - a - b\right)\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

d'où

$$\Pi'' = \frac{P}{2l}\,b\left(a + \frac{b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\Pi'}{\Pi''} = \frac{l}{2(l - a - b)} = \varepsilon.$$

ε est l'erreur relative commise; si l'on pose $l = nb$ et $a = n'b$, on a

$$\varepsilon = \frac{1}{2(n - n' - 1)}.$$

II. *Tensions des barres* (relire les n°s 278-279 et 280). — On se souvient que si l'on prend l'ordonnée à l'origine M_1m égale à la charge P et que si l'on joint mN_1, cette oblique est la représentative des efforts tranchants **positifs** maxima que développerait la charge en roulant sur la membrure, tandis que M_1n, situé au-dessous, est la représentative des efforts tranchants **négatifs.** On se souvient aussi que l'effort tranchant positif maximum se développe en un point à l'instant où la charge, venant de la gauche, va atteindre ce point et le touche, tandis que l'effort tranchant négatif s'y développe à l'instant où la charge vient de le dépasser. Cela posé :

Les tensions des barres obliques Aβ et βB comprises dans l'intervalle AB se déterminent au moyen de l'effort tranchant dans l'intervalle AB. Nous avons vu que l'effort tranchant positif maximum se produit lorsque la charge est au point B; il est donné sur l'épure en B_1b; l'effort tranchant négatif maximum a lieu lorsque la charge est en A; sa valeur est A_1a_1; enfin lorsque la charge passe au point d'*indifférence* K, déterminé comme il a été dit plus haut, l'effort tranchant est nul, et par suite, à cet instant, les tensions dans les barres Aβ et βB sont nulles.

Considérons la barre Aβ : la tension qu'elle subit varie entre la compression $\beta_1\varepsilon_1$, lorsque la charge est en A, et la traction $\beta_1\varepsilon$ lorsque la charge est en B, en passant par la valeur zéro, quand la charge est en K. De même, la barre βB subit des tensions variant entre la traction $\beta_1\mu_1$ quand la charge est en A et la compression $\beta_1\mu$ quand la charge est en B, et passant par la valeur zéro quand la charge est en K.

Les barres γC et γB, symétriques des précédentes, par rapport à l'axe de la poutre subissent des tensions extrêmes égales à celles des barres Aβ et βB; l'étude pourrait donc n'être faite que pour la moitié de la poutre.

En résumé, les tensions des barres comprises dans un intervalle AB seront déterminées par l'effort tranchant positif maximum à l'extrémité de droite de l'intervalle et par l'effort tranchant négatif à son extrémité de gauche, ces efforts tranchants étant les mêmes que dans une poutre à âme pleine.

Remarque. — Si la charge était sur la semelle inférieure, les tensions dans les barres obliques se détermineraient de la même manière, ainsi que celles des membrures; seulement on trouverait des dimensions un peu trop fortes pour la membrure basse, qui est tirée, au lieu que ce soit pour la membrure haute.

394. **Application à une poutre en N (Système Howe)** (**fig. 389-I et II**). — La charge mobile unique placée sur la semelle supérieure est égale à M_1m; nous avons construit en $M_1\beta_1N_1$ la représentative des moments fléchissants maxima et en mN_1 et M_1n celles des efforts tranchants maxima.

Remarquons que l'on peut considérer cette poutre comme une poutre Warren dans laquelle la barre du V située du côté de l'appui est devenue verticale.

(*a*) **Tension des membrures.** — La tension d'une membrure se détermine encore au moyen du moment fléchissant maximum au nœud opposé ; les membrures symétriques par rapport à l'axe de la poutre supportent des tensions égales.

(*b*) **Tensions des barres obliques.** — La tension dans une barre oblique $\alpha\beta$ d'un panneau $AB\beta\alpha$ est déterminée au moyen de l'effort tranchant dans l'intervalle AB.

En B, l'effort tranchant positif maximum $B_1\beta_1$, donne la

Poutre Warren.

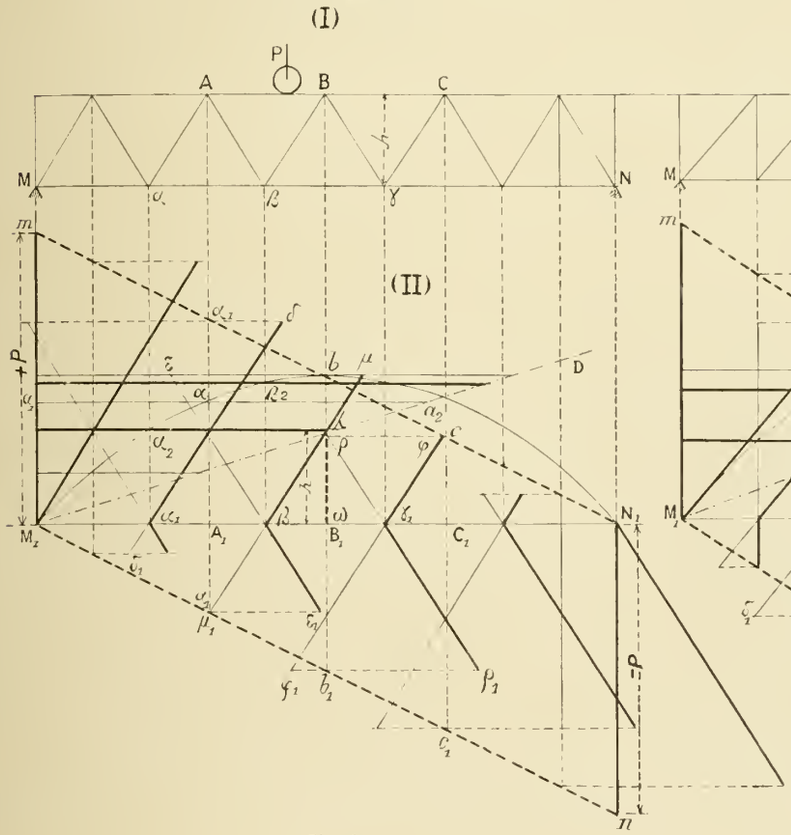


Fig. 388

Poutre Howe.

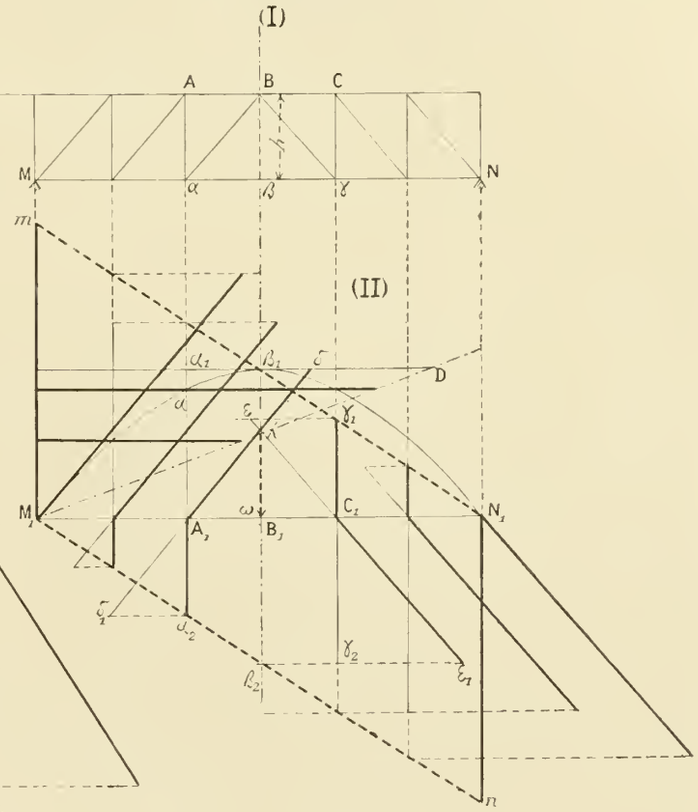


Fig. 389

compression maxima $A_1\delta$ tandis que, en A, l'effort tranchant négatif maximum $A_1\alpha_2$ donne la traction maxima $A_1\delta_1$. C'est évidemment comme pièce aboutée que les barres obliques devront toujours être calculées dans ce cas. Les barres symétriques par rapport à l'axe supportent des tensions extrêmes égales.

(*c*) **Tensions des montants.** — La tension dans le montant $A\alpha$ est égale à l'effort tranchant dans l'intervalle AB. Ce montant sera tiré ou comprimé suivant la position de la charge.

La traction maxima $A_1\alpha$ est égale à l'effort tranchant positif maximum en B, qui est $B_1\beta_1$ la compression maxima $A_1\alpha_2$ est égale à l'effort tranchant négatif maximum en A.

Les montants symétriques par rapport à l'axe supportent des tensions extrêmes qui sont égales entre elles.

Donc, dans un panneau, les tensions extrêmes du montant situé du côté de l'appui sont égales respectivement à l'effort tranchant positif maximum à droite du panneau et à l'effort tranchant négatif maximum à gauche de ce panneau.

(*d*) **Remarque.** — Si la charge était placée sur la semelle inférieure, les tensions dans les barres obliques seraient les mêmes ; dans chaque panneau, le montant, situé du côté de l'axe, supporterait des tensions extrêmes respectivement égales à l'effort tranchant positif maximum à droite du panneau, et à l'effort tranchant négatif maximum à gauche de ce panneau.

On traiterait le cas d'une poutre Pratt exactement de la même manière.

(*e*) **Observations de lois de Vœhler.** — On voit que les

barres subissent successivement des tractions et des compressions, c'est-à-dire ce que nous avons appelé des *alternances* (v. n° 128).

Elles sont donc dans de mauvaises conditions et il y aura lieu, pour elles, d'observer les lois de Wœhler et de les calculer par la formule de M. Séjourné (v. n° 138).

Mais le poids propre de la poutre fera généralement qu'au lieu d'alternances nous aurons des intermittences, lesquelles sont moins dangereuses.

395. **Moments fléchissants et efforts tranchants dus à un convoi mobile.** — (*a*). **Moments fléchissants.** — Soit $p_1p_2p_3p_4$ quatre charges mobiles (fig. 390-I) formant un convoi circulant sur une poutre (fig. III) dans le sens de la flèche et y occupant une position quelconque.

Construisons en $Mn_1n_2n_3n_4N$ (fig. II) le funiculaire des moments fléchissants produits par le convoi dans cette position. Le côté initial Mn_1 et le côté final Nn_4 se rencontrent en un point G qui est à plomb du centre de gravité du convoi et nous avons vu (n° 274) que si le convoi circulait sur la membrure de la poutre le point G décrirait une parabole MGN que nous avons nommée la parabole *de charge concentrée*. Voyons ce qui se passe au-dessus de l'entre-nœud $\alpha\beta$ (fig. III) de la poutre maîtresse.

A cet effet menons les verticales des nœuds α et β; le funiculaire précédent les recoupe (fig. II) en α' et β' : ce qui veut dire que les longerons sur lesquels circule le convoi transmettent aux nœuds, par l'intermédiaire des pièces de pont, des moments mesurés par $A\alpha'$ et $B\beta'$; par conséquent, sur la poutre maîtresse la représentative des moments sera la droite $\alpha'\beta'$ au lieu de la ligne brisée $\alpha'n_1n_2\beta'$. Cela prouve que les moments fléchissants sont plus petits sur la poutre maîtresse que si le convoi circulait directement sur sa membrure. Et comme cette ligne brisée $\alpha'n_1n_2\beta'$ ne serait autre chose, par rapport à $\alpha'\beta'$ prise comme base, qu'un funiculaire des moments des charges p_1 et p_2 qui sont engagées sur le longeron, nous pouvons dire :

« Le moment fléchissant sur la poutre maîtresse est égal « au moment que produirait le convoi, s'il circulait directe- « ment sur sa membrure, diminué du moment que déve- « loppe sur le longeron, considéré comme une poutre repo- « sant sur deux appuis libres, la portion du convoi qui est « engagée sur lui. »

(*b*) **Efforts tranchants.** — L'effort tranchant est donné par la pente de la droite $\alpha'\beta'$ (fig. II) qui représente les moments. Il est donc constant pour tout l'entre-nœud.

Pour quelle position du convoi sera-t-il maximum et positif ?

Je dis que c'est lorsque l'essieu de tête de gauche, p_1, sera placé au droit du *point d'indifférence* K de la travée. En effet :

Supposons que cette charge p_1 soit seule : nous avons vu que si elle était placée au droit du point K elle fournirait pour son compte, dans l'entre-nœud, un effort tranchant qui serait nul, et que si elle reculait à droite de K elle donnerait un effort tranchant positif tandis qu'il serait négatif si elle avançait à gauche. Donc, le fait de venir à gauche de K fera diminuer l'effort tranchant qui est dû à cette charge de tête p_1.

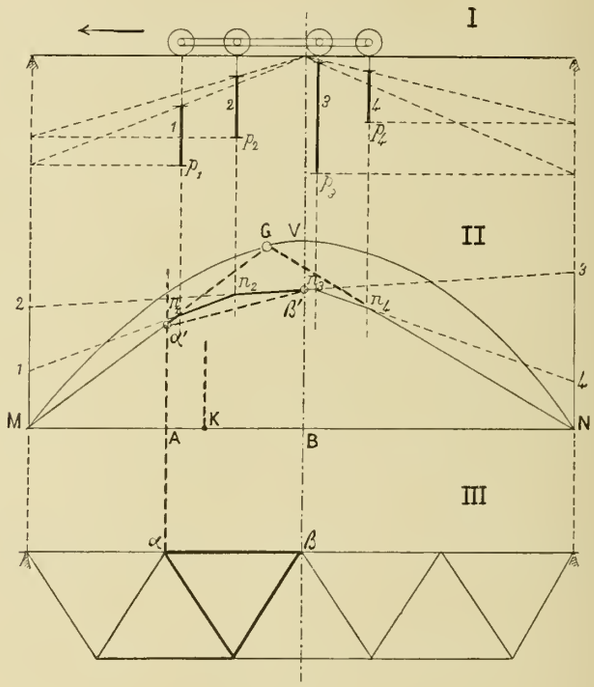


Fig. 390

Quant aux autres charges p_2, p_3, p_4 du convoi elles donnent, toutes, des efforts positifs lorsque p_1 est en K et nous avons vu que si elles se déplacent vers la gauche ces efforts vont tous diminuer ; donc l'effort tranchant *positif* est maximum dans l'entre-nœud lorsque l'essieu de tête de gauche du convoi est à plomb du point d'indifférence K.

Un raisonnement analogue ferait voir que l'effort tranchant négatif maximum se produira dans l'entre-nœud lorsque l'essieu de tête de droite p_4 du convoi sera au droit de son point d'indifférence.

396. **Calcul d'une poutre en treillis parcourue par le train type.** — (*a*) **Membrures.** — Nous avons vu (n° 388-*c*-1°) qu'un segment de membrure se calculait en fonction du moment fléchissant maximum supporté à plomb du nœud qui, sur l'autre membrure, lui est opposé.

Nous avons appris (voir note page 251 — fig. 298) à déterminer graphiquement les moments maxima supportés en chaque point par une poutre qui, en outre de sa charge permanente, serait parcourue sur sa membrure par le train type.

Si la poutre est en treillis, avec longerons et pièces de pont, les moments maxima entre les nœuds ne sont pas les mêmes que ceux que donne notre épure (fig. 298) ; ils sont plus petits, mais très peu plus petits. En faisant les calculs d'après la fig. 298, on aura donc un léger surcroît de résistance.

On aurait plus d'approximation en menant par les nœuds tels que A et B des verticales, en prenant leurs points de rencontre avec la courbe enveloppe des moments maxima (fig. 298), en joignant ces points de rencontre par une droite et prenant cette droite pour représentative des moments maxima.

(*b*) **Barres.** — Nous avons vu (v. n° 388-*c*-2°) que les deux barres qui aboutissent à un nœud se calculent en fonction de l'effort tranchant maximum éprouvé sur ce nœud. Nous avons appris (v. note, page 254) à calculer les efforts tranchants maxima répondant à un convoi qui roulerait sur la membrure. Si le convoi roule sur longeron nous venons de voir que ce moment était maximum dans un entre-nœud, et par suite aussi sur les nœuds de ses extrémités, lorsque l'essieu sur lequel il se produit passe au droit du *point d'indifférence* K de cet entre-nœud. Par conséquent nous aurons une approximation très suffisante de la valeur de l'effort tranchant maximum, en le prenant sur la courbe de la page 254, mais au droit de ce point d'indifférence.

§ 14. — Effets divers produits dans les poutres en treillis

397. **Efforts secondaires dus à la rigidité des assemblages** (fig. 391). — Tout ce que nous avons dit précédemment suppose que les pièces de treillis sont articulées à l'endroit des nœuds au moyen d'axes permettant la rotation de chacune d'elles par rapport aux autres, comme cela se fait en Amérique. Toutes les pièces ne sont alors soumises qu'à des tractions ou à des compressions.

Si, comme on a l'habitude de le faire en Europe, les barres du treillis sont assemblées sur les membrures au moyen de rivets, ces assemblages rigides empêchent toute rotation et

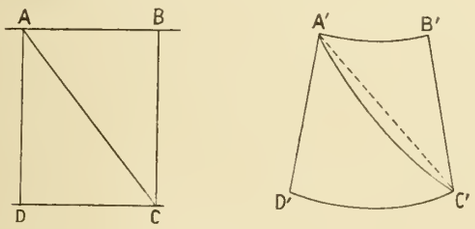


Fig. 391

maintiennent invariables les angles sous lesquels les barres rencontrent les membrures. Par suite des déformations de la poutre, lesquelles tendent à produire des rotations des barres autour de leurs points d'attache, ces barres fléchissent légèrement.

Considérons par exemple en ABCD, fig. 391, un panneau d'une poutre en N : par suite de la flexion de la poutre, la membrure supérieure est raccourcie tandis que la membrure inférieure est allongée ; le rectangle ABCD devient un trapèze A'B'C'D'. La diagonale AC prend la position A'C' ; si elle est articulée aux points A et C, elle pourra rester rectiligne. Mais si elle est reliée aux membrures par des assemblages rigides obtenus au moyen de rivets, assemblages qui réalisent l'encastrement de ses extrémités, les angles que forme en A' et C' sa fibre moyenne avec celles des membrures restant les mêmes, la barre AC prendra une forme courbe A'C' à simple courbure.

De plus, cette barre subit, sous l'influence de l'effort auquel elle doit résister, un changement de longueur et sous cette influence, comme ses extrémités sont encastrées, elle tend à prendre une forme à double courbure en S.

La courbure totale de la barre résulte des deux précédentes. Cette barre ne peut être fléchie que sous l'influence d'un moment de flexion qui produit dans ses fibres des efforts appelés *efforts secondaires*.

D'une étude faite par M. Ritter et dont nous ne donnerons que les conclusions, il résulte :

1° Que dans un treillis simple le rapport de la largeur des barres, dans le sens du plan de la poutre, à leur longueur ne doit pas être inférieur à 1 : 33 si l'on veut que les efforts secondaires restent peu considérables ;

2° Que les efforts secondaires développés dans une barre sont proportionnels à la largeur de cette barre. Il est donc avantageux de diminuer autant que possible cette largeur tout en restant dans les limites imposées par la remarque précédente.

3° Les efforts secondaires dûs au changement de longueur des barres sont trois fois plus grands que ceux qui résultent de la déformation générale de la poutre.

4° Dans les treillis en N, les efforts secondaires sont doubles de ce qu'ils seraient dans un treillis en V.

398. **Autres efforts secondaires.** — (*a*) **Efforts dûs aux poids propres des barres.** — Une barre de treillis fléchit sous son propre poids ; les moments secondaires de flexion dûs à cette déformation sont très faibles, à moins que la barre ne soit très longue et de faible largeur.

(*b*) **Efforts dûs aux pièces de pont.** — Une pièce de pont

étant rivée à ses deux extrémités sur les poutres, celles-ci tendent à être fléchies dans une direction perpendiculaire à leur plan lorsque la pièce de pont fléchit.

Il en résulte que les barres de treillis sont soumises en même temps qu'à des efforts de flexion dans le plan de la poutre à d'autres efforts dans un plan perpendiculaire.

La forme la plus convenable à leur donner est donc, pour les barres comprimées, la section en croix, et pour les barres tirées la section pleine ronde ou rectangulaire à faibles dimensions transversales.

En résumé, les efforts secondaires se négligent généralement dans le calcul des treillis, pour les raisons suivantes : 1° les coefficients de sécurité admis en tiennent compte dans une certaine mesure ; 2° nous avons vu que dans la plupart des cas, on emploie pour le calcul des barres des valeurs trop grandes des moments fléchissants et des efforts tranchants.

399. Efforts supplémentaires dûs à des dispositions défectueuses. — (*a*) **Les fibres moyennes des pièces ne passent pas exactement aux nœuds.** — Il est nécessaire que les fibres moyennes des pièces qui aboutissent à un nœud se coupent en un même point qui constitue le nœud théorique. S'il n'en est pas ainsi, les membrures et les barres de treillis se trouvent, par ce fait, soumises à des efforts de flexion que nous allons étudier sommairement.

Soient f et f les efforts longitudinaux dans les barres de treillis aboutissant à un nœud (fig. 392); ces deux forces ont une résultante F qui produit sur le nœud un moment fléchissant $F \times d$, d étant la distance entre le point de rencontre des fibres moyennes des barres et la fibre moyenne AB de la membrure. Ce moment détermine une flexion de la membrure et une flexion de chacune des deux barres ; à cause de la rigidité relativement grande des membrures par rapport à celle des barres, ce sont les membrures qui résistent, pour la plus grande part, à cette flexion.

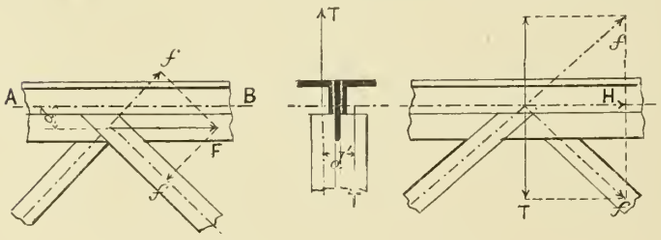


Fig. 392 Fig. 393

(*b*) **Les barres ne sont pas dans le plan moyen de la poutre.** — Pour des raisons de construction, il arrive, le plus souvent, que la fibre moyenne des barres de treillis n'est pas dans le plan moyen de la poutre (fig. 393).

Soit encore f l'effort auquel résiste chacune des barres aboutissant à un nœud ; soit d' la distance entre les fibres moyennes des deux barres dans le sens perpendiculaire au plan de la poutre ; chacune des forces f peut être décomposée en une force horizontale H et une force verticale T ; les deux forces de même sens H donnent lieu à un effort longitudinal dans la membrure ; quant aux forces T, égales et de sens contraire, elles déterminent un couple, $T \times d'$, qui produit : 1° une torsion de la membrure ; 2° une torsion et une flexion de chacune des barres de treillis.

Sans déterminer l'importance des divers efforts auxquels les pièces sont ainsi soumises, ce qui est un problème extrêmement compliqué, nous ferons les remarques suivantes :

1° Dans les barres tirées, la flexion se produit en rapprochant la fibre moyenne de la barre du plan moyen de la poutre ; les efforts maxima se produisent aux extrémités de la barre, en ses points d'attache.

2° Dans les barres comprimées, la flexion éloigne la fibre moyenne de la barre du plan moyen de la poutre, et les efforts maxima se produisent au milieu de la barre, au même point que les efforts maxima dûs à la compression longitudinale.

3° Ces efforts augmentent dans tous les cas et d'une manière assez appréciable les efforts unitaires que supportent les fibres les plus fatiguées des pièces, et comme leur grandeur est proportionnelle à la distance d' entre les fibres moyennes des barres, on devra, par des dispositions convenables de construction, réduire cette distance au minimum.

400. Défiguration des poutres en treillis. — Calcul de la flèche. — Les défigurations des poutres articulées sont notablement plus considérables que celles des poutres à âme pleine, et il est possible de les calculer exactement.

Si l'on substitue aux barres articulées des barres reliées aux membrures par des assemblages rigides, la défiguration est diminuée et se rapproche, bien qu'en lui restant supérieure, de celle que donne une poutre pleine. Cette défiguration est très difficile à évaluer par le calcul exact ; mais on peut, d'après M. **Résal**, l'obtenir d'une façon suffisamment approchée en employant les formules relatives aux poutres à âme pleine, à la condition d'attribuer au coefficient d'élasticité E une valeur réduite, dépendant de la manière dont les poutres sont construites et donnée par le tableau suivant :

Défiguration des poutres en treillis.
Coefficient d'élasticité réduits à employer.

	FER	ACIER	FONTE
1° Les barres de triangulation sont rivées.	16×10^9	18×10^9	8×10^9
2° Les barres sont articulées .	14×10^9	$15{,}5 \times 10^9$	7×10^9

Nota. Avec ces coefficients on calculera les flèches comme si les poutres étaient à âme pleine.

§ 15. — Treillis multiples

401. Définition d'un treillis multiple. — Un treillis simple est celui dans lequel, d'après ce qui a été dit précédemment, toute section verticale faite entre deux nœuds ne rencontre qu'une seule barre de treillis.

Le treillis multiple est celui dans lequel la section verticale rencontre plus d'une barre et qui peut être décomposé en autant de systèmes simples qu'il y a de barres rencontrées.

Le treillis est double, triple, quadruple, etc., suivant que le plan de section rencontre deux, trois, quatre barres, et que le système peut être décomposé en deux, trois, quatre systèmes simples.

Mais aucune barre oblique ne doit être commune à deux des systèmes simples dans lesquels on décompose le treillis multiple.

Nous donnons ci-dessous des exemples :

1° de treillis double (fig. 394-I) décomposable en deux systèmes simples (fig. II et III) ;

2° de treillis triple (fig. 395-I) décomposable en trois systèmes simples (fig. II, III et IV) ;

3° de treillis quadruple (fig. 396-I) décomposable en quatre systèmes simples (fig. II, III, IV et V).

On voit que le treillis multiple peut être considéré comme la superposition d'un certain nombre de systèmes simples.

Treillis double

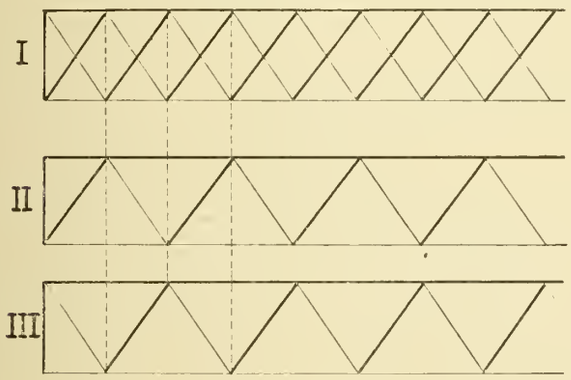


Fig. 394

Treillis triple

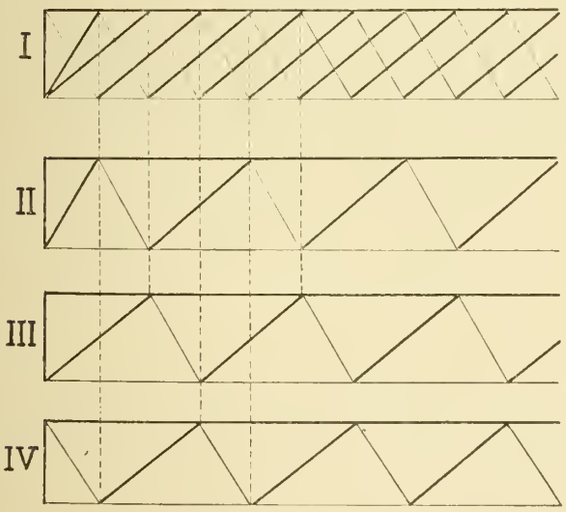


Fig. 395

Treillis quadruple

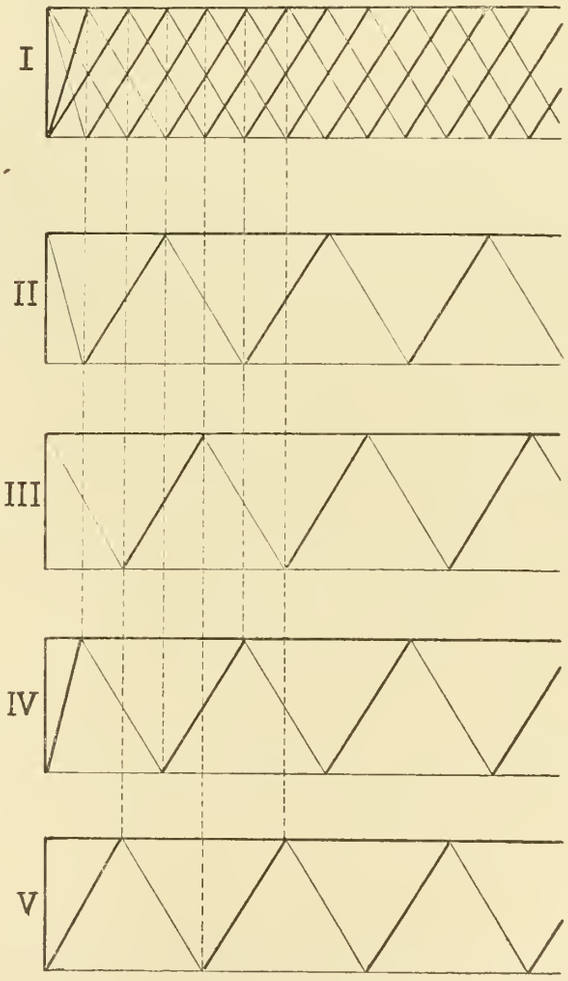


Fig. 396

402. Calcul des tensions. — D'après la remarque que nous venons de faire : 1° on décomposera le treillis multiple en systèmes simples et on appliquera à chaque nœud la portion de charge qui lui incombe.

2° On calculera par les méthodes indiquées précédemment les tensions des barres dans chacun des systèmes simples ; comme s'ils étaient indépendants les uns des autres ; cela fait :

3° Les tensions ou compressions dans les membrures du système multiple seront les sommes des efforts de tension ou de compression dans les parties correspondantes des membrures des divers systèmes simples.

4° Quant aux barres leurs tensions seront ce que l'on aura trouvé séparément pour chaque système simple.

Nota. Comme simplification de calcul, dans le cas seulement où le treillis serait assez serré, et où la poutre serait uniformément chargée, on pourrait admettre que les barres parallèles rencontrées par un même plan vertical sont également tendues ou comprimées, et l'on partagerait également entre elles les efforts à transmettre. Dans ce cas l'effort tranchant dans la section considérée fournira, en bloc, par la méthode ordinaire, la tension de l'ensemble des barres qui sont parallèles à une même direction.

La tension des membrures en un point donné s'obtiendra au moyen du moment fléchissant en ce point, comme dans le cas d'un treillis simple.

2e SECTION

Systèmes articulés a barres surabondantes

§ 16. — Treillis multiples a montants verticaux

403. Définition d'un système à barres surabondantes. — Nous avons défini, au n° 348-*e*, ce qu'on entend par un système à barres surabondantes.

Une barre surabondante est celle qu'on pourrait supprimer sans altérer l'indéformabilité du système.

Dans une poutre en treillis, s'il y a des barres surabondantes, le nombre des barres de treillis aboutissant à certains nœuds est supérieur à deux, et l'on peut aller d'un nœud à un autre par deux ou plusieurs chemins différents, tout en ne parcourant pas de membrure.

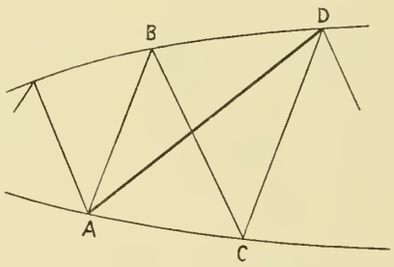


Fig. 397

Ainsi dans la fig. 397 la barre AD est surabondante ; aux nœuds A et D aboutissent trois barres de treillis ; on peut aller du point A au point D par la ligne droite AD, ou par la ligne brisée ABCD.

Un treillis à barres surabondantes peut se décomposer en systèmes de treillis simples, mais dans lesquels certaines barres seront communes à deux ou à plusieurs des systèmes simples. De plus, cette décomposition pourra en général être faite de plusieurs manières différentes. Nous prendrons comme exemple le treillis à croix de St-André (fig. 398 — I).

Nous pouvons, puisqu'il y a des barres surabondantes, les supprimer, ce qui revient à admettre que ces barres ne sont d'aucune utilité pour la résistance et ne servent qu'à ajouter à l'indéformabilité du système.

Treillis à croix de Saint-André

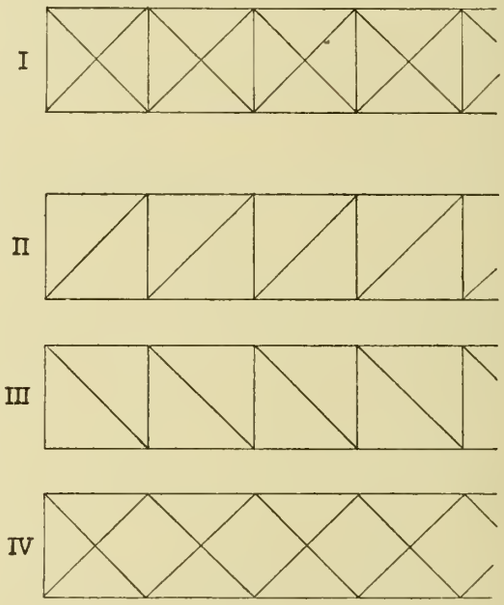


Fig. 398

Nous pourrons alors, dans chaque panneau, supprimer l'une des diagonales et étudier la poutre 1° comme poutre Howe (fig. 398-II) ; 2° comme poutre Pratt (fig. 398-III) ; 3° ou bien nous pourrons supprimer les montants verticaux, et nous serons ramenés au type du treillis Warren double (fig. 398-IV) ; 4° enfin si nous ne voulons pas supprimer les barres surabondantes, nous pourrons décomposer le treillis donné en deux treillis simples en N l'un du type Howe, l'autre du type Pratt, les montants étant communs aux

deux systèmes (fig. 398-II et III). On reconnaîtra alors que ces montants ne supportent aucun effort.

Remarque. — Dans la poutre en N, du type Pratt, les barres obliques sont tirées quand la poutre est uniformément chargée ; mais nous avons vu qu'au passage d'une charge roulante, ces barres pouvaient être comprimées. Si on veut construire la barre oblique de chaque panneau en fer plat et ne pas la renforcer comme il le faudrait pour qu'elle pût résister à la compression, on remarquera que si, dans le même panneau, on place une seconde diagonale, elle sera tirée au moment où la première commencera à être comprimée, et inversement, les efforts changeant de sens en même temps dans ces deux barres. Lorsque la compression commencera à agir sur la première diagonale, celle-ci flambera, et alors c'est la seconde qui, devenant à ce moment barre tirée, résistera en déchargeant presque complètement la première.

404. **Calcul des tensions des barres ; méthode approximative.** — Comme dans le cas des treillis multiples étudiés au paragraphe précédent, on décompose le treillis donné en systèmes simples en appliquant à chaque nœud la portion de charge correspondante.

Les tensions et compressions dans les membrures et dans les barres communes à plusieurs systèmes simples sont égales à la somme algébrique des tensions et compressions qu'elles subissent dans chacun de ces systèmes.

Remarque. — On voit que la méthode de calcul des treillis à barres surabondantes repose sur des hypothèses dont la rigueur laisse beaucoup à désirer. De plus, comme les barres surabondantes n'interviennent pas dans les calculs de résistance, leur poids est un supplément inutile et les systèmes à barres surabondantes sont ainsi toujours plus lourds que les systèmes stricts.

Il y a donc avantage au point de vue de l'économie d'une part, de la précision et de la facilité du calcul d'autre part, à employer les systèmes stricts ; ils permettent, d'ailleurs, un nombre de combinaisons suffisant pour satisfaire à toutes les exigences de la construction.

§ 17. — Contreventements

405. **Contreventements des ponts.**

(*a*) **Définitions.** — Les constructions en charpente (bois ou métal) se composent essentiellement d'organes situés presque toujours dans des plans verticaux ; telles sont les fermes d'un comble et les poutres maîtresses d'un pont.

Les charges (poids propre ou surcharges) sont des forces qui agissent sur ces organes, mais en étant situées dans leur plan et qui, par conséquent, en font travailler plus ou moins les éléments mais ne tendent pas à les renverser par une rotation autour d'une horizontale de ce plan.

D'autres forces (et en particulier le vent) peuvent attaquer l'organe suivant des directions non situées dans son plan. Si l'on décompose chacune de ces forces en deux composantes dont l'une sera normale au plan, c'est-à-dire horizontale, et l'autre sera parallèle à ce plan, tandis que la composante parallèle rentrera dans la première catégorie, la composante horizontale, au contraire, produira des effets nouveaux qu'il faut empêcher.

Les *contreventements* ont précisément pour but de résister aux efforts horizontaux, parmi lesquels ceux qui sont dus à l'action du vent sont, de beaucoup, les plus importants et généralement les seuls que l'on considère.

Comme exemple, considérons une poutre en N inférieure (type Pratt), représentée schématiquement (fig. 399-I) en élévation.

Sur les deux plans de tabliers (fig. II et III) ainsi que sur les coupes (fig. IV et V) la direction du vent est indiquée par des flèches.

Les effets suivants peuvent se produire.

(*b*) **Voilement des poutres** (fig. V). — Surtout si la poutre est à âme pleine, et si les membrures h et k sont maintenues fixes, l'âme fléchira dans sa hauteur et prendra la figure $h'k'$. C'est ce que l'on nomme un effet de *voilement*. On y remédiera en fortifiant les montants verticaux des poutres maîtresses.

(*c*) **Torsion générale et contreventement transversal.** — Si l'une des membrures AB (fig. I) est fixe et si l'autre CD est libre il se produira une *torsion* générale (v. la coupe fig. IV) qui tendra à amener la section transversale de la position $mpqn$ dans la position $mp'q'n$, et à transformer le rectangle de coupe en un parallélogramme.

On y remédiera par un *contreventement transversal* qui pourrait consister dans une seule pièce en diagonale telle que mq (fig. IV), laquelle serait *tirée*, dans le cas où le vent agirait dans le sens des flèches, mais serait comprimée dans le cas contraire.

En plaçant deux diagonales mq et $m'q'$, formant une *croix de Saint-André*, chacune d'elles pourra n'être calculée que comme pièce tirée ; l'une servant à résister au vent dirigé dans un sens et l'autre au vent dirigé dans l'autre sens.

Nota. — 1° Ce genre de contreventement transversal par croix de Saint-André est très bon, mais il n'est possible que si l'on ne doit pas circuler dans l'intérieur de la poutre et c'est une raison de plus en faveur des poutres Pratt.

Si l'on doit circuler dans les poutres, le contreventement

transversal s'obtiendra en renforçant les angles par de forts goussets.

2° En plaçant une pièce horizontale *rs* au milieu de la croix de Saint-André, on s'opposera aux effets de *voilement* signalés ci-dessus.

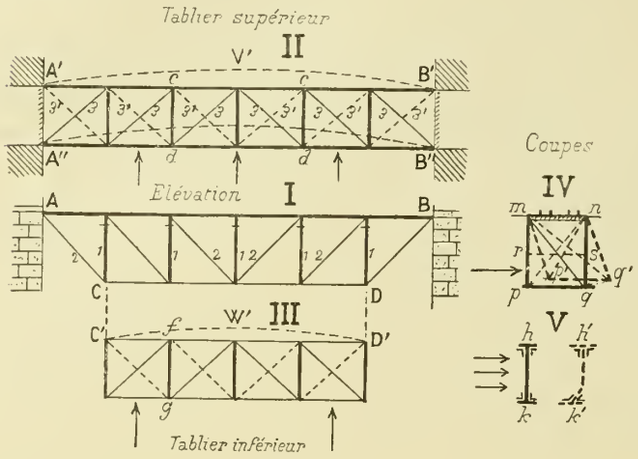


Fig. 399

(*d*) **Flexion horizontale et contreventement horizontal** (fig. II et III). — Il se produira une flexion générale, horizontale, de chacun des deux tabliers, tendant à leur donner les figures courbes A'V'B' (fig. II) et C'W'D' (fig. III).

On y remédiera par le *contreventement horizontal*, de la manière suivante.

Prenons le tablier supérieur (fig. II), il sera dans les conditions d'une poutre dont sont déjà réalisés les deux membrures A'B' et A''B'' et les montants tels que *cd*, *cd*,... Ces montants sont constitués ici par les pièces de pont lesquelles, très solides déjà afin de pouvoir supporter les longerons, peuvent travailler comme pièces comprimées. Dans ces conditions il y aura intérêt à bien attacher la poutre en A'' et B'' et à parfaire le contreventement par des pièces en diagonales (3, 3, 3,... en traits pleins-fin) qui seront des tirants. Ce contreventement horizontal ferait du tablier supérieur une poutre Pratt.

Mais comme le vent peut souffler dans l'autre sens, on placera également des *tirants* 3', 3', 3',... suivant les autres diagonales.

Le tablier inférieur serait contreventé de la même manière.

406. **Contreventement des combles.** — Nous avons étudié, à l'occasion des fermes de combles, l'action du vent quand il agissait sur l'un des égouts d'un comble et dans la direction du plan des fermes. Si le vent agit dans une direction plus ou moins oblique à la précédente, il tend à produire une rotation des fermes autour de leur ligne de base comme axe.

Les contreventements ont pour but de s'opposer à cette rotation.

Le cas le plus défavorable est évidemment celui où le vent agit perpendiculairement au plan des fermes, c'est-à-dire sur l'un des pignons de la construction.

Si la construction est limitée par des murs pignons, ce sont eux qui reçoivent l'action du vent et le contreventement n'est pas indispensable; mais si ces murs n'existent pas, il devient absolument nécessaire de contreventer le comble et même les parois verticales latérales qui le supportent, si elles sont constituées par des supports métalliques, par des poteaux ou par des pans de bois.

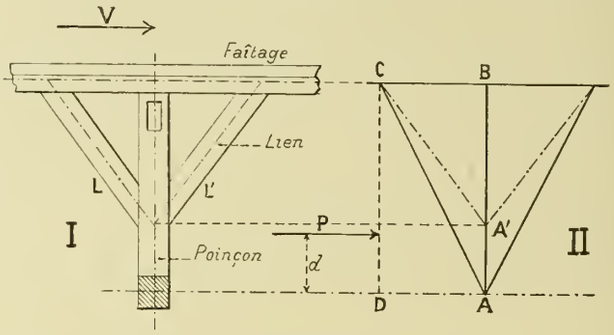


Fig. 400

(*a*) **Fermes en bois.** — Dans les fermes en bois, le contreventement est obtenu au moyen de pièces obliques appelées *liens*, L et L' (fig. 400-I) placées entre le poinçon et le faîtage et constituant avec ces pièces ce qu'on nomme la *ferme sous faîte*.

Le vent agissant dans le sens de la flèche V (fig. 401-I), tend à coucher les fermes comme l'indique la fig. 401-II ; il produit ce que l'on nomme le *hiement* de la charpente. Les liens L', marqués en pointillés, ont une tendance à être tirés; mais comme leur assemblage à tenon et mortaise ne peut résister à un pareil effort, en réalité les tenons sortent un peu des mortaises et les liens L' ne travaillent pas. Au contraire les autres liens, tels que L, sont comprimés efficacement; c'est sur eux seuls que doit porter le calcul.

Pour calculer leur tension, considérons *aa'bc* comme une console qui serait attachée en *c* et *b*, dans le faîtage, dont l'extrémité *a* serait libre et qui supporterait un effort horizontal P égal et opposé à celui du vent. Nous la reproduisons (fig. 401-III), après l'avoir fait tourner de un angle droit, de telle sorte qu'elle se présente bien sous l'aspect d'une console attachée en B et en C à un mur vertical et subissant en G l'action d'un poids P.

Les réactions des points d'attache B et C, seront Q et Q' ; elles seront égales entre elles et formeront un couple : on aura donc

$$Q \times BC = P \times BG,$$

ce qui fait connaître Q et Q'.

Si nous étudions le nœud C il faut que la force Q′ y soit équilibrée par la tension SC du lien et par celle Q′S du faîtage, et le triangle CQ′SC est le dynamique du nœud C. La tension du lien est donc déterminée en SC et elle est une compression.

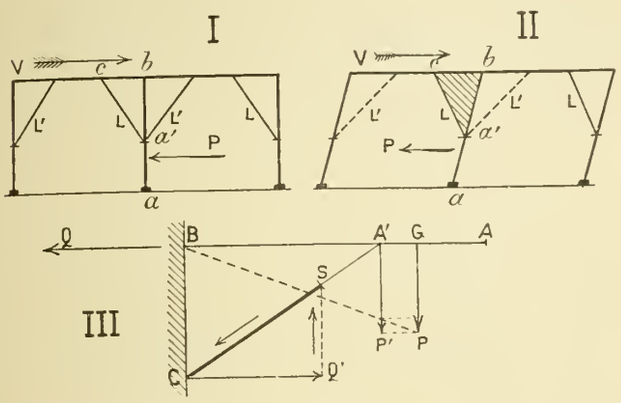


Fig. 401

Quant au poinçon *ba* (devenu BA dans la fig. III), il subit une flexion dans sa portion AA′; le moment maximum a lieu en A′ et il a pour valeur

$$M = P \times A'G.$$

(*b*) **Fermes en fer.** — Dans les fermes en fer, on considère quelquefois le contreventement comme suffisamment assuré par la rigidité des assemblages des pannes et du faîtage sur les arbalétriers. Il peut cependant être nécessaire de prévoir un contreventement. On peut l'obtenir de deux manières :

1° *Contreventement dans le plan des égouts* (fig. 402).

On constitue alors dans chaque égout, entre deux fermes consécutives, une poutre en treillis en N dans laquelle les arbalétriers des fermes forment les membrures, les pannes étant les montants, et les barres diagonales de contreventement devant être tendues. Comme le vent peut souffler dans les deux sens, on ajoute dans chaque panneau une seconde diagonale également tendue.

La poutre ainsi constituée dans chacun des égouts est dans les conditions d'une console fixée sur la ligne d'appui des fermes et supportant la moitié de l'effort du vent, répartie entre les divers nœuds de sa semelle supérieure de la manière suivante :

Soit ACB le pignon d'un comble ayant deux pannes par égout; prenons les milieux des entrepannes et menons par ces points des parallèles à la base AB du pignon (fig. 402). Nous appliquerons aux nœuds successifs des forces représentant : pour le nœud n° 1 l'action du vent sur la moitié du trapèze *mnpq* ; pour le nœud n° 2, l'action du vent sur la moitié du trapèze *nrsp* ; enfin pour le nœud *C*, l'action du vent sur la moitié du triangle *rCs*

L'action du vent sur le trapèze A*mq*B est reportée directement sur les murs d'appui de la ferme aux points A et B.

2° *Contreventement entre les bielles* (fig. 403).

Cela se fait dans les fermes du type Polonceau par exemple. On constitue alors, sous chaque égout du comble, une poutre en N qui n'aurait qu'un seul panneau. Les bielles en

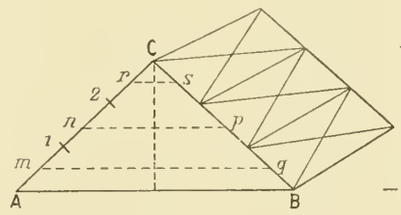


Fig. 402

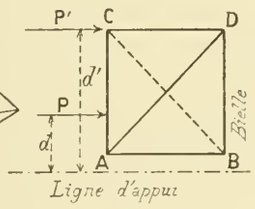


Fig. 403

forment les membrures, une panne CD et une barre horizontale AB placée entre les plaques d'assemblage inférieures des bielles en forment les montants. La barre oblique du contreventement devra être tirée.

Comme dans le cas précédent, on ajoutera une seconde diagonale au panneau, pour le cas où le vent soufflerait dans une direction opposée. Ce panneau travaille comme une console dont l'encastrement serait fait suivant la barre horizontale AB, supposée invariable de position.

Remarquons que la droite AB n'est pas dans le plan des appuis des fermes; mais elle en est peu éloignée et par suite nous pouvons admettre que les points A et B sont invariables, comme tout ce qui serait dans le plan des appuis.

L'action totale du vent P étant appliquée à une hauteur *d* au-dessus de la ligne d'appui de la ferme, l'extrémité supérieure C d'une bielle étant à la hauteur *d′* au-dessus de cette même ligne, l'effort P′ à appliquer au point C est

$$P' = \frac{Pd}{2d'}.$$

§ 19. — Piles métalliques

407. **Généralités.** — (*a*) **Définitions** (fig. 404). — Une pile métallique est ordinairement composée de quatre membrures ou arbalétriers AB, AB, A′B′ constituant comme les intersections de quatre faces, planes ou courbes ; ces arbalétriers sont réunis par des entretoises horizontales DD, DD′ et par des barres obliques de treillis DB′, BD′.

La pile est amarrée par sa base BBB′B′ sur le massif de

fondation, lorsque son poids, ajouté à celui de la charge qu'elle supporte, est insuffisant pour en empêcher le renversement sous l'action du vent.

(*b*) **Effort supporté par une pile.** — 1° *Charges verticales.* — Les charges verticales comprennent les poids propres de la pile et ceux de la construction MM qu'elle est appelée à supporter. Leur répartition sur chaque nœud

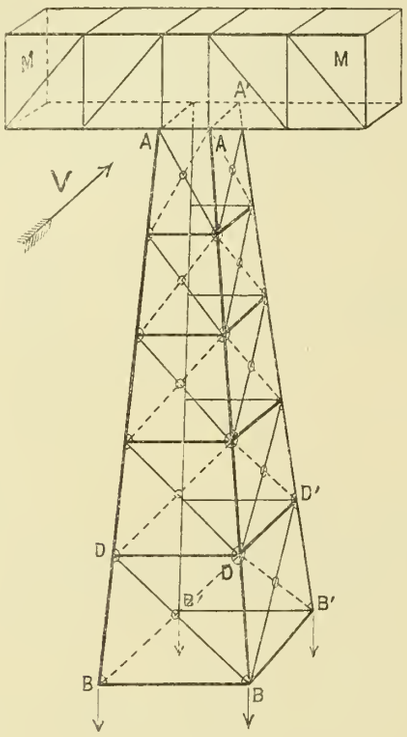


Fig. 404

se fera facilement comme nous l'indiquons au numéro suivant.

2° *Charges obliques.* — Elles sont dues à l'action du vent sur la pile et sur la construction M qu'elle supporte. Cette action se détermine d'après les prescriptions du règlement officiel du 29 août 1891, art. 5 (voir la note 1).

Règlement du 29 août 1891. (*Extrait.*)

(1) ART. 5 (pression du vent).

Le travail du métal sous l'influence des plus grands vents ne devra pas dépasser de plus d'un kilogramme les limites fixées à l'article 2 ci-dessus (de $6^k,50$ à $8^k,50$ pour le fer et de $8^k,50$ à $11^k,50$ pour l'acier, et par ^{mm2}).

On admettra que la pression du vent par mètre carré de surface verticale peut s'élever à 270 kilogr., mais que le passage des trains est interrompu lorsqu'elle atteint 170 kilogr. On supposera, en outre, que cette pression s'exerce sur la surface nette, déduction faite des vides, de chacune des maîtresses-poutres, qu'elle agit intégralement sur l'une d'elles et que, sur la suivante, elle est diminuée d'une fraction de sa valeur égale au rapport de la surface nette de la première à la surface totale limitée par son contour; enfin, que l'effet du vent, en arrière de ces deux poutres, est négligeable. Pour les piles métalliques, on supposera que la pression s'exerce intégralement sur la surface nette de toutes les pièces.

Dans l'hypothèse d'un train placé sur le pont, on comptera, pour sa surface verticale nette, un rectangle de trois mètres de hauteur ayant la même longueur que le pont et dont le côté inférieur sera placé à 50 centimètres au-dessus du rail; on déduira de ce rectangle la surface nette de la partie de la première poutre placée en avant et on supposera que la pression du vent est nulle sur la partie de la seconde poutre masquée par le train.

Enfin, on s'assurera que les efforts de glissement transversal et de renversement des tabliers et des piles métalliques sous l'action du vent n'atteignent pas des limites dangereuses, en tenant compte des conditions spéciales dans lesquelles pourront être placés les ouvrages et en supposant que le train défini ci-dessus est composé de wagons vides.

Il est bien évident que les actions obliques exercées sur le front AABB seront réparties par moitié sur les faces, qui lui sont perpendiculaires, telle que ABA'B'. Ces faces vont se comporter comme des consoles verticales, attachées à leur pied BB' et supportant des efforts qui seront la combinaison des précédents, ainsi que nous allons le montrer.

Définitions : Nous nommerons *front* de la pile la face qui est frappée par le vent, et *face* celle qui est parallèle au vent.

408. **Tension des pièces.** — Nous allons indiquer, dans ses grandes lignes, la marche à suivre pour le calcul (fig. 405).

Supposons que le vent souffle dans la direction V; alors, dans la face parallèle au vent, on placera les diagonales comme l'indique la figure 405, c'est-à-dire en 2-5, 3-6, etc., de manière à ce qu'elles soient tirées et non pas comprimées.

Il est évident qu'il y aura aussi des diagonales dans l'autre sens pour le cas où le vent soufflerait de l'autre côté sur la fig. 405.

Les forces qui incombent à chaque nœud sont faciles à déterminer comme suit :

Au nœud n° 1 nous avons : 1° une charge verticale p_1 qui représente la moitié du poids de la pièce M que supporte la pile, ajouté au poids propre du demi-panneau 1-2 de la pile et 2° une charge oblique v_1 due à l'action du vent d'une part sur la pièce M et d'autre part sur le demi-panneau 1-2 du front de la pile.

Au nœud n° 5, nous avons seulement le poids p_5 de la moitié de la pièce M ajouté à celui du demi-panneau 5-6 de la face de la pile.

Au nœud n° 2, nous avons le poids p_2 des demi-panneaux 1-2 et 2-3, et l'action oblique v_2 du vent sur ces mêmes demi-panneaux.

Au nœud n° 6, nous avons seulement le poids des deux demi-panneaux 5-6 et 6-7 et ainsi de suite pour les autres nœuds.

Au nœud de base A, situé du côté du vent, nous supposons une rotule glissante ne pouvant développer qu'une réaction verticale X, inconnue pour l'instant, laquelle peut, si le vent est violent, être dirigée de haut en bas, c'est-à-dire nécessiter un ancrage dans un pesant massif de maçonnerie.

Enfin à l'autre nœud de base B, nous supposons une rotule fixe pouvant développer une réaction quelconque dont les composantes horizontales et verticales seraient Z et Y, inconnues également.

Cela posé : l'épure de statique graphique va se faire facilement, de proche en proche, comme suit.

Nœud n° 1. — Il n'y a que deux forces inconnues, qui sont les tensions des pièces 1-5 et 1-2; un dynamique les donnera donc.

Nœud n° 5. — Le nœud n° 1 a fait connaître la tension de la pièce 1-5; il n'y a donc plus d'inconnues que les tensions des deux pièces 2-5 et 5-6; un dynamique les donnera; et ainsi de suite, on prendra les nœuds dans l'ordre 2-6-3-7-4 et 8. Enfin :

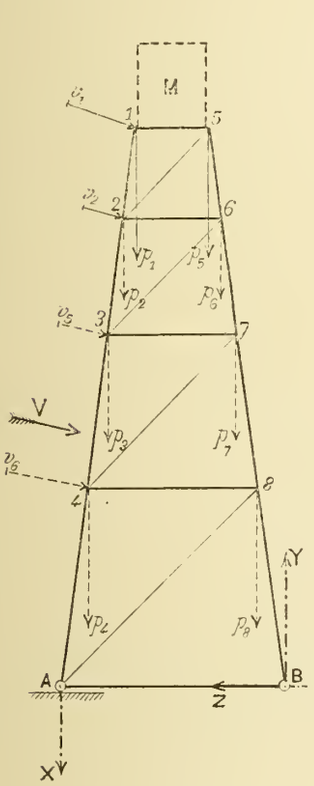


Fig. 405

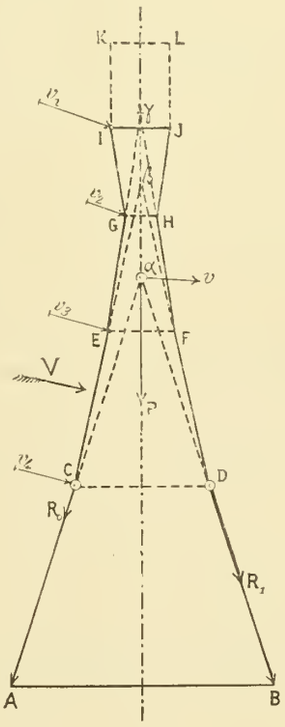


Fig. 406

Nœud A. — On connaîtra les tensions des barres A-4 et A-8, par les dynamiques des nœuds précédents.

Les deux inconnues seront donc la tension de la barre AB et la réaction X; ces inconnues étant au nombre de deux un dynamique les fournira.

Nœud B. — Les deux inconnues seront les composantes Z et Y de la réaction, déterminables, elles aussi, par un dynamique.

Il sera facile de grouper sur un seul et même diagramme du genre **Cremona** tous les dynamiques partiels des différents nœuds.

409. **Questions diverses.** — (*a*) *Pile de moindre entretoisement.* — Considérons un panneau quelconque de la face de la pile, par exemple le panneau AC (fig. 406); et soit αv la résultante des pressions de vent v_1, v_2, v_3, v_4, qui agissent sur la partie ACEGIK, comprenant le nœud supérieur C de ce panneau et tous les nœuds E, G, D, situés au-dessus de lui.

Traçons les arbalétriers du panneau de telle sorte que leur prolongement aille passer par le point α où cette résultante rencontre la verticale γP des poids de cette même partie de la construction; je dis que dans ce cas il n'y a besoin ni d'entretoises ni de tirants obliques dans le panneau considéré.

En effet, en α, agissent deux forces, savoir : le poids P de cette partie de la pile et aussi cette résultante αv de l'action du vent; on pourra donc remplacer ces deux forces par deux composantes R_0 et R_1 dirigées suivant les arbalétriers et qui y resteront contenues jusqu'au bas du panneau sans qu'il soit nécessaire de les équilibrer, au nœud C, par des forces émanant soit de barres, soit d'entretoises.

Cela conduirait à un profil polygonal allant en s'évasant par le bas et rappelant celui de la tour Eiffel.

Cette disposition n'est avantageuse que pour les piles dépassant 60 mètres de hauteur: pour les piles moins hautes les arbalétriers droits sont préférables comme étant d'une exécution plus facile.

(*b*) **Calcul direct des amarrages** (fig. 407). — Pour vérifier la stabilité d'une pile, on compose la résultante P des charges verticales qu'elle supporte avec la résultante horizontale V des efforts dus au vent; la résultante obtenue R doit passer dans l'intérieur de la base de la pile; si elle passe en un point tel que C, situé en dehors de la base, la pile tendra à être renversée en tournant autour de l'arête

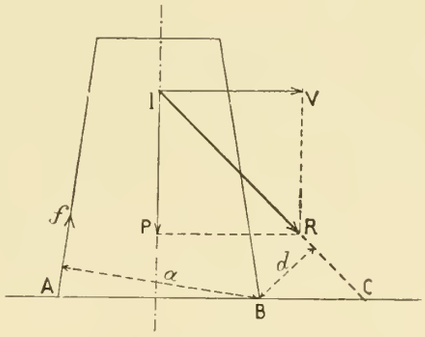


Fig 407

du point B, et il sera nécessaire de l'amarrer du côté de l'arête A. Comme le vent peut souffler des deux côtés, on voit que le même amarrage devra être fait le long de l'arête B.

Soit *d* la distance entre le point B et la résultante R, soit *a* la distance du point B à l'arbalétrier dont le pied est A; l'effort *f* développé dans l'ensemble des deux arba-

létriers de la face A a pour valeur

$$f = \frac{Rd}{a}.$$

Nous en prendrons la moitié pour avoir l'effort correspondant à chaque arbalétrier.

Le cube de maçonnerie intéressé par l'amarrage devra avoir un poids suffisant pour équilibrer l'effort f.

Si nous observons les règles du Board of Trade, rédigées par les ingénieurs anglais, nous devrons, pour plus de sécurité, doubler le poids de maçonnerie obtenu par le calcul.

CINQUIÈME PARTIE

LES ARCS

CHAPITRE PREMIER

THEORIE DES ARCS

§ 1. — Généralités

410. **Définitions.** — Les pièces courbes sont celles dont la fibre neutre n'est pas une ligne droite. Nous les subdiviserons en **poutres courbes** et en **arcs**.

(*a*) **Les poutres courbes.** — Imaginons une pièce courbe (fig. 408) ayant pour fibre neutre la ligne ACB. En A est une rotule fixe et en B une rotule pouvant glisser sur un

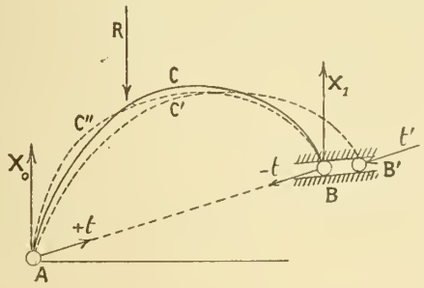


Fig. 408

plan que nous supposerons perpendiculaire à la résultante R des forces extérieures. Nous avons vu que dans ce cas (v. n° 169-*e*) les appuis forment un système strict ; la résultante R peut être équilibrée d'une seule manière par les réactions X_0 et X_1 et cette dernière est normale au plan de glissement de la rotule B.

Dans ces conditions la pièce est une *poutre courbe*.

Sous l'influence des forces extérieures et de son propre poids elle subit une déformation élastique ; elle s'ouvre ; sa fibre neutre passe de la figure ACB à la figure AC'B' ; la rotule B se déplace sur son plan de glissement et elle prend la position B'.

Nous nommerons *écart* le déplacement BB' pris ainsi par la rotule glissante.

Pour l'instant les réactions d'appui sont verticales.

(*b*) **Les arcs et la poussée.** — Ramenons maintenant l'extrémité B' à sa position première en détruisant l'*écart* primitif ; il nous faudra, pour cela, exercer un effort dirigé suivant la ligne BA : cet effort sera la *poussée* évaluée suivant la ligne d'appui. On conçoit que cette poussée dépendra de la constitution élastique de la poutre.

Une fois la rotule B' ramenée au point B, et maintenue en ce point par la poussée, elle sera comme si elle ne l'avait jamais quitté ; l'élastique AC'B' prendra une autre figure, AC''B par exemple. Dès lors, on pourra considérer la pièce

comme possédant, et ayant toujours possédé, en A et en B deux rotules fixes.

A cet instant nous avons **un arc** et non plus une poutre courbe.

La réaction d'un appui se compose, pour l'arc, de la réaction verticale de tout à l'heure combinée avec la poussée, ce qui donne une résultante totale oblique.

Les arcs sont donc caractérisés par des réactions d'appui qui ne sont pas parallèles à la résultante des forces extérieures.

En A et en B l'élastique nouvelle AC″B n'a plus la même tangente que la fibre neutre primitive ACB, et, puisqu'il y a des rotules, elle a pu prendre une direction quelconque ; le moment fléchissant y est nul.

Mais réalisons en A un encastrement, et forçons la fibre neutre à prendre en ce point une direction déterminée (ce sera ordinairement sa direction primitive) ; l'élastique AC″B sera modifiée à son tour, et par suite aussi la poussée ; en même temps, s'introduira au point A un couple d'encastrement M_0.

De même un encastrement réalisé sur le second appui B, modifiera de nouveau et l'élastique et la poussée et introduira un second couple d'encastrement M_1.

Toute étude d'arc doit avoir pour premier objectif la détermination de la poussée et celle des moments d'encastrement ; on peut même dire que là seulement gît la difficulté.

411. Classification des arcs.

(*a*) **Définitions.** — On nomme *sommier* d'un arc (fig. 409) le point A, ou le point B (fig. 408) de sa fibre neutre qui coïncide avec un appui. En réalité, le sommier n'est pas un point ; c'est la section MN normale à la fibre neutre en ce point. On a un *sommier encastré* (fig. 409-I, représenté schématiquement sur la fig. IV) lorsque la fibre neutre est obligée de garder en ce point une direction fixe. Au lieu d'encastrer réellement la pièce en la noyant dans un massif de maçonnerie, ce qui serait la vraie solution, mais très difficile à bien réaliser, c'est la section MN que l'on cale fortement par des coins *f*, *f*, *f*,.... contre une portée en fonte solidement scellée sur le mur. Cela revient à peu près au même ; néanmoins lorsqu'un couple se produit dans le sens de la flèche les coins situés en haut, du côté de M, tendent à se desserrer et s'ils n'ont pas été chassés très fortement ils peuvent ne plus porter. Un sommier encastré est caractérisé par ce fait que la pièce y subit un moment fléchissant dit : *moment d'encastrement*.

On a un *sommier à rotule* (fig. II, représenté schématiquement sur la fig. V), lorsque l'arc repose sur la pile par l'intermédiaire d'un tourillon, ordinairement en acier A, permettant au sommier de prendre au-dessus de lui toute espèce de direction. Le moment fléchissant y est nul.

Sur sa longueur, c'est-à-dire entre les deux sommiers, l'arc peut être coupé et les deux parties G et H (fig. III et VI) peuvent être *arc-boutées* entre elles par l'intermédiaire d'un tourillon C, que nous nommerons, dans ce cas,

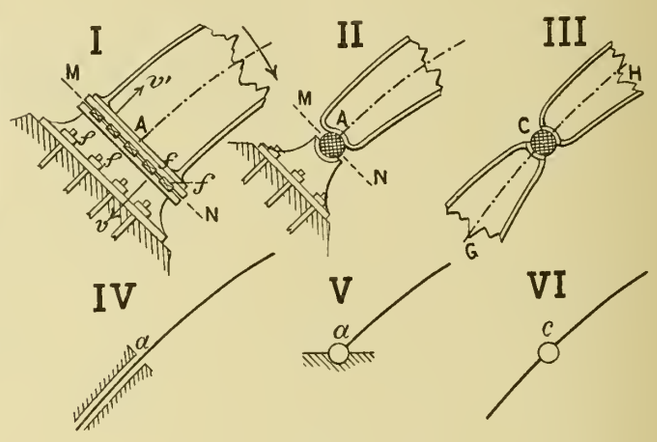


Fig. 409

une *charnière*. Au point C le moment fléchissant est nul et cette disposition d'*arc à charnière* est très utilisée depuis quelque temps ; nous en étudierons les avantages.

(*b*) **Différentes espèces d'arcs.** — On distingue les *arcs continus* (fig. 410-I, II et III), c'est-à-dire d'une seule pièce entre leurs sommiers et les *arcs discontinus* dits encore *arcs à charnières* (fig. IV à VIII), formés de plusieurs pièces.

Les *arcs continus* peuvent comporter :

1° Deux sommiers à rotule (fig. I) ;

2° Un sommier encastré et un sommier à rotule (fig. II) ;

3° Deux sommiers encastrés (fig. III).

Les *arcs discontinus* peuvent comporter :

4° Deux sommiers à rotule et une charnière (fig. V) ;

5° Un sommier à rotule, un sommier encastré et une charnière (fig. VI) ;

6° Deux sommiers encastrés et une charnière (fig. VII) ;

7° Deux sommiers encastrés et deux charnières (fig. IV) ;

8° Deux sommiers à rotule et deux charnières (fig. VIII) ; mais ce dernier type, réalisé à la gare de Silésie, du chemin de fer métropolitain de Berlin, exige qu'un tirant C*m* relie la seconde charnière C à un point *m* du premier tronçon de l'arc ; de sorte que, en réalité, la partie A*m*EC, malgré sa charnière E, constitue une première portion d'arc, tandis que la seconde est CB, et ce type VIII rentre dans le type V.

Le type I est réalisé aux célèbres ponts du Douro et de Carabit.

Le type III était le plus souvent adopté avant ces vingt dernières années ; il l'est encore, surtout pour les arcs de faible portée.

Le type V est celui qui a été choisi pour la galerie des machines à l'exposition de 1889 à Paris, et pour celle des arts libéraux à l'exposition de Chicago. Ses principaux avantages sont : 1° que l'on peut déterminer la poussée par la statique pure, ce qui veut dire qu'elle est in-

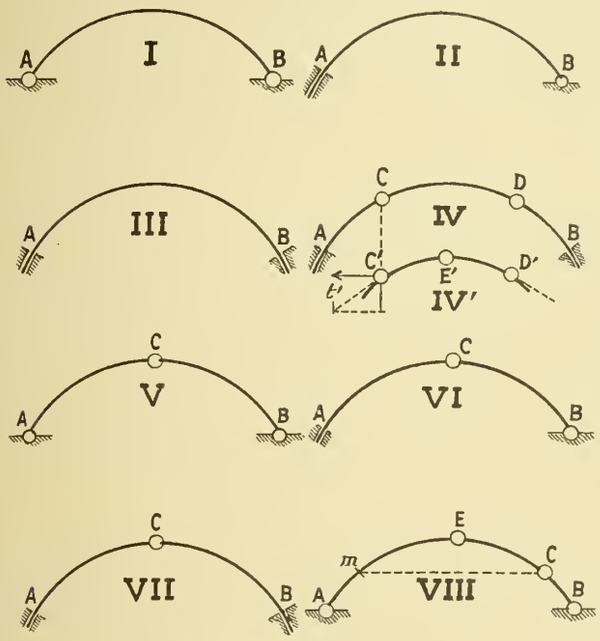


Fig. 410

dépendante des défigurations élastiques de la pièce ; 2° que les variations de température modifient très peu les efforts intérieurs ; 3° que de légers tassements des appuis sont également sans danger sérieux. Nous justifierons ces propriétés plus loin (v. 412-*d*).

Le type IV, en admettant que les encastrements A et B puissent être très bien réalisés, peut être considéré comme un cas particulier du type I dans lequel les piliers seraient prolongés par deux consoles AC et BD ; la portion d'arc CD exerce sur ses charnières C et D une poussée qui nécessite, pour son calcul, la connaissance des défigurations élastiques non seulement de l'arc CD mais encore des deux consoles AC et BD.

Mais on pourrait faire la partie supérieure CD avec une charnière de plus (fig. IV'), ce qui lui donnerait l'aspect C'E'D' et, dans ce cas, la statique pure suffirait à déterminer toutes les réactions, y compris les poussées en C et D aussi bien qu'en A et en B. Dans ce cas le type IV' ne serait qu'un cas particulier du type V.

412. **Avantages de la poussée.** — Avant d'aborder la recherche mathématique de la poussée, nous allons faire voir les avantages de cette poussée et, en comparant un arc avec une poutre qui aurait la même portée que lui, montrer pourquoi l'arc l'emporte sur la poutre.

(*a*) **Définitions.** — Nous appellerons *fibre neutre primitive*, ou simplement *primitive*, la fibre neutre d'un arc qui serait posé à plat sur le sol, et qui ne subirait aucun effort. C'est l'arc avant le montage. Une fois mis en place, son propre poids ainsi que les charges qui lui seront appliquées le déformeront ; sa fibre neutre changera de figure et nous la nommerons la *fibre neutre élastique* ou simplement l'*élastique*.

(*b*) **Rôle de la poussée.** — Supposons (fig. 411-I) que le sommier d'origine A soit à rotule fixe et que l'autre sommier D soit à rotule glissante, et que nous réunissions les deux sommiers par un tirant AD, muni en I d'un tendeur à vis de manière à pouvoir, à volonté, en exerçant une traction de plus en plus grande, rapprocher de plus en plus les deux sommiers.

Au début, laissons l'arc s'ouvrir sous l'influence de son poids et des charges qu'il supporte, et prendre la figure AC'D' ; ne donnons aucune traction au tirant. Dans cette défiguration de l'arc un point quelconque B de la primitive prend la position B'. L'arc supporte alors les mêmes moments fléchissants qu'une poutre droite de même portée qui serait chargée de la même manière que lui. Soit oM'' (fig. II) la représentative de ces moments de charge, qui, on le sait, sont positifs ; car ils tendent à ouvrir la pièce à la partie inférieure.

Maintenant, rapprochons les deux sommiers, c'est-à-dire modifions l'*Ecart*, soit en chassant des cales entre eux et la pile d'appui, qui se nomme alors une *Culée*, soit en tendant le tirant.

Cette tension du tirant, ou *poussée provisoire* t'', amènera la première élastique C'D' à la position AC''D''. Un point quelconque B de la primitive, qui occupait la position B' sur la première élastique, occupe maintenant la position B'' ; son ordonnée est $y'' = B''\beta''$ (fig. I).

Cette poussée provisoire t'' développe un moment fléchissant *négatif* qui a pour valeur $-t''y''$; la représentative de ces moments de poussée provisoire sera (fig. II) une courbe $o\Theta''d''$ obtenue par une dilation (réduction ou amplification) de l'élastique provisoire OC''D''. Si l'élastique provisoire OC''D'' est un arc de cercle la représentative $o\Theta''d''$ des moments de poussée provisoire sera un arc d'ellipse ; si elle est une parabole, elle sera aussi une parabole.

Nota. — Nous devrions dessiner cette représentative des moments de poussée en dessous de la ligne d'appui, puisqu'elle répond à des moments négatifs : Dessinons-la au contraire en dessus et prenons la différence $b''b''_1$ entre les ordonnées des moments de charge et celles des moments de poussée provisoire ; cette différence nous donnera le véritable moment en chaque point. On voit qu'il est plus petit que sous la seule influence des charges.

Continuons à rapprocher les sommiers, en augmentant la poussée provisoire ; la représentative des moments de poussée se dilatera encore en se rapprochant de plus en plus de celle des moments de charge. Lorsque le sommier d'extrémité aura repris sa position initiale D, alors la poussée

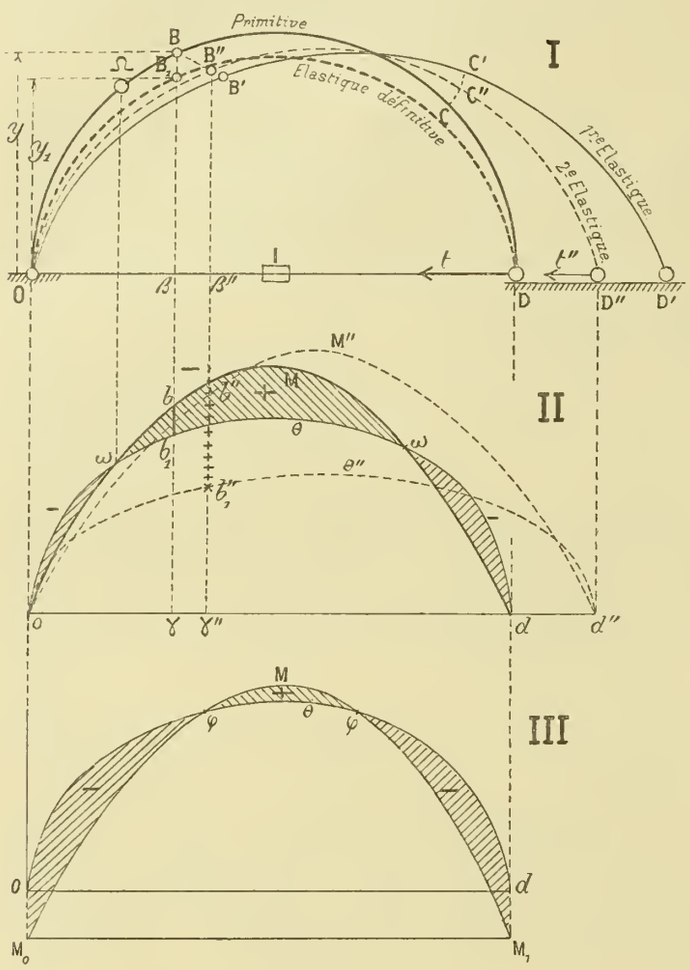


Fig. 411

provisoire sera devenue la *poussée définitive* (ou plus simplement la *poussée*) et l'arc sera dans sa position définitive.

La représentative des moments de poussée sera une dilatation de la fibre neutre, telle qu'elle est à cet instant, c'est-à-dire de *l'élastique définitive* OB_1D.

Remarque. — L'élastique définitive OB_1D différera toujours très peu de *la primitive* OBD de sorte que, sans erreur sensible, si nous connaissions la poussée définitive t, en dilatant la primitive dans le rapport t, c'est-à-dire en construisant la courbe dont les ordonnées seraient $t \times y$ nous aurions en ob_1d la représentative des moments de poussée.

Les différences, telles que bb_1, entre les ordonnées de la courbe des moments de poussée et celles des moments de charge donneront les moments définitifs en chaque point.

On doit, pour les signes, compter ces différences à partir de la courbe des moments de poussée. Si cette dernière est au-dessous de l'autre, le moment définitif est positif ; si elle est en dessus, c'est le contraire.

Si les deux courbes se rencontrent en un point ω le moment définitif au point correspondant Ω est nul. Nous pourrions, à la rigueur, couper la pièce en ce point Ω et réunir les deux tronçons par une charnière sans rien changer à l'équilibre général. Il est évident que les conditions de résistance de l'arc se sont améliorées par le fait de la poussée, et tout le talent du constructeur consiste à imaginer pour la fibre neutre primitive, aussi bien que pour la section de l'arc, des figures qui fassent que la poussée améliore le plus possible les conditions de résistance.

Il est évident, *à priori*, que si la courbe des moments de poussée ob_1d pouvait se confondre avec la courbe des moments de charge oMd, alors, en tous les points de l'arc, le moment définitif serait nul et la pièce ne subirait partout que des efforts de compression ; nous serions dans les meilleures conditions possibles. Nous verrons plus loin (v. *d*) comment on peut réaliser cela.

(*c*) **Rôle des encastrements.** — Il pourrait se faire, si la poussée était faible, que la courbe de poussée se tienne très en dessous de la courbe des charges ; alors, nous aurons intérêt, par des encastrements, à développer sur les sommiers des moments M_0 et M_1 qui seront généralement négatifs, car ils auront pour effet de détruire, pour les ramener à être nuls, les infléchissements positifs pris par les sommiers quand ils étaient à rotule.

La représentative de ces moments d'encastrement (fig. III) sera la droite négative M_0M_1. Elle aura pour premier effet de faire descendre la courbe des moments de charge dans la position M_0MM_1, en la faisant passer par les points M_0 et M_1, et, comme second effet, de modifier complètement les étendues respectives des zônes où les moments sont positifs et de celles où ils sont négatifs. Il se peut que l'arc soit ainsi dans de meilleures conditions, de même que le contraire peut arriver.

(*d*) **Rôle des rotules et des charnières.** — Sur une rotule aussi bien que sur une charnière, le moment fléchissant est nul ; cela signifie, d'après ce qui précède, que la représentative des moments de poussée y rencontre celle des moments de charge. Par conséquent, se donner une rotule ou se donner une charnière, revient à se donner un point de la courbe de poussée. Précisons cela.

Si les deux sommiers sont à rotule (fig. 411-I et II), la courbe des moments de poussée a son origine o et son extrémité d précisément aux sommiers. Elle n'est pas déterminée pour cela : elle est une dilatation de la fibre neutre, mais il reste à trouver le coefficient de dilatation, c'est-à-

dire la poussée. On ne peut le faire qu'en tenant compte des défigurations élastiques.

Si, de plus, on se donne une charnière (fig. 412) placée en un point quelconque N de la fibre neutre, cela revient à se donner en n, sur la courbe des moments de charge, un troisième point de la courbe des moments de poussée; cette courbe est donc par cela même déterminée ; et si y' est l'ordonnée de la fibre neutre en ce point de charnière N, si M' est le moment de charge correspondant, on aura, en appelant t la poussée,

$$ty' = M', \qquad \text{d'où} \qquad t = M' : y'.$$

On voit, ainsi que nous l'avions annoncé plus haut, que dans un arc du type V, à deux rotules et une charnière, la poussée est déterminée presque *a priori*, sans faire intervenir les défigurations élastiques.

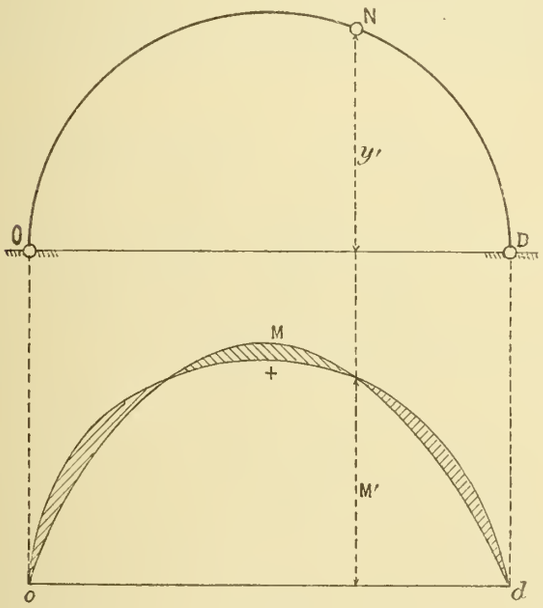


Fig. 412

Un changement de température aura pour effet de modifier très peu l'ordonnée y' et par conséquent, sur un tel arc, de modifier très peu, également, la poussée ainsi que toutes les conditions de résistance qui en sont une conséquence.

Un léger tassement d'un appui aura le même effet et, par suite, aura les mêmes conséquences, non dangereuses. Au contraire, pour les arcs dont la poussée est une conséquence des défigurations élastiques, attendu que les changements de figure dus soit à la chaleur, soit à un tassement, sont tout à fait de même ordre de grandeur que ces défigurations, il en résulte que les variations de température, aussi bien que les tassements, peuvent modifier considérablement la poussée et par suite toutes les conditions de résistance. C'est ce qui explique, pour les très grands arcs, l'emploi de plus en plus fréquent du type V à deux rotules et une charnière.

(*e*) **Arc sans flexion.** — Il résulte de cette étude première que l'arc le meilleur serait un arc du type V, dont la fibre neutre serait une dilatation de la représentative des moments de charge. Pour un tel arc, la courbe de poussée se confondrait avec celle des moments et nous n'aurions de flexion en aucun point.

Si les charges étaient uniformément réparties, la représentative des moments de charge serait une parabole et l'*arc sans flexion* devrait avoir également pour fibre neutre une parabole.

413. Equilibre moléculaire dans une section quelconque. — (*a*) **Transport des forces.** — Considérons (fig. 413) un arc dont un fragment de la fibre neutre est représenté en GG_1. Soit AB, A'B' un *bi-plateau* séparant l'arc en deux tronçons, l'un à gauche et l'autre à droite. Comme il a été dit au n° 113, nous gardons le tronçon de droite et nous enlevons celui de gauche, à la condition de le remplacer par toutes les forces qui agissent sur lui. Ces forces comprennent :

1° La réaction au sommier de gauche, réaction dont fait implicitement partie la poussée et dont nous supposons connues la grandeur et la direction; le point d'application de cette poussée, ainsi que celui des composantes verticales des réactions, est toujours le centre de gravité du sommier;

2° Le couple d'encastrement M_0 s'il y a encastrement;

3° Toutes les forces directement appliquées sur ce tronçon et comprenant le poids propre, les charges et les surcharges.

Nous transportons toutes ces forces et ce couple sur le plateau de gauche AB. Les forces sont transportées au centre de gravité G de ce plateau et le transport de chacune d'elles donne naissance à un couple. Le couple d'encastrement se transporte intégralement.

Toutes les forces appliquées en G ont une résultante unique P, et tous les couples donnent lieu à un couple ré-

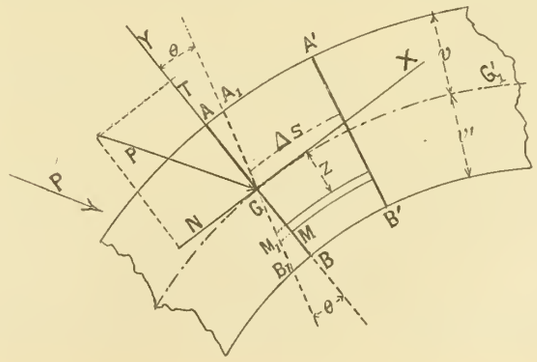


Fig. 413

sultant unique ; et comme nous supposons que toutes les forces sont contenues dans le plan vertical de la fibre neu-

tre, ou sont symétriques par rapport à ce plan, il s'ensuit que la résultante de transport P est aussi dans ce plan et que le couple de transport a son plan parallèle à ce plan. Cela fait :

(*b*) **Notations et conventions sur les signes.** — Désignons par :

Δs, la distance GG′ des plateaux ; cette distance est comptée sur la fibre neutre, de gauche à droite, c'est-à-dire de G vers G′; c'est l'épaisseur, infiniment petite, du *bi-plateau*;

Ω, la surface de chacun des deux plateaux;

G et G′, leurs centres de gravité;

I, le moment d'inertie du plateau AB par rapport à l'axe qui serait projeté en entier en G ;

v et v', les distances à cet axe des fibres qui en sont les plus éloignées. v, situé au-dessus, aura le signe $+$ et v' le signe $-$;

z, la distance à cet axe d'une fibre quelconque MM_1. z sera positif au-dessus de G et négatif au-dessous ;

p, l'effort unitaire que supportera cette fibre. p aura le signe $+$ si c'est une compression et le signe $-$ si c'est une traction ;

E, le module d'élasticité de la matière, supposée homogène ;

R, la résistance de sécurité. *Nota* : Si la matière est à résistance dissymétrique (telle est la fonte), on désignera par R′ la résistance à la compression et par R″ celle à la traction. Mais en général on aura $R' = R'' = R$;

M, le moment fléchissant : Positif s'il tend à comprimer les fibres supérieures du bi-plateau et négatif dans le cas contraire;

N, la composante, ou *effort normal* au plateau, c'est-à-dire tangente à la fibre neutre; N est positif si il tend à produire une compression, et négatif si il tend à produire une traction;

T, *l'effort tranchant*, positif s'il tend à soulever le tronçon de gauche par rapport à celui de droite, négatif dans le cas contraire;

θ, l'infléchissement, c'est-à-dire l'angle infiniment petit dont le bi-plateau s'ouvrira sous l'influence du couple M. θ est positif ou négatif dans les mêmes conditions que M. On confondra l'angle θ, qui est infiniment petit, avec sa tangente trigonométrique.

Du reste tous les angles, soit infiniment petits soit très petits, qui résultent de défigurations élastiques seront confondus avec leur tangente trigonométrique ou avec leur sinus; ainsi lorsque nous dirons α, ou α_0 ou α_1, il faudra lire indifféremment : α, tg α ou sin α..., ou α_0, tg α_0 ou sin α_0.

(*c*) **Formules.** — Nous avons les formules suivantes déjà connues.

$$(1) \qquad \theta = \frac{M}{EI}\Delta S \qquad \textit{(formule de l'infléchissement.)}$$

$$(2) \qquad p = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mz}{I} \qquad \textit{(formule de l'effort fibraire complexe}, \text{ voir n° 322 et 356.)}$$

Pour les fibres extrêmes, situées aux distances v et v', on aura les équations d'équarrissage

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{ll} R' = \dfrac{N}{\Omega} + \dfrac{Mv}{I} & \text{fibre comprimée} \\ R'' = \dfrac{N}{\Omega} + \dfrac{Mv'}{I} & \text{fibre tirée} \end{array}\right\} \textit{Equations d'équarrissage complexe.}$$

v' entrera avec le signe moins dans la seconde des formules (3).

(*d*) **Centres de pression.** — Au lieu de transporter au centre de gravité du plateau AB toutes les forces appliquées au tronçon de gauche nous pourrions (fig. 414) composer d'abord toutes ces forces, en chercher la résultante R

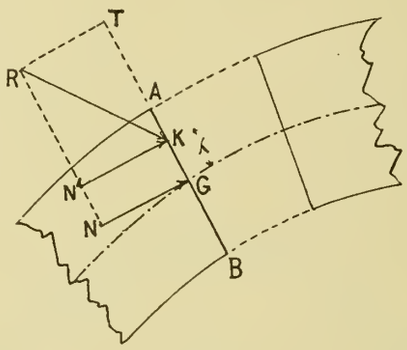


Fig. 414

et chercher le point K où cette résultante rencontre le plateau AB. Ce point K serait le *centre de pression*, tel qu'il a été défini aux n°s 321 et suivants. Soit X sa distance au centre de gravité G.

Au point K on décomposera R en une composante normale N′ et en une composante T dirigée dans le plan du plateau, laquelle constituera l'effort tranchant de tout à l'heure.

Quant à N′, comme elle ne sera probablement pas appliquée au centre de gravité G, mais à une distance X de G, alors nous l'y transporterons, ce qui fournira en N l'*effort normal* de tout à l'heure et donnera naissance à un couple qui aura pour valeur $M = N \times X$, et qui sera le *moment fléchissant*, le même que celui trouvé tout à l'heure.

Il résulte de là que si l'on connaît la résultante R (en grandeur et direction) et le moment fléchissant M, on peut en déduire la grandeur N de l'effort normal et aussi la distance $X = M : N$ du centre de pression K au cen-

tre de gravité G, c'est-à dire un point de la résultante R, et inversement. Le lieu des points K se nommera la *courbe des centres de pression*.

C'est pourquoi nous avons dit tout à l'heure que pour tout sommier encastré on se donnera la réaction totale, laquelle sera la résultante de la réaction verticale et de la poussée, *en la supposant appliquée au centre de gravité* et on y joindra le couple d'encastrement M_0 ou M_1, puisque de cette double connaissance résulterait la position exacte de la réaction.

En résumé nous voyons que si la poussée t était déterminée ainsi que les moments d'encastrement M_0 et M_1 nous connaîtrions toutes les forces extérieures auxquelles l'arc est soumis et nous connaîtrions aussi l'équilibre moléculaire dans chaque section. Or, sauf pour les arcs à trois articulations, ces données dépendent des déformations élastiques de l'arc, c'est pourquoi nous allons maintenant aborder cette étude, après la digression suivante, très importante.

413 *bis* **Digression.** — Le lecteur est prié de relire au préalable les nos 193 à 197 relatifs à l'éification des poutres, cela fait :

(*a*) **Déformées relatives d'une courbe.** — Soit OMD, fig. 415-I, une courbe que nous nommerons *une déformatrice*, et qui, dans ce qui suivra, sera la fibre neutre d'un arc. Soit M, un de ses points, ayant pour abscisse x, et soit MT la tangente en ce point faisant avec l'axe des x un angle ε ; menons la normale MN.

Prenons maintenant (fig. II) une autre courbe, $\mu_0'A'\mu_1'$ rapportée aux mêmes axes ou à des axes parallèles et considérons celui de ses points A' qui répond à la même abscisse que M ; soit y' l'ordonnée de ce point. Amplifions cette ordonnée dans le rapport 1 : cos ε, ce qui donnera un point A'' dont l'ordonnée y'' aura pour valeur

$$y'' = y' : \cos \varepsilon.$$

Le lieu des points tels que A'' sera la déformée relative de la courbe, c'est-à-dire la déformée obtenue en prenant pour déformatrice la courbe OMD.

L'opération se fait comme suit : on mène A'n (fig. II) parallèle à la normale MN (fig. I), et la longueur A'n interceptée entre le point A' et l'axe des x, donne la valeur de y''.

(*b*) **Déformée propre.** — La déformatrice de la fig. I peut se déformer elle-même et donner la courbe OM'ID (en pointillé) qui sera *sa déformée propre*. Si l'on connaît cette déformée propre, la déformation relative de toute autre courbe revient à amplifier les ordonnées de cette courbe dans le rapport de l'ordonnée de la déformée propre à l'ordonnée de sa déformatrice ; on aura : A''a : A'a = M'm : Mm.

Nota. Dans ce qui va suivre la fibre neutre OMD d'un arc servira de déformatrice à toute une série d'autres lignes qui seront des représentatives soit de moments naturels soit de moments eïfiés ; ainsi :

(*c*) **Rectangle unitaire déformé-eïfié.** — Nous prendrons (fig. II) une représentative rectangulaire $\mu_0\mu_1$ de moments naturels répondant au moment unitaire μ constant sur toute une poutre ; nous eïfierons le rectangle $\mu_0\mu_1$, ce qui donnera en $\mu_0'\mu_1'$ (trait pointillé) le rectangle unitaire-eïfié (v. n° 196) ; nous déformerons ce dernier rectangle comme il vient d'être dit, ce qui donnera en $\mu_0''\mu_1''$ (trait plein) le *rectangle unitaire déformé-eïfié.*

(*d*) **Triangles unitaires déformés-eïfiés.** — Nous décomposerons (fig. III) le rectangle unitaire naturel μ en deux triangles dont les hypoténuses GD et OH seraient les représentatives qui résulteraient d'un moment unitaire μ, appliqué *séparément* sur chacun des deux appuis. Nous le désignerons par μ_0 lorsqu'il sera appliqué au sommier d'origine et par μ_1 au sommier d'extrémité. Nous eïfierons ces triangles unitaires et ensuite nous les déformerons comme il vient d'être indiqué, ce qui donnera les triangles unitaires déformés-eïfiés OG''D à gauche et OH''D à droite.

Les deux opérations peuvent se faire d'un seul coup à l'aide du rectangle $\mu_0''\mu_1''$ et sans passer par l'eïfication ; il suffira en effet, à l'aide d'une oblique auxiliaire $b\beta$, sur laquelle on reportera en bA et bA'' les longueurs aA et aA'' de la fig. II, de faire en sorte que l'on ait

$$bB'' : bB = aA'' : aA.$$

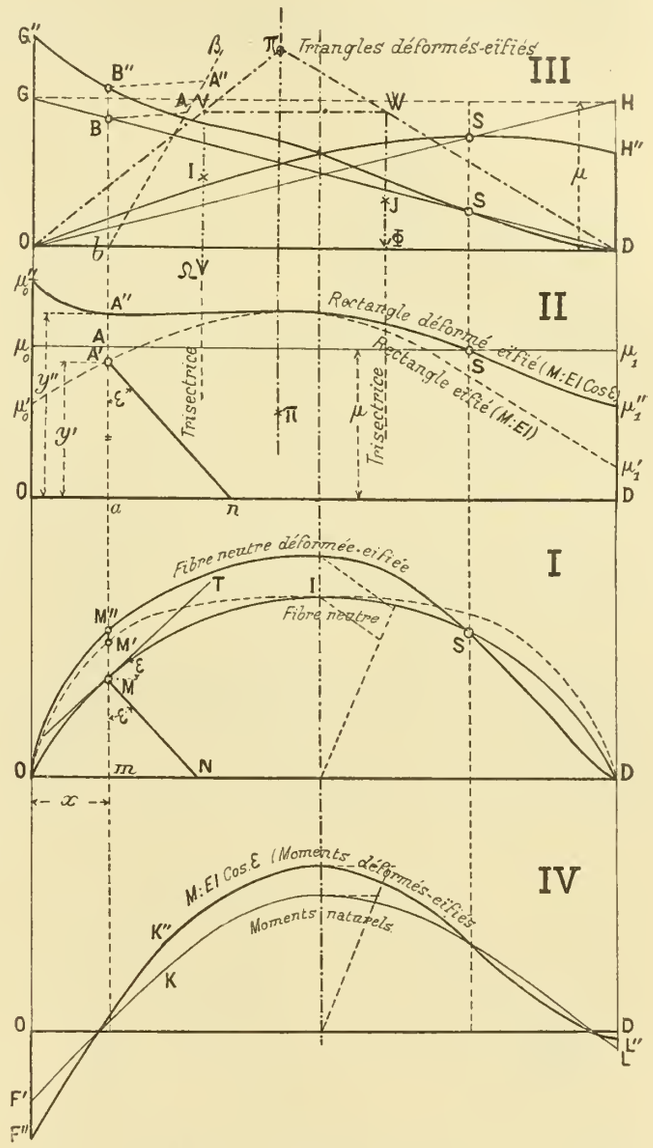


Fig. 415

On voit que le rectangle unitaire déformé-eïfié servira pour l'eïfication et pour la déformation immédiate de n'importe quelle autre courbe.

(*e*) **Fibre neutre déformée-eïfiée.** — C'est ainsi que l'on aura en OM''SD (fig. I) la déformée-eïfiée de la fibre neutre elle-même et (fig. IV) en F''K''L'' la déformée-eïfiée d'une représentative quelconque FKL de moments naturels.

On remarquera l'analogie de ces opérations avec celles qui ont été indiquées pour les poutres droites (v. n° 194). La seule différence consiste en ce que nous ajoutons la déformation à l'eïfication en prenant pour déformatrice la fibre neutre.

(*f*) **Les trisectrices d'un arc et le funiculaire $\widetilde{\Omega\Phi}$.** — Comme pour la poutre droite nous désignerons les aires des deux triangles unitaires *déformés-eïfiés* par les lettres Ω (à gauche) et Φ (à droite). Les verticales

qui passeraient par leurs centres de gravité seront les *trisectrices* (déformées-ciffiées) de l'arc et elles seront désignées par les lettres I et J. ω sera la réaction du triangle Ω sur l'appui de gauche et ω' sera sa réaction sur l'appui de droite ; de même φ et φ' seront les réactions de droite et de gauche du triangle Φ.

En ajoutant les ordonnées des triangles Ω et Φ on retrouvera les ordonnées du rectangle, que nous désignerons indifféremment sous le nom de *rectangle* μ ou de *rectangle* $\widetilde{\Omega\Phi}$ pour indiquer qu'il est la somme des triangles Ω et Φ.

On démontrera, de même qu'au n° 195-*b*, que tout funiculaire $\widetilde{\Omega\Phi}$ tel que CVπWD construit sur les deux aires Ω et Φ, supposées concentrées sur les trisectrices, est un trapèze ; ce qui entraîne $\varphi = \omega'$, comme pour les poutres.

(*g*) **Autres genres de déformation.** — Au lieu de multiplier par le facteur $1 : \cos\varepsilon$, ce qui donne une déformation que nous pourrions nommer *anti-cosinusoïdale*, on peut prendre pour facteur de déformation $\cos\varepsilon$, ou $\sin\varepsilon$, ou $\operatorname{tg}\varepsilon$... ce qui donnerait des déformées *cosinusoïdales*, *sinusoïdales*, *tangentielles*, etc... Nous aurons à en faire usage plus loin.

§ 2. — Défiguration des pièces courbes

414. Formules générales.

(*a*) **Convention préalable.** — Au point de vue des efforts moléculaires produits dans une section, le couple de flexion M, l'effort normal N et l'effort tranchant T ont une égale importance pour faire travailler les fibres ; mais au point de vue des défigurations générales de la pièce, les effets des couples de flexion l'emportent de beaucoup sur les autres ; c'est pourquoi nous pourrons ne tenir compte, dans l'étude des défigurations, que de celles qui sont dues à la flexion. Nous arriverons ainsi à établir une méthode qui, tout en n'étant qu'approximative, donne des résultats suffisants pour les besoins de la pratique.

(*b*) **Formules des défigurations élémentaires.** — Nous procéderons comme pour les poutres droites (v. n° 177). Soit OABD (fig. 415 bis) la fibre neutre primitive d'un arc. Le sommier de gauche O est pris pour origine des coordonnées ; l'axe des y est parallèle aux charges, c'est-à-dire vertical ;

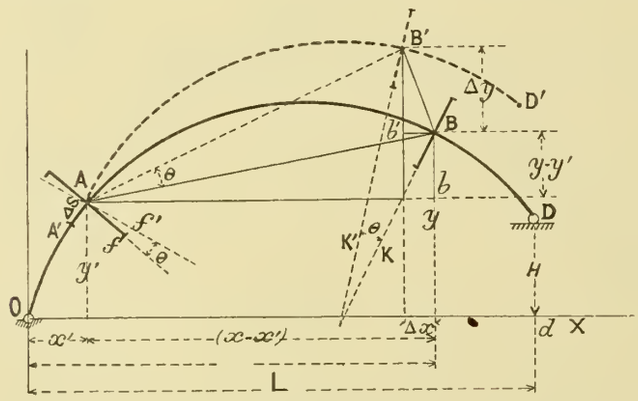


Fig. 415 bis

l'axe des x est horizontal. — Le sommier de gauche est D et, pour plus de généralité nous pourrions supposer qu'il n'est pas à la même hauteur que l'autre (fig. 415 *bis*). Ses coordonnées seraient alors :

L, ouverture ou *portée* de l'arc ;

H, dénivellation des sommiers.

Mais, pour ne pas compliquer nos explications, plaçons-nous dans les conditions ordinaires et supposons (fig. 416-I que les sommiers sont au même niveau ; $(H = 0)$.

Nous admettons que l'on connaît pour chaque point de l'arc :

1° *Le moment fléchissant*, M. (Quant à l'effort tranchant T) et à l'effort normal N, ils sont inutiles dans le cas présent, d'après la convention précédente.)

2° La *section*, c'est-à-dire son moment d'inertie I et le coefficient d'élasticité E.

Nous considérons (fig. 416) un point A, dont les coordonnées sont x' et y', et le bi-plateau AA', qui précède immédiatement ce point, et dont l'épaisseur infiniment petite est ΔS. Soit M le moment fléchissant en ce point A et I le moment d'inertie de ce plateau. Nous supposerons M positif ; les conventions relatives aux signes généraliseront, pour le cas où M serait négatif, les formules que nous allons établir.

Le couple M produit un infléchissement positif, θ, qui amène le plateau Af dans la position Af' et l'on a :

$$\theta = \frac{M}{EI}\Delta S \qquad (\textit{formule de l'infléchissement.})$$

Etudions l'effet produit par cet infléchisssement sur la portion AD de l'arc située à sa droite et, en particulier, sur une section BK, passant par le point B dont les coordonnées sont x et y.

Supposons que cette portion AD de l'arc soit complètement libre d'obéir à la rotation générale que l'infléchissement du bi-plateau produit autour de A comme charnière ; alors ABD prend la position AB'D' et le point B vient en B' en parcourant un arc de cercle décrit de A comme centre et dont l'angle au centre BAB' est égal à l'infléchissement θ. Cette rotation produit deux effets sur la section BK, savoir :

1° Un *déplacement* du point B, qui est la combinaison du *déplacement horizontal* $Bb' = \Delta x$ (négatif), et du *déplacement vertical* $b'B' = \Delta y$ (positif).

2° Une déviation angulaire : la section occupait la position BK, elle occupe maintenant la position B'K' faisant avec la première l'angle θ. Et comme nous admettons que la fibre neutre est, malgré ses défigurations, toujours normale à la section, il en résulte que θ est aussi la déviation angu-

laire de la fibre neutre au point B quand il est venu en B'.

Les quantités Δx, Δy et θ seront les *mouvements élémentaires* produits, sur la section B, par la défiguration du biplateau A, c'est-à-dire par le moment fléchissant qui existe en A ; nous allons les évaluer.

Nous avons d'abord la déviation angulaire élémentaire de la fibre neutre :

$$(1) \qquad \theta = \frac{M}{EI}\Delta S \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule de la déviation} \\ \textit{élémentaire.} \end{array} \right\}$$

Evaluons les déplacements linéaires Δy et Δx du point B et remarquons d'abord que l'angle θ étant infiniment petit l'arc BB' peut être confondu avec sa corde et que l'on aura : $BB' = AB \times \theta$. Cela posé :

Les triangles BB'b et ABb sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires et ils donnent (fig. 416) :

$$\frac{B'b'}{Ab} = \frac{BB'}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{x - x'} = \frac{AB \times \theta}{AB}, \quad \text{d'où}$$

$$(2) \qquad \Delta y = +\frac{M}{EI}(x - x')\Delta S \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule du déplacement} \\ \textit{vertical élémentaire.} \end{array} \right\}$$

Les mêmes triangles donnent

$$\frac{Bb'}{Bb} = \frac{BB'}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x}{y - y'} = \frac{AB \times \theta}{AB}, \quad \text{d'où}$$

$$(3) \qquad \Delta x = -\frac{M}{EI}(y - y')\Delta S \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule du déplacement} \\ \textit{horizontal élémentaire.} \end{array} \right\}$$

Nous affectons le second membre du signe *moins* d'après la remarque faite ci-dessus, que Δx est négatif lorsque M est positif.

(*c*) **Leur interprétation**. — Soit (fig. 416-II) OABD la fibre neutre et soit (fig. III) en M_0MM_1 la représentative des moments fléchissants naturels. Faisons subir à cette représentative une déformation en prenant pour déformatrice la fibre neutre, comme il a été dit au n° 413 *bis*, et ensuite éifions-la. Nous aurons ainsi en $M_0''M''M_1''$ la représentative de $M : EI \cos \varepsilon$, (ε étant l'angle que la tangente en A à la fibre neutre fait avec la corde de l'arc).

La courbe à cheval, dite courbe V. — Prenons maintenant chacune des ordonnées de cette courbe et (fig. II) portons-la de a en a' *à cheval* sur la fibre neutre, c'est-à-dire de telle sorte que l'on ait $Aa = 1/2\overline{mM''}$; nous obtiendrons ainsi une aire $oadd'a'o'$ que nous nommerons la *courbe à cheval des moments dilatés-eïfiés* ou, par abréviation, la *courbe à cheval*. Comme pour les poutres droites nous la désignerons par la lettre V, de sorte que nous dirons indifféremment la courbe à cheval, ou la courbe V.

Cela posé : considérons (fig. II) l'élément de fibre neutre ΔS qui a son centre au point A, et considérons le petit parallélogramme $a'a$ de *la courbe à cheval* qui lui correspond ; je dis que sa surface ω est précisément égale à $(M : EI)\Delta S$, c'est-à-dire à l'infléchissement θ.

En effet $\Delta x'$, hauteur de ce parallélogramme comptée parallèlement à l'axe des x, est $\Delta x' = \Delta S \times \cos \varepsilon$.

Sa base verticale est aa' et l'on a d'après ce qui précède

$$\overline{aa'} = \frac{M}{EI \cos \varepsilon}, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \overline{aa'} \times \Delta x' = \frac{M\Delta S}{EI}.$$

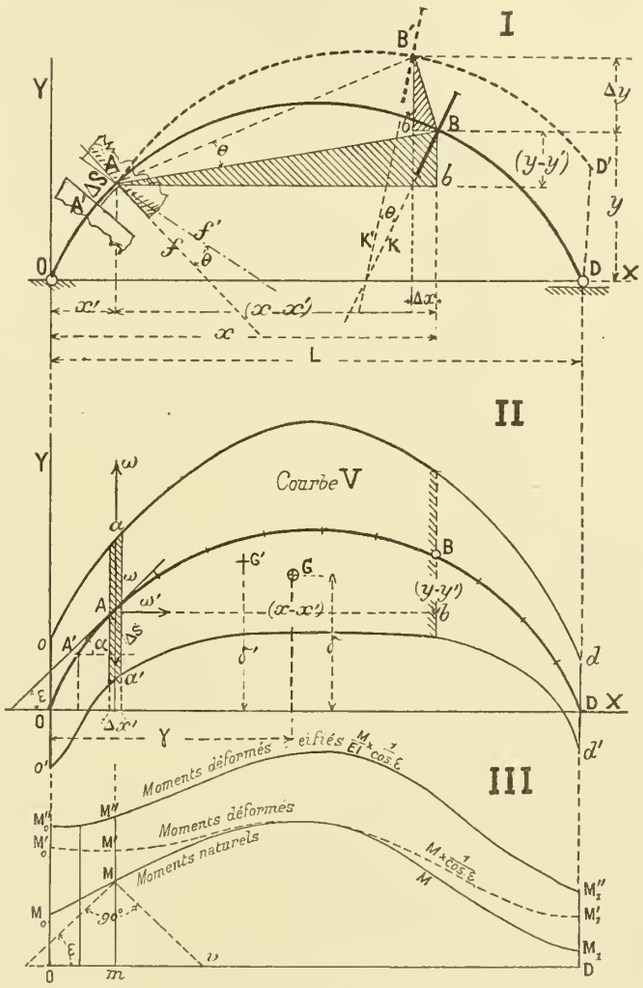


Fig. 416

D'où ce lemme :

Lemme : « En chaque point l'infléchissement θ est égal « à l'aire élémentaire de la courbe à cheval (ou courbe V). »

(*c*) **Défigurations totales.** — 1° *Déviation angulaire totale.* — Nous avons vu que l'infléchissement ainsi produit dans le biplateau de A se répercutait en vraie grandeur en B et donnait à la section, aussi bien qu'à la fibre neutre en B, une déviation angulaire élémentaire égale aussi à θ.

De sorte que, si nous totalisons toutes les déviations angulaires élémentaires produites sur la section B par le fait des infléchissements de chacune des sections qui la précèdent, ce total sera égal à l'aire de la *courbe à cheval* comptée entre l'ordonnée d'origine et l'ordonnée du point B, c'est-à-dire à V_0^B, en employant les mêmes notations sym-

boliques que pour les poutres droites (v. n° 177-*d*). Si de plus le sommier a pris une déviation angulaire initiale α_0, très petite, nous aurons, en appelant α la déviation angulaire *totale* de la fibre neutre au point B,

$$\text{(A)} \qquad \alpha = \alpha_0 + V_0^B \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule des déviations} \\ \textit{angulaires totales.} \end{array} \right\}$$

2° *Déplacement vertical total, et déplacement horizontal total.* — La formule (2), des déplacements élémentaires verticaux,

$$\Delta y = \frac{M}{EI}(x - x')\Delta S,$$

signifie que Δy est le moment, par rapport au point B, de l'aire élémentaire ω, considérée comme une force fictive qui agirait *verticalement*, et positivement, c'est-à-dire de bas en haut dans le sens des y positifs. Si les moments étaient négatifs la force fictive ω devrait agir négativement, c'est-à-dire de haut en bas, comme un poids.

Appelons b le déplacement vertical total du point B, et a son déplacement horizontal total.

Soit G′ le centre de gravité de l'aire sectionnée V_0^B, γ' l'abscisse de son centre de gravité et δ' son ordonnée. — Le déplacement vertical total b sera égal à la somme des moments partiels et par suite égal à $V_0^B \times (x - \gamma')$.

Faisons pivoter, autour de A, la force ω qui représente le poids de l'élément de surface aa' et amenons ω en ω' parallèle à la ligne des appuis, en la dirigeant positivement, c'est-à-dire dans le sens OX. La formule (3) des déplacements élémentaires horizontaux

$$\text{(3)} \qquad \Delta x = -\frac{M}{EI}(y - y')\Delta S,$$

signifie que Δx est le moment, avec le signe voulu, de cette force horizontale ω' par rapport au point B.

Nous disons « *avec le signe voulu* » parce que dans la formule (3) il faut prendre M avec le signe —. Or en dirigeant la force ω dans le sens OX, des abscisses positives, le moment fléchissant fictif qu'elle donne en B tend à faire ouvrir le biplateau B à sa partie supérieure et, par conséquent, d'après nos conventions, est négatif comme l'exige la formule (3).

Si le moment eût été négatif il eût fallu diriger la force fictive ω' dans le sens des x négatifs, c'est-à-dire de droite à gauche.

S'il existe, en outre, une déviation angulaire initiale α_0 prise par le sommier d'origine, toujours très petite, elle imposera au point B deux déplacements, savoir :

1° Un déplacement vertical qui aura pour valeur $+\alpha_0 x$ et

2° Un déplacement horizontal qui aura pour valeur $-\alpha_0 y$. Cela s'établirait comme on l'a fait pour les déplacements dus à l'infléchissement en A. On aura donc finalement

$$\text{(B)} \qquad b = +\alpha_0 x + V_0^B(x - \gamma') \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule des déplacements} \\ \textit{verticaux ou déplace-} \\ \textit{ments en hauteur.} \end{array} \right\}$$

$$\text{(C)} \qquad a = -\alpha_0 y + V_0^B(y - \delta') \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{formule des déplacements} \\ \textit{horizontaux ou dépla-} \\ \textit{cements en largeur.} \end{array} \right\}$$

(*d*) **Effets de la dilatation calorifique.** — Toute figure homogène qui se dilate librement sous l'influence de la chaleur reste semblable à elle-même ; ainsi (fig. 417) un cercle reste un cercle, une ellipse reste une ellipse. De plus, si un point O de la figure reste fixe ainsi que l'orientation de la figure en ce point, la figure dilatée est homothétique de la figure primitive et le point fixe O est le centre d'homothétie.

Supposons que τ soit l'allongement par mètre linéaire sous l'influence d'un écart de température déterminé ;

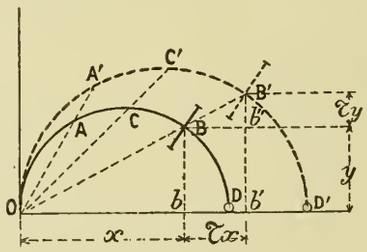


Fig. 417

tous les rayons vecteurs tels que OA, OB, OC, etc. deviendront OA′, OB′, OC′, etc. et l'on aura

$$OA' = \tau \times OA, \qquad OC' = \tau \times OC, \quad \text{etc.}$$

Par conséquent pour un point B, de coordonnées x et y, les choses se passeront comme si son abscisse Ob se dilatait d'une quantité

$$bb' = \tau x$$

et son ordonnée Bb, d'une quantité $b''B' = \tau y$.

Nota. — Pour le fer, une augmentation de température de 25° centigrades représente une dilatation de 0,00035 par mètre puisque le coefficient de dilatation est $\delta = 0{,}0000122$; donc en admettant cet écart de température, on aura $\tau = 0{,}00035$.

Enfin remarquons, qu'après dilatation, la section en B, qui était normale à la fibre neutre, reste normale en B′, à cause de l'homothétie des figures OAB, OA′B′.

(*e*) **Formules des défigurations totales.** — En ajoutant aux déplacements dûs aux moments fléchissants et à une déviation initiale, ceux qui sont relatifs à l'accroissement de température, nous obtiendrons les formules générales suivantes donnant les déplacements totaux d'un point B de la fibre neutre et la déviation angulaire de la section en ce point.

(A′) $\alpha = \alpha_0 + V_0^B$ *Déviation angulaire*,
(B′) $b = \tau y + \alpha_0 x + V_0^B(x - \gamma')$ *Déplacement vertical*,
(C′) $a = \tau x - \alpha_0 y + V_0^B(y - \delta')$ *Déplacement horizontal*,
avec $\tau = 0{,}00035$ pour le fer et l'acier.

415. Conséquences de l'invariabilité des sommiers.

(*a*) **Application, aux sommiers, des formules générales.** — Les formules générales qui précèdent s'appliquent à une pièce courbe quelconque ; nous allons maintenant supposer que cette pièce est un arc, c'est-à-dire une pièce courbe dont les sommiers sont fixes, avec ou sans encastrement, et nous allons voir à quelles conditions doivent alors satisfaire la déviation initiale α_0, la déviation finale α_1 ainsi que la courbe totale V.

Nous n'aurons, pour cela, qu'à exprimer que les déplacements en hauteur et en largeur, du sommier d'extrémité, sont nuls.

Si les deux sommiers sont à rotule, nous ne ferons aucune hypothèse sur les déviations angulaires α_0 et α_1 des sommiers et nos formules nous permettront de trouver ces déviations ; elles seront, avec la poussée t, les trois inconnues du problème.

Si le sommier d'origine est encastré nous ferons $\alpha_0 = 0$ et les inconnues seront la poussée t, le moment d'encastrement M_0 et la déviation angulaire à l'extrémité α_1. Si le sommier d'extrémité est encastré nous ferons $\alpha_1 = 0$; les inconnues seront t, M_1 et α_0.

Nota. — Nous commencerons par ne pas tenir compte de la température, c'est-à-dire que dans les formules générales (A′), (B′) et (C′) nous ferons $\tau = 0$.

Les formules de défiguration (A′), (B′) et (C′) sont générales et sont, par suite, applicables au sommier d'extrémité D, pour lequel on a :

$x = L$ et $y = 0$; soit :

V (sans indices), l'aire *totale* de la *courbe à cheval* des moments déformés-eïfiés ;

G, son centre de gravité ;

γ, l'abscisse de ce centre de gravité ;

δ, l'ordonnée de ce même centre de gravité ;

α_1, la déviation angulaire totale de la fibre neutre au sommier D, ou *déviation finale.*

Nos formules deviennent, en faisant $b = 0$, $a = 0$ et $x = L$, $y = 0$, $\gamma' = \gamma$ et $\delta' = \delta$,

$$\alpha_1 = \alpha_0 + V,$$
$$0 = \alpha_0 L + V(L - \gamma),$$
$$0 = V\delta.$$

La seconde formule exprime, comme elle le faisait pour les poutres droites, que α_0 est la réaction sur l'appui d'origine de l'aire totale V (voir n° 178).

Il en résulte, grâce à la première formule, que α_1 pris en signe contraire, c'est-à-dire $-\alpha_1$, est la réaction sur l'appui d'extrémité D de l'aire totale V.

Nota. — Le théorème aurait un caractère d'énoncé plus général s'il ne demandait pas que α_1, déviation angulaire d'extrémité, fût prise en signe contraire. On y arivera en adoptant les conventions suivantes analogues à celles que nous avons admises déjà pour les poutres continues.

Soit (fig. 418) en OAD la primitive et en OA′D l'élastique ; soient OT et OT′ leurs tangentes, à l'origine ; DF′ et DF leurs tangentes à l'extrémité D.

La déviation initiale α_0 sera l'angle TOT′ dont il faut faire tourner la tangente de la primitive pour qu'elle devienne la tangente de l'élastique ; quant à la déviation finale α_1 ce sera l'angle F′DF dont il faut faire tourner la tangente de l'élastique pour qu'elle redevienne la tangente de la primitive, et non pas l'angle FDF′ dont il faut faire tourner la tangente à la primitive pour l'amener tangente à l'élastique. Avec cette dernière convention, α_1 doit être pris en signe contraire de celui admis dans les formules précédentes.

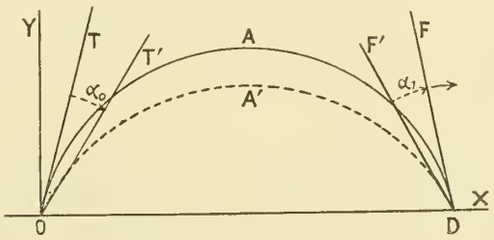


Fig. 418

(*b*) **Ecart ou déplacement du sommier.** — Quant à la troisième formule elle exprime que le déplacement horizontal a du sommier D est nul. Mais considérons un instant la pièce comme *poutre courbe*, sans poussée, c'est-à-dire avec rotule glissante en D ; autrement dit laissons le sommier D prendre l'*écart* ou déplacement horizontal, λ, qu'il voudra ; nous aurons

$$V\delta = \lambda \quad \text{et non plus} \quad V\delta = 0.$$

Cette formule est importante surtout parce qu'elle nous permet de résoudre le problème suivant :

Problème. — Un arc, pour des raisons quelconques, a ses sommiers qui se sont écartés (écart positif, signe +) ou rapprochés (écart négatif, signe —) de la longueur λ, mais sans quitter la ligne d'appui ; comment faire pour ramener ces sommiers dans leurs positions primitives ?

Il faudra développer des moments fléchissants auxiliaires qui soient combinés de telle sorte que la *courbe à cheval* qui en sera la conséquence, ait son aire V_1 et l'ordonnée δ_1 de son centre de gravité satisfaisant à l'équation

$$\lambda = V_1\delta_1,$$

parce qu'alors ces moments auxiliaires détruiront l'écart pris par les sommiers.

On pourrait arriver par les moyens suivants à créer ces moments auxiliaires :

1° En modifiant les charges ; mais ce serait modifier aussi les conditions imposées à l'arc ; cela n'est pas possible ;

2° Par des encastrements qui développeraient des moments d'encastrement convenables. Cette solution serait difficile à réaliser pratiquement ;

3° En exerçant une poussée convenable ; ce dernier procédé est le seul pratique ; c'est pourquoi nous apprendrons à déterminer l'*écart*, ou déplacement horizontal, λ, qu'une poussée déterminée produit sur le sommier d'extrémité d'une pièce courbe, afin d'en déduire quelle serait la poussée capable de détruire tel ou tel *écart* pris par le même sommier. Cette question sera particulièrement utile pour corriger ou pour apprécier les effets de la température ; ainsi que nous le verrons plus loin.

416. Stabilité d'un arc.

(*a*) **Formules de stabilité.** — Les formules ci-dessus s'écrivent, en faisant la convention précédente pour le signe de la déviation finale α_1,

(A″) $$\alpha_0 + \alpha_1 + V = 0.$$

(B″) $$\alpha_0 L + V(L - \gamma) = 0.$$

Et, en ne tenant pas compte de la dilatation calorifique,

(C″) $$V\delta = 0.$$

Ou bien, en tenant compte de la dilatation calorifique

(C″₁) $$\tau L + V\delta = 0, \quad \text{avec} \quad \tau = 0{,}00035.$$

(*b*) **Leur signification.** — Ces formules ont la signification suivante :

1° « Les déviations angulaires, α_0 et α_1 de la fibre neu- « tre au-dessus des sommiers sont les réactions, sur ces « sommiers, de l'aire de la *courbe à cheval des moments* « *dilatés eïfiés* (Courbe V) considérée comme chargeant « une poutre droite de même portée L que l'arc.»

Cet énoncé est une conséquence des équations (A″) et (B″).

2° « La *courbe à cheval des moments dilatés-eïfiés* (Courbe « V) doit avoir son centre de gravité sur la ligne d'appui.

Ce second énoncé est une conséquence de l'équation (C″), dans laquelle il n'est pas tenu compte de la dilatation calorifique ; car cette équation signifie, si V n'est pas nul, que $\delta = 0$.

Si l'on tient compte de la dilatation calorifique, alors c'est l'équation C″₁ qui convient ; elle peut s'écrire

$$V\left(\delta + \frac{\tau L}{V}\right) = 0, \qquad \text{qui entraîne} \qquad \delta = -\frac{\tau L}{V},$$

et comme l'on a : $V = -(\alpha_0 + \alpha_1)$ il en résulte

$$\delta = \frac{\tau L}{\alpha_0 + \alpha_1}, \qquad \text{ce qui signifie}$$

3° « Dans le cas où l'on tient compte de la dilatation « calorifique, la *courbe à cheval* doit avoir son centre de « gravité situé à une distance de la ligne d'appui égale à la « dilatation τL que prendrait cette ligne d'appui divisée par « la somme des déviations initiale et finale de l'élastique. »

En tous cas, les formules A″, B″ et C″ ont la signification suivante.

(*c*) **Théorème général de la stabilité des arcs.** — « Si « l'on applique : 1° aux sommiers, des forces fictives, « parallèles entre elles et égales aux déviations angulaires « α_0 et α_1 de la fibre neutre sur les sommiers ; 2° au centre « de gravité de la courbe à cheval des moments déformés- « eïfiés, une force fictive égale à l'aire V de cette courbe.

« Ces trois forces fictives sont en équilibre quelle que « soit la direction qui leur sera donnée ; autrement dit : « le point d'application de l'une d'elles sera le centre « des deux autres. »

En effet : L'équation A″ signifie que la somme des projections de ces forces fictives sur un axe quelconque est nulle.

L'équation B″ signifie que la somme de leurs moments par rapport à la verticale d'extrémité est nulle.

L'équation C″ signifie que la somme de leurs moments par rapport à la ligne d'appui, lorsqu'on les rend parallèles à cette ligne d'appui, sans changer leurs points d'application, est nulle. Le théorème est donc démontré.

417. L'Elastique d'une pièce courbe. — Les formules générales de la défiguration sont, en ne tenant pas compte des effets de la température,

(A) $$\alpha = \alpha_0 + V_0^B,$$

(B) $$b = \alpha_0 x + V_0^B(x - \gamma'),$$

(C) $$a = -\alpha_0 y + V_0^B(y - \delta').$$

Elles permettront de calculer arithmétiquement les déplacements a et b pour chaque point de la fibre neutre et, par conséquent, de trouver, point par point, l'élastique. Nous allons montrer que l'on peut aussi faire cette recherche graphiquement.

(*a*) **Funiculaire des hauteurs ou déplacements verticaux.** — Si l'on compare les formules (A) et (B) à celles du n° 177-*d* établies pour les poutres droites on reconnaît qu'elles sont identiques et par conséquent nous pouvons énoncer ce théorème :

Poutre droite correspondante à l'arc et théorème des déplacements verticaux. — « Si l'on imagine une poutre droite « ayant, pour fibre neutre la corde de l'arc, qui aurait les « mêmes sections répondant aux mêmes asbcisses et qui « subirait en chacune de ces sections les moments-défor- « més (M : cos ε) : 1° L'élastique de cette poutre aurait « pour pente, en chaque point, la déviation angulaire du « point correspondant de l'élastique de l'arc.

« 2° Les ordonnées de l'élastique de la poutre seraient

« égales aux déplacements verticaux des points correspon-
« dants de l'arc. » (1)

L'épure se fera comme suit (fig. 419-I et II).

(1) Cette poutre se nomme la *Poutre droite correspondante* à l'arc. Au lieu de dire qu'elle possède en chaque point le même moment d'inertie I que le point de l'arc situé au-dessus d'elle, et qu'elle est soumise aux moments fléchissants déformés (M : cos ε), on pourrait encore dire qu'elle subit les mêmes moments fléchissants M, mais que ses moments d'inertie I' sont égaux à ceux de l'arc dilatés dans le rapport cos ε : 1 ; on aura donc pour cette *poutre droite correspondante* I' = I × cos ε ; le produit M : I cos ε sera le même dans les deux cas.

Préliminaires. — Soit OABCD la fibre neutre primitive.

Admettons : 1° que nous avons calculé, puis construit, la courbe des moments déformés-éïfiés dite *courbe V* ; 2° que nous avons divisé cette courbe V en tranches verticales et, adoptant une base de réduction comme nous l'avons expliqué souvent, que nous avons remplacé les poids fictifs de chaque tranche par des forces d'équivalence f_1, f_2, f_3,.... appliquées aux centres de gravité A, B, C,... des tranches, ces points A, B, C,... étant situés sur la fibre neutre.

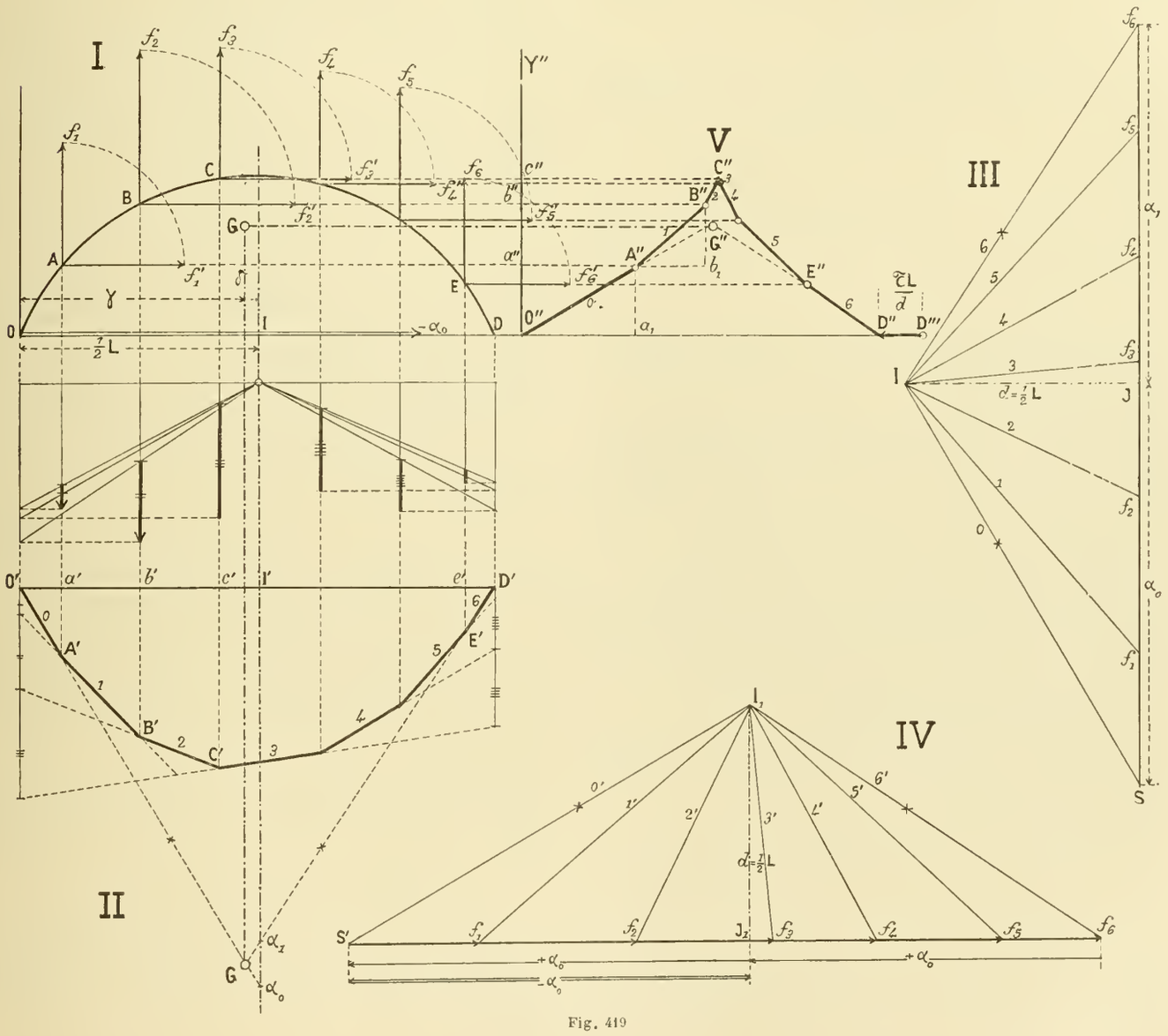


Fig. 419

Pour ne pas compliquer la figure nous n'avons pas laissé de traces des constructions qui précèdent ; acceptons en f_1, f_2, f_3,. . les forces fictives qu'elles eussent données.

Ces forces f_1, f_2,... sont dirigées positivement parce que nous supposons que les moments sont positifs ; mais si sur certaines parties de la pièce ils eussent été négatifs, ce qui arrivera toujours pour les arcs, il eût fallu diriger négativement les forces fictives correspondantes. Cela posé :

Epure. — Nous construisons (fig. II) un funiculaire sur ces forces verticales. Nous l'avons établi en O'A'B'C'.. C. D, par la méthode Collignon, à cause de ses avantages. Rappelons les points suivants de cette méthode :

1° La distance polaire est $d = 1/2L$.

2° Le côté initial $O'\alpha_0$ prolongé jusqu'au point α_0 où il recoupe la verticale milieu, donne en $I'\alpha_0$ la réaction du point O, c'est-à-dire (à l'échelle du funiculaire) la *déviation initiale* α_0 de l'élastique.

3° Le côté final, prolongé de même, jusqu'à la verticale milieu, donne en $I'\alpha_1$ la réaction au point D ; c'est-à-dire la déviation finale α_1 de l'élastique ;

4° Si l'on construisait (fig. III), avec les forces $f_1, f_2, f_3, \ldots$, un dynamique ordinaire ayant pour distance polaire $d = 1/2$ L tous ses rayons polaires 1, 2, 3, ..., 6 seraient parallèles aux côtés du funiculaire Collignon.

Cela posé :

Les déplacements verticaux sont donnés par les ordonnées $a'A'$, $b'B'$, $c'C'$, ... du funiculaire (fig. II) et les déviations angulaires sont données par les pentes des côtés de ce funiculaire.

(*b*) **Funiculaire des largeurs,** dit : *Funiculaire orthogonal.* — On obtiendra les déplacements horizontaux de la manière suivante (fig. 419-V).

1° On imagine que l'on ait fait pivoter les forces f_1, f_2, f_3, (fig. I) autour de leurs points d'application, jusqu'à ce qu'elles soient devenues en $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots, f'_6$, parallèles à la ligne d'appui, c'est-à-dire perpendiculaires à leur direction première et dans le **sens positif** des rotations ;

2° Partant du pied O'' d'une verticale quelconque O''Y'' (fig. V) on construit en O''A''B''C''...D''... un funiculaire qui s'appuie sur les horizontales précédentes et dont les côtés 0, 1, 2, 3, ..., 6 sont perpendiculaires aux côtés numérotés de même du funiculaire des déplacements verticaux.

Ce sera le **funiculaire orthogonal.**

Je dis que les abscisses $a''A'' - b''B'' - c''C'' \ldots$ et O''D'' du **funiculaire orthogonal** sont les déplacements horizontaux répondant à la formule

$$a = -\alpha_0 y + V_0^B(y - \delta').$$

Cette formule exprimant que le déplacement horizontal a d'un point quelconque de la fibre neutre de la pièce est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, de toutes les forces horizontales f_1', f_2', etc., appliquées aux points qui le précèdent en y comprenant la réaction ou déviation angulaire initiale $(-\alpha_0)$ changée de signe.

En effet : reproduisons (fig. IV), mais seulement pour la démonstration, le dynamique de la fig. III après l'avoir, lui aussi, fait tourner de un angle droit dans *le sens positif.* Les rayons polaires 0', 1', 2', ... sont maintenant parallèles aux côtés O''A'' — A''B'' ... etc., du funiculaire (fig. V) que nous venons de tracer. Sur ce dynamique (fig. IV) la réaction d'appui α_0 est donnée par la ligne J_1S', et en la prenant en sens contraire on aura $-\alpha_0$, que nous imaginerons appliquée horizontalement au sommier O de la fig. I.

Pour le premier point AA'', le triangle rectangle $O''A''a_1$ de la fig. V est semblable au triangle rectangle $I_1S'J_1$ du dynamique orthogonal fig. IV, et l'on en déduit

$$\frac{O''a_1}{S'J_1} = \frac{A''a_1}{I_1J_1},$$

mais $S'J_1 = -\alpha_0$, $A''a_1 = y$, et $I_1J_1 = d$ (distance polaire), donc :

$$O''a_1 \times d = -\alpha_0 y,$$

$O''a_1$ est donc bien, au coefficient d'échelle près d, le moment de la force $-\alpha_0$ par rapport au point A. Pour le second point B, B'' on aura : $b''B'' = O''a_1 + A''b_1$. Or le triangle rectangle $B''A''b_1$ de la fig. V est semblable au triangle rectangle $I_1f_1J_1$ du dynamique (fig. IV) et on en déduit de même :

$$A''b_1 \times d = f_1' \times B''b_1.$$

Ce qui exprime que $A''b_1$ est, au coefficient d'échelle près d, le moment de la force f_1' par rapport au point B. Donc l'abscisse $b''B''$ est, au coefficient d'échelle près d, égale à la somme des moments par rapport au point B des forces $-\alpha_0$ et f_1' qui le précèdent.

On raisonnera de même pour les autres points, le tracé est donc justifié. C. Q. F. D.

Nous nommerons indifféremment cette figure V le funiculaire des largeurs ou, d'après son mode de tracé, le *funiculaire orthogonal.*

(*c*) *Remarques.* (I). — Le côté initial O''A'' et le côté final E''D'' de ce funiculaire se rencontrent en un point G'' qui fait connaître l'ordonnée δ du centre G des forces $f_1, f_2, f_3, \ldots$, c'est-à-dire, en réalité, de la *courbe à cheval.*

De même, la rencontre G' du côté initial et du côté final du premier funiculaire (fig. II) fait connaître l'abscisse γ de ce même centre de gravité. Le centre de gravité G est donc déterminé.

(II). *L'écart,* ou déplacement horizontal du sommier D, d'extrémité, est mesuré (fig. V) par l'abscisse O''D'' ; ce qui prouve, en passant, que nous sommes très loin, avec les conditions de moments fléchissants dont les forces $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sont les traductions, d'avoir à faire à un arc.

Si la température produisait son effet, le sommier D s'écarterait davantage encore et en prenant (fig. V) D''D''' égal à $\tau L : d$ (d étant la distance polaire), nous aurions à l'échelle de l'épure, en O''D''' le mouvement total, pris par le sommier D.

Nous avons, en réalité, une poutre courbe, parce que les moments sont tous positifs ; ce n'étaient que des *moments de charge*, ou d'encastrement. Pour en faire un arc, il faudrait soit par une poussée simple, soit par une poussée combinée avec des encastrements, développer des moments

négatifs, qui en donnant au sommier D des *écarts* en sens inverse du précédent, arriveraient à détruire celui qui vient d'être trouvé.

C'est pourquoi, maintenant que nous savons trouver les effets produits sur une poutre courbe par des moments de charge (positifs), il faut apprendre à déterminer les effets produits sur elle par des moments de poussée négatifs et par des moments d'encastrement négatifs ou *positifs*.

417 *bis* **Digression relative aux échelles.** — Les épures qui vont suivre ne seront pas de simples croquis théoriques mais de réels tracés de statique graphique. La question des échelles à adopter est toujours très embarrassante pour les débutants. Cette note a pour but de l'éclaircir ; les échelles de la fig. 420 ont été établies d'après les principes que nous allons exposer.

(*a*) **Unités.** — On prendra :

Le *mètre* (m) pour unité de longueur ;

Le *kilogramme* (k) pour unité de poids ;

Le *kilogrammomètre* (km) (produit de une force égale à 1 kilo par un bras de levier égal à 1 mètre) pour unité de moment. La tonne-mètre (tm) serait le produit de 1000 kilos par 1 mètre.

Le module d'élasticité E et la résistance de sécurité R seront rapportés au mètre carré ; dans le fer et l'acier on aura

Fer. $E = 20000 \times 10^6$ et $R = 6 \times 10^6$.

Acier. $E = 22000 \times 10^6$ et $R = 10 \times 10^6$.

(*b*) **Distances polaires et bases de réduction.** — d sera le *nombre* de mètres qui mesurera la première distance polaire, celle qui sert pour la construction des funiculaires de moments fléchissants naturels, M. d' sera le *nombre* de mètres qui mesurera la base de réduction à l'aide de laquelle on transforme les aires de moments (naturels, dilatés ou eïfiés) en forces fictives d'équivalence. On sait que pour faire cette transformation, si f est la force fictive d'équivalence et ω la surface à transformer en cette force on doit avoir

$$f \times d' = \omega \qquad \text{d'où} \qquad f = \omega : d'.$$

d'' sera le *nombre* de mètres qui mesurera la seconde distance polaire, celle qui sert pour construire, sur les forces d'équivalence des aires de moments eïfiés, les funiculaires qui doivent faire connaître les pentes et les coordonnées de l'élastique-épure.

(*c*) **Longueurs d'échelle.** — 1° *Longueurs et forces.* — Appelons N_m la longueur *vraie* en mètre ou fraction de mètre qui doit représenter 1 mètre dans l'espace ;

N_f la longueur *vraie* qui doit représenter 1 kilogramme ;

N_{km} la longueur vraie qui doit représenter 1 kilogrammomètre naturel *km* ou dilaté *km* : cos ε ;

N_{kei} la longueur vraie qui doit représenter 1 kilogrammomètre eïfié *km* : EI ;

N_{ki} la longueur vraie qui, pour les poutres homogènes, (E constant) représenterait 1 kilogrammomètre divisé par 1, ou *km* : I ;

N_e la longueur vraie qui doit représenter 1 mètre de défiguration élastique linéaire.

Par exemple si l'on dit : L'épure sera exécutée à l'échelle de $0^m,02$ pour mètre, on aura $N_m = 0^m,02^{cm}$. Si l'on dit : Les forces seront dessinées à l'échelle de 5 millimètres par tonne, c'est-à-dire à 5 millimètres pour 1000^k, on aura

$$N_f = 0^m,005 : 1000 = 0^m,000005.$$

2° *Moments naturels.* — On peut choisir tout à fait arbitrairement les deux longueurs d'échelle qui précèdent N_m et N_f, mais la longueur d'échelle N_{km} qui convient aux kilogrammètres, *non eïfiés*, est une conséquence des deux longueurs d'échelle qui précèdent et de la première distance polaire d.

En effet, on se souvient que la règle, pour apprécier des moments naturels, est la suivante : « On mesure les ordonnées du funiculaire à l'échelle des « forces, ce qui donne un certain nombre de kilos ; et ce nombre multiplié « par le nombre de mètres de la distance polaire, donne le nombre de kilo- « grammomètres. »

Par conséquent si l'on mesure 1^k à l'échelle des forces, c'est-à-dire si le compas est ouvert à la longueur vraie N_f, il faudra lire d kilogrammomètres, c'est-à-dire la même chose que si l'ouverture de compas avait compris d fois la longueur N_{km} qui représente 1 km ; on aura donc :

$$N_f = N_{km} \times d \qquad \text{d'où} \qquad N_{km} = N_f : d.$$

Exemple : l'échelle des forces est de $0^m,0000025$ pour 1^k et la distance polaire d est de 8 mètres ; on aura

$$N_{km} = 0,0000025 : 8 = 0^m,00000031.$$

Si pour avoir moins de décimales on compte par tonne et par tonne-mètres ou dira :

L'échelle des forces étant de $0^m,0025$ par tonne l'échelle des moments naturels est de 0,00031 par tonne-mètre, soit $0^m,031$ millimètres pour 100 tonne-mètres.

3° *Moments eïfiés.* M : EI. — Les moments eïfiés sont des expressions du degré zéro ; ce sont des nombres, en général très petits pour les métaux ; voyons à peu près les limites entre lesquelles ces nombres se présenteront dans les applications.

Si le constructeur est habile la pièce s'approchera d'être d'égale résistance ; cela veut dire que, pour toutes les sections, la formule d'équarrissage sera observée ou à très peu près ; ce qui donnera

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{M}{EI} = \frac{R}{Ev}.$$

Pour le fer on a : $R = 6^k \times 10^6$ et $E = 20000 \times 10^6$; d'où

$$\frac{M}{EI} = \frac{0,0003}{v}.$$

Admettons des valeurs de v comprises entre $0^m,20$ et $1^m,00$, ce qui répondrait à des hauteurs de sections comprises entre $0^m,40$ et $2^m,00$; nous aurons les nombres du tableau suivant :

$v =$	$0^m,20$	$0^m,40$	$0^m,60$	$0^m,80$	$1^m,00$
$\frac{M}{EI} =$	0,001 500	0,000 750	0,000 500	0,000 375	0,000 300
$\frac{M}{I} =$	30 000 000	15 000 000	10 000 000	7 500 000	6 000 000

Les M : I pourront s'employer au lieu de M : EI lorsque les pièces seront homogènes (E constant). Les nombres M : I sont alors très grands. Si on fait l'épure en se servant d'eux il est entendu que les défigurations élastiques devront avoir leurs longueurs divisées par le module d'élastique E.

Nous conseillons d'adopter les valeurs suivantes :

$N_{kei} = 20^m$ p^r (M : EI) = 1,00 ; soit $0^m,02$ p^r (M : EI) = 0,001.

Dans le cas où le facteur E n'entrerait pas, cela donnerait en multipliant par $E = 20.000 \times 10^6$,

20^m p^r M : I $= 20.000 \times 10^6$, soit 0^m01 p^r M : I = 10 millions.

4° *Défigurations élastiques.* — On sait que les aires des moments eïfiés doivent être transformées en forces fictives d'équivalence, à l'aide d'une base de réduction mesurée en mètres par le nombre d' ; ce qui veut dire que, une fois la transformation faite, la force fictive qui aurait N_{kei} de longueur et qui se lirait 1, en moments eïfiés, représentera en surface de moments eïfiés $1 \times d'$ et par conséquent devrait se lire d', en forces fictives d'équivalence.

Ensuite lorsque, sur les forces fictives, on construit le funiculaire de distance polaire d'', on sait que les moments fictifs ainsi trouvés devront se mesurer à l'échelle des forces qui y sont entrées (ici les forces fictives), et le nombre ainsi trouvé être multiplié par le nombre d'' pour représenter les défigurations élastiques. Par conséquent la longueur N_{kei} qui se lisait 1 en moments eïfiés, représentera d' en forces fictives de surface de ces moments et $d' \times d''$, en longueurs de défigurations élastiques. Si donc 1^m de défiguration est traduit par une longueur vraie égale à N_e, une défiguration qui sur l'épure apparaîtrait avec la longueur vraie N_{kei}, et qui se serait lue 1, en moments eïfiés, devra se lire, en *mètres*, $d' \times d''$, c'est-à-dire comprendre $d'd''$ fois N_e ; on aura donc

$$N_{kei} = d' \times d'' \times N_e, \qquad \text{d'où} \qquad N_e = \frac{N_{kei}}{d' \times d''}.$$

Exemple : (fig. 420), page 376. — Un moment eïfié égal à 1 étant représenté par 20^m ($N_{kei} = 20$), la base de réduction d' des aires de moments eïfiés étant égale à 8^m et la dernière distance polaire d'' étant égale à 8^m, par quelle longueur, N_e, devra-t-on représenter 1 mètre de défiguration élastique ?

$$N_e = \frac{N_{kei}}{d' \times d''} = \frac{20}{64} = 0,312.$$

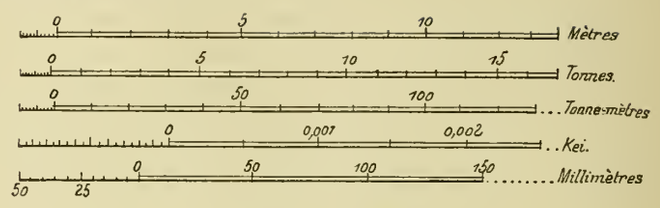
Les défigurations seront représentées à l'échelle de $0^m,312$ pour 1 mètre, c'est-à-dire plus petites que nature.

Nota. Si l'on voulait que l'épure les donnât en vraie grandeur, on devrait prendre $N_{kei} = d' \times d''$, c'est-à-dire ici 64^m.

Résumons tout cela sous forme de règle.

Fig. 420 — *Echelles des fig. 421 et suivantes.*

*Longueurs	$N_m = 0^m,005$ pr 1^m.
*Forces	$N_f = 0^m,000004$ pr 1 k. (0,04 pr 10 Tonnes.)
Moments naturels ($d = 8^m$)	$N_{km} = N_f : d = 0^m,000005$ pr 1 km (0,005 pr 10 Tonnes-m.)
*Moments déformés-eïfiés. .	$N_{kei} = 20^m$ ($0^m,02$ pr M. : EI cos ε = 0,001.)
Elastiques { $d' = 8^m$; $d'' = 8^m$ } . .	$N_e = \frac{N_{kei}}{(d' \times d'')} = 0^m,312$ pour 1^m.



Nota. — Le signe * indique que ces échelles sont arbitraires. Les autres sont une conséquence des premières et des distances d, d' d''.

(d) **Règles.** — 1° N_m étant la longueur d'échelle qui, sur l'épure, représente 1^m dans l'espace,

N_f étant la longueur d'échelle qui représente une force réelle de 1 kilogramme ;

d étant le *nombre* de mètres de la distance polaire qui sert à passer, par un funiculaire, des forces réelles aux moments naturels.

Règle n° 1. — La longueur d'échelle qui représentera 1 kilogrammo-mètre sera

$$N_{km} = \frac{N_f}{d}.$$

2° N_{kei} étant la longueur, *arbitraire d'ailleurs,* qui représente une unité de moment eïfié (M : EI = 1, on conseille de prendre $N_{kei} = 20^m$) ;

d' étant le *nombre* de mètres de la base de réduction qui sert à transformer en forces fictives les aires de moments eïfiés ;

d'' étant le *nombre* de mètres de la distance polaire qui sert à passer, par un funiculaire, des forces fictives précédentes aux défigurations élastiques.

Règle n° 2. — La longueur d'échelle qui représentera un mètre de défiguration élastique sera

$$N_e = \frac{N_{kei}}{d' \times d''}.$$

Dans le cas où la pièce est homogène (E constant), la règle n° 2 se modifie comme suit :

N_{ki} étant la longueur, *arbitraire d'ailleurs*, qui représente une valeur M : I = 1 (on conseille de prendre $N_{ki} = 0,000\,000\,001$, c'est-à-dire $0^m,01$ pour M : I = 10.000.000 soit 10 millions), on aura :

Règle n° 2 bis. $$N_e = \frac{N_{ki}}{E \times d' \times d''}.$$

§ 3. — Constantes d'un arc

418. Position de la question.— Stabili-centres.— Nous prendrons un arc à l'état de *poutre courbe* et nous l'étudierons en le soumettant aux conditions suivantes :

1° On appliquera un moment unitaire μ_0 sur son sommier d'origine, l'autre restant libre,ce qui donnera le *triangle unitaire de gauche.*

2° On appliquera le même moment unitaire $\mu_1 = \mu_0$ sur le sommier d'extrémité, l'autre restant libre, ce qui donnera le *triangle unitaire de droite.*

3° (Conséquence des deux premières études). On appliquera le même moment $\mu = \mu_1 = \mu_0$ à la fois sur les deux sommiers, ce qui le fera régner uniformément sur toute la pièce et donnera le *rectangle unitaire.*

4° On appliquera une poussée unitaire θ.

Dans chacun de ces cas, et particulièrement dans le 1er, le 2e et le 4e, on déterminera les déformations élastiques prises par la poutre courbe et, particulièrement :

1° La déviation angulaire initiale α_0;

2° La déviation angulaire finale α_1;

3° L'*écart* λ des sommiers;

4° Le centre de gravité (par son abscisse γ et par son ordonnée δ) des courbes à cheval (moments déformés-eïfiés) qui en résultent.

Nous adopterons les notations suivantes, dans lesquelles la petite lettre, prise en *exposant,* indiquera la cause de la défiguration :

(a) Pour le moment μ_0, appliqué à l'origine,

$\alpha^{\mu_0}_0$ sera la déviation angulaire à l'origine.

$\alpha^{\mu_0}_1$ sera la déviation angulaire à l'extrémité.

λ^{μ_0} sera l'écart pris par les sommiers.

γ^{μ_0} et δ^{μ_0} seront les coordonnées du centre de gravité I de sa courbe à cheval (triangle Ω). Ce centre de gravité I sera le *Stabili-centre d'encastrement à l'origine.*

Telles seront les cinq *constantes d'encastrement d'origine.*

(b) Pour le moment μ_1 appliqué à l'extrémité :

$\alpha^{\mu_1}_0$ sera la déviation angulaire à l'origine.

$\alpha^{\mu_1}_1$ sera la déviation angulaire à l'extrémité.

λ^{μ_1} sera l'écart pris par les sommiers.

γ^{μ_1}, δ^{μ_1}, seront les coordonnées du centre de gravité J de sa courbe à cheval (triangle Φ). Ce centre de gravité J sera le *Stabili-centre d'encastrement à l'extrémité.*

Telles seront les cinq *constantes d'encastrement d'extrémités.*

(c) Pour le moment uniforme μ, les quantités analogues seront

α^{μ}_0, α^{μ}_1, λ^{μ} avec γ^{μ} et δ^{μ}.

(d) Pour la poussée unitaire θ, elles seront

α^{θ}_0, α^{θ}_1, λ^{θ} avec γ^{θ} et δ^{θ}.

Elles constitueront les cinq *constantes de poussée.*

Le centre de gravité de la courbe à cheval correspondante sera le *stabili-centre de poussée,* et nous le désignerons par la lettre T.

Si au lieu d'appliquer les moments unitaires μ_0, μ_1 et la poussée unitaire θ, nous appliquons des moments M_0, M_1 quelconques et une poussée quelconque t, alors tous les effets ci-dessus trouvés devront être multipliés par les

rapports

$$\frac{M_0}{\mu_0}, \qquad \frac{M_1}{\mu_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{0}.$$

Quant aux coordonnées des centres de gravité des courbes à cheval correspondantes, nous avons vu qu'elles ne changeront pas.

Les *constantes* d'un arc seront les quantités trouvées ci-dessus; au nombre de cinq pour chacun des cas étudiés, soit en tout quinze constantes (car le 3° cas, avec μ constant, n'est pas directement utile).

Maintenant, si des charges P quelconques, fixes ou mobiles, agissent sur la pièce, elles développeront des moments fléchissants qui, la pièce étant encore poutre-courbe, lui feraient prendre une élastique déterminée laquelle posséderait une déviation angulaire initiale α_0^p, une déviation angulaire finale α_1^p et un écart de sommier λ^p; à ces charges répondra aussi une courbe à cheval possédant un centre de gravité; nous le nommerons le **stabili-centre de charge**; nous le désignerons par la lettre P, et ses coordonnées seront γ^p et δ^p; elles varieront avec les charges.

Nous calculerons, ou nous construirons graphiquement, toutes ces quantités et nous verrons comment, en appliquant le théorème général de la stabilité des arcs (v. n° 416-*c*), on pourra, en combinant les *constantes de l'arc*, avec les *données de charges*, trouver, dans tous les cas possibles, la poussée, les moments d'encastrement (s'il y a encastrement), et les déviations angulaires aux sommiers (si ces sommiers sont à rotule). Tout d'abord apprenons à calculer ou à construire les constantes précédentes et, pour être mieux compris, prenons un exemple numérique.

419. **Rectangle unitaire déformé-eïfié** (fig. 421. — Echelles, fig. 420). — Nous serons très bref dans nos explications, parce que nous avons donné aux n°s 413 et 416 *bis* tous les détails voulus sur la déformation, sur l'eïfication et sur les échelles.

(*a*) **Eïfication et déformation.** — La fibre neutre de 16^m^ de portée est donnée en OTD (fig. I). Elle est reproduite, renversée (fig. VI); sa corde a été divisée en un nombre pair de parties égales (ce nombre doit être un multiple de quatre, v. n° 182), et on ne considérera, par la suite, que les ordonnées de rang impair, 1, 3, 5, 7, qui sont les bases moyennes des trapèzes suivant lesquels la surface serait divisée par les ordonnées de rang pair.

Un moment unitaire, $\mu = 100$ tonnemètres, lui est appliqué sur toute sa longueur; sa représentative est l'horizontale $\mu\mu$ dessinée à l'échelle des moments naturels. Les moments d'inertie aux diverses sections sont supposés connus; nous admettons que l'on a :

$$I_1 = 0{,}002789104, \qquad I_3 = 0{,}005231401,$$
$$I_5 = 0{,}004231027, \qquad I_7 = 0{,}003172018.$$

Le module d'élasticité est $E = 20000 \times 10^6$; on fait pour chaque section le quotient μ : EI, ou 100000km : EI, ce qui donne pour les moments eïfiés les nombres :

(Section 1), 0,0017925 — (Section 3), 0,000957;
(Section 5), 0,001182; — (Section 7), 0,001577,

que nous avons portés, à l'échelle des moments eïfiés, en 1-1′, 3-3′, 5-5′, 7-7′ (fig. VI).

Cette courbe O′D′ des moments eïfiés μ : EI, dessinée en pointillé, a été ensuite déformée (comme il est dit au n° 413), en prenant pour déformatrice la fibre neutre; ce qui nous a donné en O″, 1″, 3″, 5″, 7″, D″ la courbe des moments μ déformés-eïfiés (1).

(*b*) **Funiculaire des hauteurs.** — La corde a été divisée en 8 parties égales. (Dans la pratique, il faudrait diviser en un bien plus grand nombre de parties, quoique toujours en un multiple de 4.)

Nous avons pris pour base de réduction d', la demi-portée ($d' = 8^m$), et dans ce cas nous avons vu (v. n° 182) que les forces fictives d'équivalence doivent être prises égales à la moitié des ordonnées de rang impair. (Si on avait divisé en 12, elles eussent été le 1/3; en 16, elles eussent été le 1/4, etc.) Et ces forces fictives f_1, f_3, f_5, f_7 sont supposées appliquées (fig. I) aux points 1, 3, 5, 7 de la fibre neutre.

La courbe à cheval pourrait se tracer (on la voit en pointillé fig. I), mais il n'y a aucune utilité à le faire, car ce sont les forces fictives f_1, f_3, f_7 qui nous importent et non pas la courbe à cheval elle-même.

Sur ces forces fictives nous construisons, fig. II, un funiculaire Collignon (distance polaire $d'' = 1/2\,L = 8^m$). L'épure préparatoire de ce funiculaire se voit fig. V. Elle est faite comme il a été dit au n° 196, comme suit :

Epure préparatoire. — Le pôle est pris à l'extrémité D, et non pas au milieu, ce qui donne pour distance polaire L, au lieu de 1/2L. Mais, par contre, nous avons porté en F_1, F_3, F_5, F_7 le double des forces fictives. Dans ces conditions, les segments marqués a_0, b_0, c_0, d_0 sont ceux à porter (fig. II) sur la verticale d'origine, tandis que les segments complémentaires, $d_1 - c_1$, $b_1 - a_1$, sont ceux à porter sur la verticale d'extrémité. Et il y a intérêt à les porter tous, afin d'avoir, avec une grande précision, le côté initial $O\alpha'$ et le côté final $D\alpha'$, dont la rencontre en α' donne la verticale, c'est-à-dire l'abscisse γ^μ, du centre de gravité H de la courbe à cheval μ.

(1) Remarquons de suite, pour ne plus y revenir, que les arcs en métal seront presque toujours formés de fers composites et que les semelles varieront brusquement en certains points; par conséquent, le moment d'inertie I ne variera pas progressivement, mais brusquement, lui aussi; la courbe finale $\mu''_0\mu''_1$, des moments déformés-eïfiés, au lieu d'être une courbe continue, comme sur notre croquis, se composera donc d'une série de dentelures analogues à celles de la fig. 156 (v. n° 194-*b*), et il en sera de même pour les courbes à cheval correspondantes.

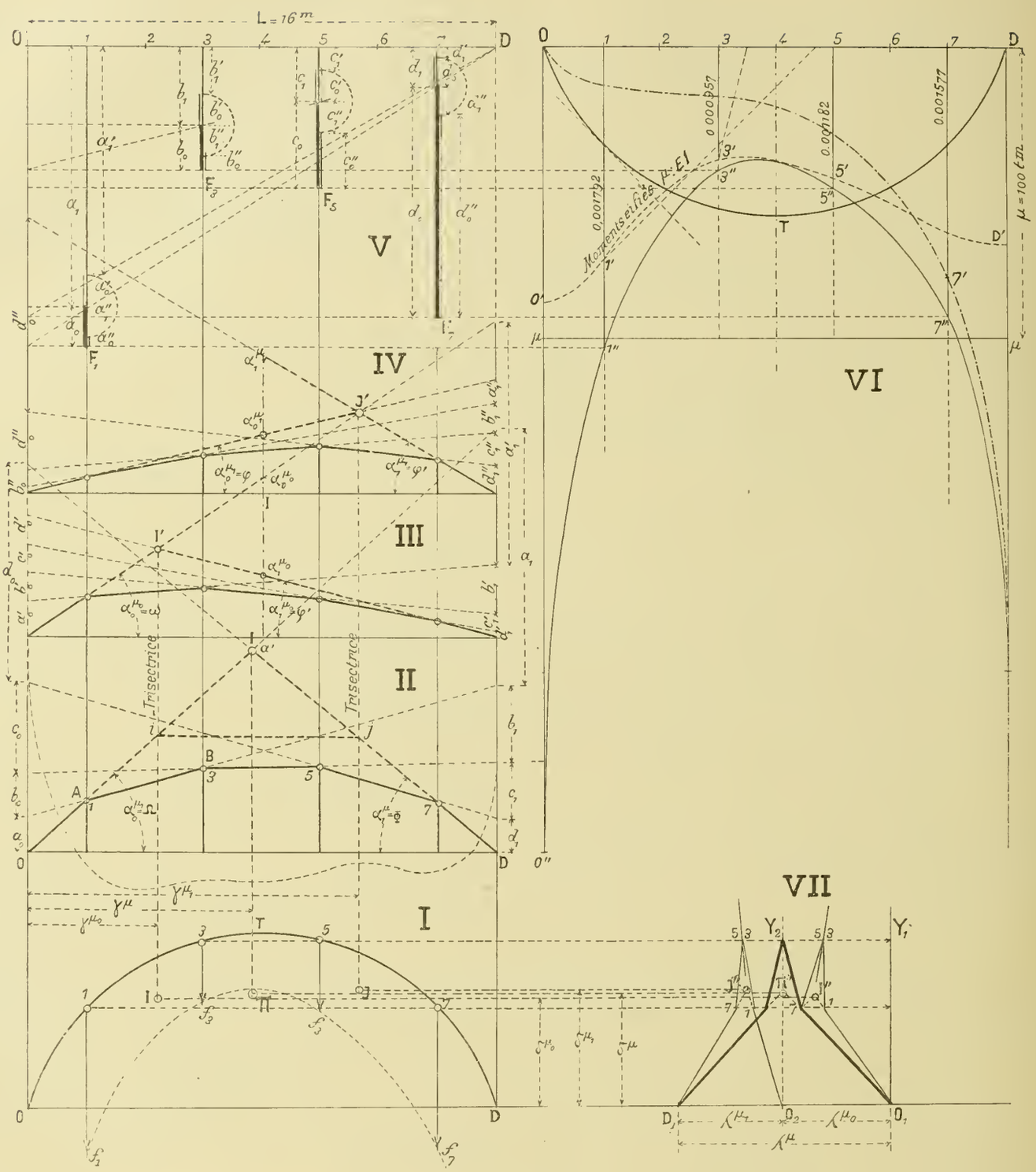


Fig. 421

Voir les échelles fig. 420, page 376.

Erratum : Sur la fig. VII, un trait fin doit réunir le point O_2 et le point I″ ; la ligne 5-7, située à droite, doit être supprimée et remplacée par une autre ligne qui réunirait le point 5 au point où la droite O_2I″ rencontrerait l'horizontale 7-7 (v. la figure rectifiée à l'Erratum général.)

Nous obtenons ainsi en 0 1 3 5 7 D (fig. II) le funiculaire de l'élastique hauteur du moment unitaire μ.

(*c*) **Funiculaire des largeurs.**—Son funiculaire *orthogonal* (fig. VII) $O_1Y_2D_1$ (marqué en trait fort), donne l'*élastique-largeur*. Son côté initial et son côté final se coupent en un point π'' qui donne la hauteur, c'est-à-dire l'ordonnée δ^{μ} du centre de gravité, ainsi que l'écart des sommiers $O_1D_1 = \lambda^{\mu}$.

420. Triangles unitaires et constantes d'encastrement (même figure 421):

(*a*) **Epure préparatoire.** — Les ordonnées du triangle unitaire de gauche s'obtiennent en divisant les ordonnées du rectangle dans le rapport $(L - x) : L$, x étant l'abscisse répondant à chaque ordonnée ; tandis que celles du triangle unitaire de droite s'obtiendront en les divisant dans le rapport $x : L$.

Or, la construction auxiliaire de la fig. V donne précisément en $a_1, b_1, c_1, \ldots$ ces ordonnées du triangle unitaire de gauche, tandis que a_0, b_0, c_0, donnent celles du triangle de droite.

Dès lors nous faisons sur ces longueurs $a_0b_0c_0, a_1b_1c_1, \ldots$ les mêmes constructions auxiliaires que la figure V indique clairement, et en résumé nous obtenons comme suit les deux funiculaires des triangles unitaires μ_0 et μ_1.

(*b*) **Triangle unitaire de gauche** (fig. III). — Les segments $a'_0, b'_0, c'_0, d'_0, \ldots$ de la fig. V sont portés sur la verticale d'origine, et les segments complémentaires sont portés sur la verticale d'extrémité dans l'ordre $d'_1c'_1b'_1a'_1$ et l'on en déduit le funiculaire-largeur ; son côté initial et son côté final se rencontrent en I' sur la *trisectrice* de gauche ; ce qui fait connaître l'abscisse γ^{μ_0} du centre de gravité I du triangle unitaire de gauche Ω.

Le funiculaire orthogonal (dessiné en trait fin fig. VII) donne en $O_1 1.3.5.7 - O_2$ les défigurations en largeur, et en particulier en $O_1 - O_2$ l'écart des sommiers λ^{μ_0} ; son côté initial $O_1 1$ et son côté final $O_2 7$ se rencontrent en I'', ce qui donne l'ordonnée δ^{μ_0} du centre de gravité I du triangle unitaire de gauche Ω.

(*c*) **Triangle unitaire de droite.** — On voit (fig. V) en $a''_0b''_0 \ldots d''_0$ les segments à porter sur la verticale d'origine et en $d''_1c''_1 \ldots a''_1$ les segments d'extrémité, ce qui permet (fig. IV) d'obtenir le *funiculaire-hauteur* du triangle unitaire μ_1. On en déduit, comme pour l'autre, en $O_2 1.3.5.7.D_1$ (dessiné en trait fin, fig. VII) le funiculaire orthogonal des largeurs, ainsi que l'écart de sommier λ^{μ_1}, et les coordonnées γ^{μ_1} et δ^{μ_1} du centre de gravité J, du triangle unitaire de droite Φ.

(*d*) **Vérifications.** — Nous vérifierons (fig. II) que le funiculaire OijD (dit le *funiculaire* $\Omega\Phi$) est un trapèze, et (fig. VII) que l'on a $\lambda^{\mu_0} + \lambda^{\mu_1} = \lambda^{\mu}$.

421. Poussée unitaire et constantes de poussée (fig. 422).

(*a*) **Construction des funiculaires.** — Appliquons une poussée unitaire θ dirigée suivant la ligne d'appui, de D vers O, et développant des moments négatifs. La représentative de ces moments sera ou bien la fibre neutre renversée OABD (fig. 422-III) pour une valeur convenable de θ (voir plus loin, nota) ou bien une dilatation de cette fibre neutre obtenue en multipliant ses ordonnées par θ.

Nota. Pour éviter un dessin à faire on prend, en général, la fibre neutre pour représentative des moments de la poussée unitaire θ. Mais alors quelle doit être la valeur de θ ?

Pour le savoir on mesure une ordonnée, $I\omega$ par exemple (f. V) à l'échelle des moments naturels (on trouve ici $I\omega = M = 58$ tonnemètres). On la mesure une seconde fois à l'échelle des longueurs (on trouve ici $I\omega = h = 5^{m},80$); on doit donc avoir $\theta \times h = M$, d'où $\theta = M : h = 58^{m} : 5,8 = 10$ tonnes.

Ceci étant admis, nous déformons la fibre neutre dans le rapport $1 : \cos \varepsilon$, et ensuite nous eïfions cette courbe, ce qui donne en OA'B'D la courbe des *moments déformés-eïfiés de poussée unitaire* (1).

Cette courbe OA'B'D est décomposée en trapèzes (au nombre de 4) et les forces fictives qui les équivalent seraient égales à la moitié des ordonnées de rang impair. Nous les appliquons (fig. I) en 1, 3, 5 et 7 sur la fibre neutre ; la courbe à cheval qui en serait la conséquence est inutile à figurer.

Sur les forces fictives f_1, f_3, f_5, f_7 nous construisons (fig. III) un funiculaire des hauteurs, en opérant exactement comme nous l'avons fait pour le rectangle et pour les triangles unitaires au n° précédent, c'est-à-dire (fig. IV) en doublant en $F_1, F_2, F_3, \ldots$ les forces fictives $f_1, f_2, f_3, \ldots$, mais en prenant pour pôle l'extrémité D de la corde.

Nous traçons ensuite (fig. VI) le funiculaire des largeurs, orthogonal du précédent, et finalement nous obtenons les cinq constantes de poussée, savoir :

(*b*) **Constantes de poussée.** — La pente initiale, α_0^{θ} et la pente finale α_1^{θ} (fig. III),

Les coordonnées γ^{θ} et δ^{θ} du centre de gravité de la courbe à cheval de poussée (fig. I) et

L'Ecart des sommiers λ^{θ} (fig. VI),

Le funiculaire des hauteurs (fig. III) jouit de propriétés particulières qui vont résulter du § 4, qui suit :

(1) Cette double opération se fait ainsi :

1° On reproduit en $\mu_0\mu_1$ l'horizontale qui est la représentative des moments naturels μ de la fig. 421, ainsi que sa courbe déformée-eïfiée, $\mu'_0\mu'_1$.

2° On fait en sorte que les moments déformés-eïfiés $b'B'$ et $b''b'$ soient entre eux dans le même rapport que les moments naturels bB et $b''b$, ce qui se réalise par des lignes proportionnelles, comme l'indique la figure V pour le point B.

§ 4. — Lignes d'influence (1)

422. Poussée due à une charge mobile dans un arc à deux rotules.

(*a*) **Théorème.** — « Si un poids mobile unique parcourt « un arc, *à deux rotules*, la poussée que ce poids, arrivé en « un point donné, détermine dans l'arc est représentée, à « un facteur constant près, par l'ordonnée du point corres- « pondant de l'*élastique-hauteur* de poussée, c'est-à-dire « par l'ordonnée de la représentative des déplacements en

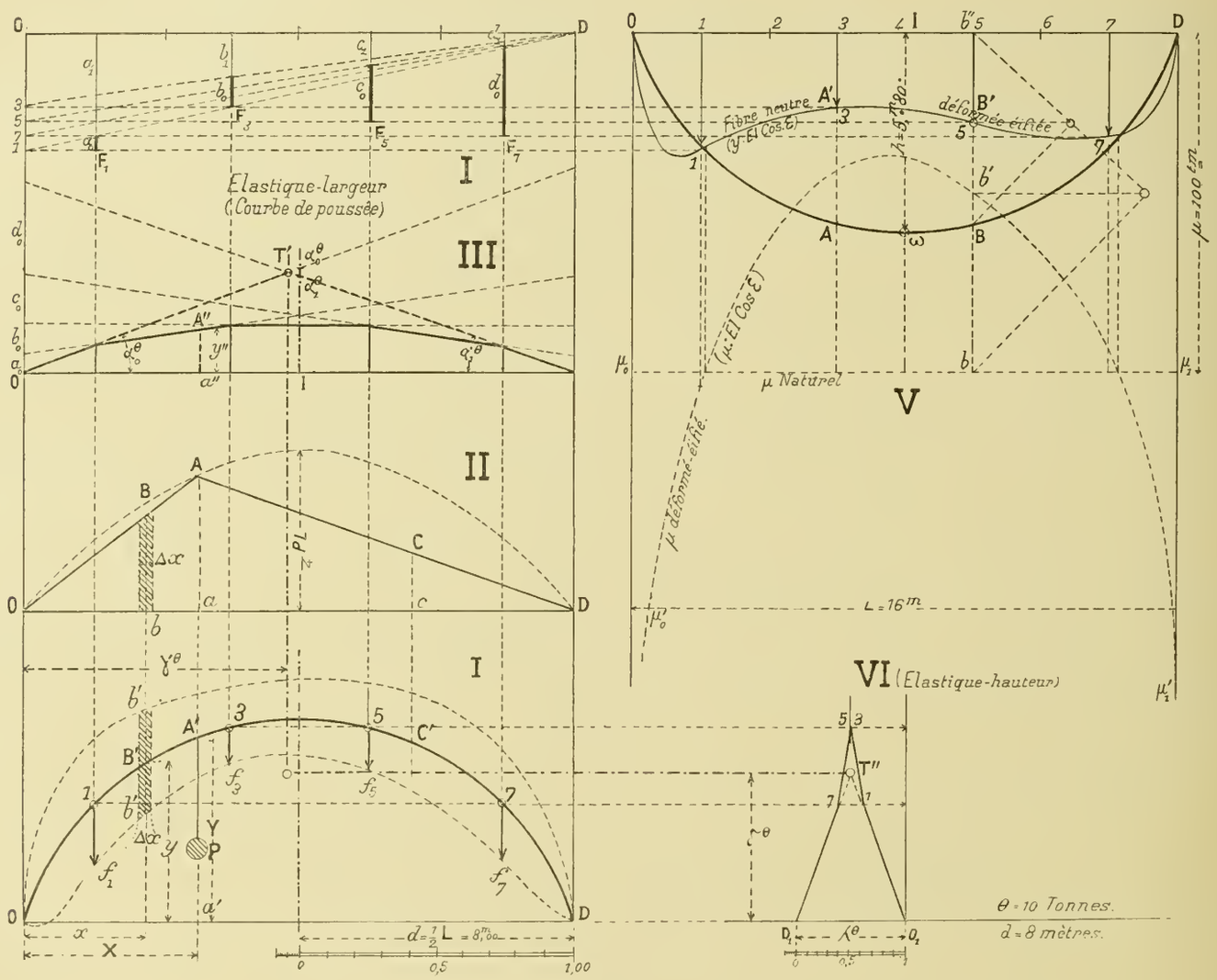


Fig. 422

« hauteur qu'une poussée unitaire Θ produirait sur la fibre « neutre de la pièce considérée comme poutre courbe avec « sommiers à rotules (2). »

Rappelons tout d'abord que l'écart des sommiers produit par des moments fléchissants, *quelconques*, est égal au moment, pris par rapport à la corde de l'arc, de la courbe à cheval de ces moments, c'est-à-dire à la somme des moments partiels des poids fictifs qui représentent les aires partielles de cette courbe à cheval ; ces poids fictifs étant supposés appliqués sur la fibre neutre.

Un poids P (même fig. 422-I) qui roulerait sur la pièce, supposée *poutre courbe*, développera, arrivé en un certain point A′ (d'abscisse X) un ensemble de moments dont la

(1) En réalité le § 4 a rapport aux charges mobiles. Néanmoins nous le plaçons ici parce qu'il découle directement de l'étude de la poussée. Le lecteur pourrait à la rigueur en ajourner la lecture.

(2) Ce théorème est un corollaire du Théorème général dit de *réciprocité* démontré par M. **Bertrand de Fontvioland.**

représentative est le triangle OAD (fig. II) et l'on sait que, si P se déplace, le point A décrit une parabole dont l'ordonnée maxima a pour valeur 1/4PL. Les deux réactions de P sur les appuis sont :

$$\text{à l'origine } \frac{P(L-X)}{L}, \qquad \text{à l'extrémité } \frac{PX}{L}.$$

Cherchons l'*écart* de sommiers λ^p produit par ces moments. Pour cela prenons (fig. II) en bB, à la distance x de l'origine, un élément de largeur infiniment petite Δx ; le moment Bb en ce point est positif et il est dû à la seule réaction d'origine, on aura donc

$$\overline{b\mathrm{B}} = \frac{P(L-X)x}{L}; \qquad \text{sa surface est} \qquad \frac{P(L-X)x}{L} \times \Delta x.$$

Nous la déformons et nous l'eïfions, ce qui donne $(\overline{b\mathrm{B}} : \mathrm{EI}\cos\varepsilon)\Delta x$; après quoi cette quantité est considérée comme une force fictive élémentaire, appliquée au point B′ de la fibre neutre, c'est-à-dire à la distance y de la corde, y étant l'ordonnée de ce point B′. Pour avoir l'élément $\Delta\lambda^p$ de l'écart de sommier que cette force fictive produit pour son compte, il faut la rendre parallèle à la corde et en prendre le moment par rapport à cette corde, c'est-à-dire la multiplier par y ; on aura donc

$$(1) \qquad \Delta\lambda^p = \frac{Py}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \times \frac{(L-X)x}{L} \times \Delta x.$$

Prenons maintenant la courbe à cheval de poussée (fig. I) et considérons, au droit du même point B, un élément de même largeur Δx.

θ étant la poussée unitaire à laquelle répond cette courbe à cheval, la hauteur $\overline{b'b'}$ de cet élément a pour valeur, par construction et après eïfication et déformation,

$$\overline{b'b'} = \frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \qquad \text{et sa surface est} \qquad \frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \times \Delta x.$$

Considérée comme force fictive appliquée en B′ il donne deux réactions qui sont, à l'origine et à l'extrémité,

$$\frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \times \frac{L-x}{L}\Delta x, \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \times \frac{x}{L} \times \Delta x.$$

Et nous savons que le moment fléchissant élémentaire que cette charge fictive, considérée comme appliquée sur la poutre, développe au point A′ représente l'élément Δy de défiguration élastique en hauteur que cela procure au point A′ de la fibre neutre.

Ce moment fléchissant élémentaire sera la différence entre le moment positif de la réaction et le moment négatif de l'aire $b'b'$. On aura donc

$$\Delta Y = \frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon}\left[\frac{L-x}{L}X - (X-x)\right] \times \Delta x,$$

ou en simplifiant

$$(2) \qquad \Delta Y = \frac{\theta y}{\mathrm{EI}\cos\varepsilon} \times \frac{(L-X)x}{L} \times \Delta x.$$

En comparant les expressions (2) et (1) on voit que :

$$\Delta\lambda^p = \Delta Y \times \frac{P}{\theta}.$$

Totalisons tous ces effets à partir de l'origine ; c'est-à-dire totalisons tous les ΔY, ce qui nous donnera l'ordonnée $y'' = A''a''$ de la figure III et tous les $\Delta\lambda^p$, ce qui donnera l'écart total de sommier, λ^p, produit par la charge P ; le facteur P : θ étant commun, nous aurons par conséquent :

$$(3) \qquad \lambda^p = \overline{A''a''} \times \frac{P}{\theta}.$$

Ce qui veut dire que l'écart λ^p produit par une charge unique P est proportionnel à l'ordonnée correspondante de l'élastique-hauteur de poussée.

Transformons maintenant la poutre courbe en un arc et, par une poussée convenable t^p, détruisons l'écart λ^p ; nous avons vu que puisque λ^θ (fig. VI) est l'écart produit par la poussée unitaire θ, la poussée t^p qui détruira l'écart λ^p sera

$$t^p = \frac{\lambda^p \times \theta}{\lambda^\theta},$$

d'où l'on tire en utilisant la relation (3)

$$(4) \qquad t^p = \frac{\overline{A''a''}}{\lambda^\theta}P = \frac{A''a''}{\overline{O_1D_1}} \times P = \frac{y''}{\lambda^\theta} \times P.$$

Le théorème est donc démontré et, de plus, nous voyons que l'épure de statique graphique nous donne, pour chaque position de la charge P, le coefficient de proportionnalité qui est $y'' : \lambda^\theta$.

Remarques. I. — En graduant, comme une échelle de proportion, l'écart de poussée unitaire $O_1D_1 = \lambda^\theta$, on pourra lire de suite le coefficient. Ainsi, sur notre épure, en mesurant $A''a''$ à l'échelle de O_1D_1, on trouve $A''a'' = 0{,}40$; par conséquent le poids P parvenu en A′ donnera lieu à une poussée qui sera égale à 0,40P.

(*b*) **Courbe de poussée.** — La propriété qui vient d'être démontrée a fait donner au funiculaire des déplacements élastiques verticaux produits par une poussée (fig. III), le nom de *courbe de poussée*. Elle rend de grands services dans l'étude des effets produits par une charge mobile ou par un convoi ; convenons, pour ce qui va suivre, de représenter ses ordonnées par la letre y''.

423. **Lignes d'influence dans une poutre droite.**

(*a*) **Définitions.** — Une charge unitaire P se déplace sur une pièce ; elle y produit des effets qui, pour une section déterminée B, dont les coordonnées sont x_1, y_1 se traduisent : 1° par un moment fléchissant M ; 2° par un effort transversal T (effort tranchant) ; et 3° par un effort longitudinal N (effort normal).

Chacune de ces quantités M, T et N, spéciales à la section B, varie avec la position de la charge, c'est-à-dire avec l'abscisse x, de cette charge ; elles sont donc des

fonctions de cette abscisse qui est variable si la charge est mobile.

« On nomme *lignes d'influence* d'une section les représen-« tatives des moments fléchissants, des efforts tranchants et « des efforts normaux qu'une charge unitaire, en circulant « sur la pièce, développe dans cette section ; les abscisses « de ces représentatives étant les mêmes que celles de la « charge mobile. » Il y a pour chaque section, telle que B, une ligne d'influence pour le moment fléchissant, une ligne d'influence pour l'effort tranchant, une ligne d'influence pour l'effort normal.

Il pourrait y avoir des lignes d'influence pour tout autre effet à étudier dans une section, par exemple pour la tension unitaire maxima développée dans cette section.

La construction graphique des lignes d'influence d'une section revient à calculer les valeurs de M, N ou T qui, pour cette section, répondent à chacune des positions de la charge P et à porter ces valeurs sur l'ordonnée correspondante de cette charge.

Au point de vue de la géométrie analytique cela revient à trouver l'équation qui lie M, T ou N à l'abscisse x de la charge mobile P et à construire cette équation.

(*b*) **Lignes d'influence des moments fléchissants.** — Soit A (fig. 423-I) la position de la charge mobile P ; x son abscisse et soit B la section d'abcisse x_1 dont on cherche la ligne d'influence de moments. Si la charge est à gauche de B, elle donne une réaction d'origine, *positive*, qui a pour valeur $P \times [(L - x) : L]$, et un moment en B qui a pour valeur

$$M = P\frac{L-x}{L} \times x_1 - Px_1x \quad \text{ou, en simplifiant :}$$

$$(1) \quad M = P\frac{L-x_1}{L}x \begin{cases} \text{pour } x = 0, & M = 0, \\ \text{pour } x = x_1, & M = Px_1 - \dfrac{Px_1^2}{L}. \end{cases}$$

Cette équation du premier degré en M et en x représente une droite telle que OB′ à pente positive, passant par l'origine.

Lorsque la charge passe à droite de B, alors la réaction d'origine intervient seule pour le moment et l'on a

$$(2) \quad M' = -P\frac{x_1}{L}x + Px_1 \begin{cases} \text{pour } x = L, & M' = 0, \\ \text{pour } x = x_1, & M' = Px_1 - \dfrac{Px_1^2}{L}; \end{cases}$$

cette équation représente la droite à pente négative B′D.

On sait (v. n° 273) que le moment fléchissant sous charge est donné pour chaque position de la charge par l'ordonnée de la parabole OA′B′D qui aurait pour hauteur $1/4Pl$. Il en résulte que la ligne d'influence de moments pour la section B est précisément la ligne brisée formée par l'ensemble des deux cordes OB′ et B′D de cette parabole.

Nota. — Les deux points α et β où les cordes OB′ et A′D recoupent les verticales AA′ et BB′ sont à la même hauteur.

(*c*) **Lignes d'influence des efforts tranchants.** — Si la charge est en A (fig. 423-II), à gauche de la section, l'effort tranchant est la somme algébrique de la réaction à l'origine (positive) et de la charge P (négative) ; on aura donc

$$T = \frac{P(L-x)}{L} - P = -\frac{P}{L}x, \begin{cases} \text{pour } x = 0, & T = 0, \\ \text{pour } x = L, & T = -P. \end{cases}$$

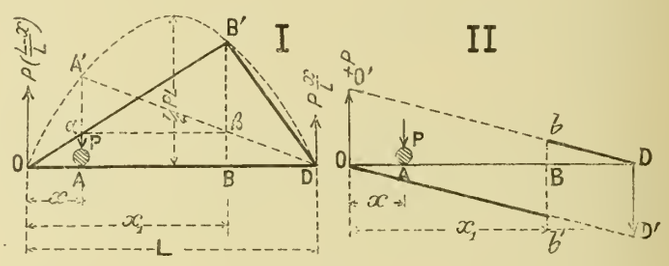


Fig. 423

Cette équation représente la droite à pente négative OD′, allant de l'origine au point D′ situé à la hauteur — P sur l'ordonnée d'extrémité ; il ne faut en prendre que le segment Ob'. Si la charge est à droite de la section l'effort tranchant provient de la seule réaction à l'origine et l'on a

$$T = \frac{P(L-x)}{L}, \begin{cases} \text{pour } x = 0, & T = +P, \\ \text{pour } x = L, & T = 0, \end{cases}$$

qui représente le segment bD de la droite O′D, parallèle à la précédente.

On reconnaît dans les droites OD′ et O′D (v. n° 280) les représentatives des efforts tranchants produits directement sous la charge.

En résumé, la ligne d'influence des efforts tranchants développés dans la section B est la ligne brisée discontinue Ob' — bD ; quand la charge atteint la section B, l'effort tranchant saute brusquement de la valeur négative Bb' à la valeur positive Bb et la différence algébrique entre les deux est précisément égale à la charge P.

Quant aux efforts normaux ils sont toujours nuls dans une poutre droite, lorsque la charge est perpendiculaire à sa fibre neutre ; il n'y a donc pas lieu d'étudier leurs lignes d'influence.

Voyons maintenant quelles sont les lignes d'influence dans un arc à deux rotules.

424. Lignes d'influence des moments fléchissants dans un arc à deux rotules.

(*a*) **Expression des moments fléchissants.** — Soit (fig. 424) A la position de la charge et C la section pour laquelle on veut construire la ligne d'influence des mo-

ments. Nous supposons que la charge unitaire circulante est $P = 20$ tonnes.

Construisons la parabole OA'C'D, dont l'ordonnée maxima mesurée à l'échelle des moments est $1/4Pl$ (mesurée à l'échelle des forces elle est égale à $1/2P$, parce que la distance polaire $d = 1/2L$). Si C' est le point de cette parabole situé au-dessus de la section C, on a vu que les lignes d'influence de moments pour la section C, sont, en supposant que la pièce soit une poutre, les deux cordes OC' et C'D, et que le moment M_p, développé en C par la charge P quand elle est en A, est mesuré à l'échelle des forces par l'ordonnée ac' de la corde de la parabole.

Mais la pièce étant un arc la charge P, quand elle est en A, donne lieu à une poussée t qui a pour expression (v. n° 422)

$$t = P \times \frac{y''}{\lambda^0}.$$

Dans laquelle y'' est l'ordonnée en A de la courbe de poussée, c'est-à-dire de l'élastique des hauteurs, résultant d'une poussée unitaire θ, et λ^0 est l'écart de sommier produit par la même poussée.

Nous avons reproduit (fig. II) cette courbe de poussée ainsi que cet écart de sommiers et nous avons gradué ce dernier comme si c'était une échelle. Nous avons également gradué la distance polaire d (fig. I).

Cette poussée produit sur le point C un moment qui a pour expression $t \times y$, y étant l'ordonnée de la section C.

Nota. — Pour que cette expression puisse être représentée graphiquement, et soit mesurable à l'échelle des forces comme tous les autres moments de l'épure, il faut la diviser par la distance polaire d, afin qu'en la multipliant par d on ait réellement le moment $t \times x$. Le moment de poussée sera donc figuré à l'échelle des forces par la longueur

$$(1) \qquad P \times \frac{y}{d} \times \frac{y''}{\lambda^0} = P \times n \times n',$$

en posant $n = y : d$ et $n' = y'' : \lambda^0$. Telle est l'expression qu'il faut construire.

Ces deux rapports numériques n et n' s'apprécient facilement sur l'épure de la manière suivante : On prend la longueur y au compas ; on porte l'ouverture de compas sur l'échelle d et on en déduit immédiatement n ; on fait de même pour n' en mesurant y'' à l'échelle de λ^0.

Exemple : Dans le cas actuel on a :

$n = 0{,}71 \mid n' = 0{,}25 \mid nn' = 0{,}17 \mid P = 20^t \mid P \times n \times n' = 3^t{,}400.$

C'est cette longueur $M : d = 3^t{,}400$ que l'on porte sur l'ordonnée A, de c' en c_1 ce qui donne en c_1 le point définitif de la ligne d'influence des moments pour la section C lorsque la charge est en A.

(*h*) **Tracé des lignes d'influence.** — Pratiquement nous conseillons d'opérer comme suit :

1° On prend un certain nombre de points sur l'arc et pour chacun d'eux on mesure les rapports $n = y : d$ et $n' = y'' : \lambda^0$.

2° On prépare un tableau ayant autant de colonnes verticales et autant de lignes horizontales que l'on a pris de

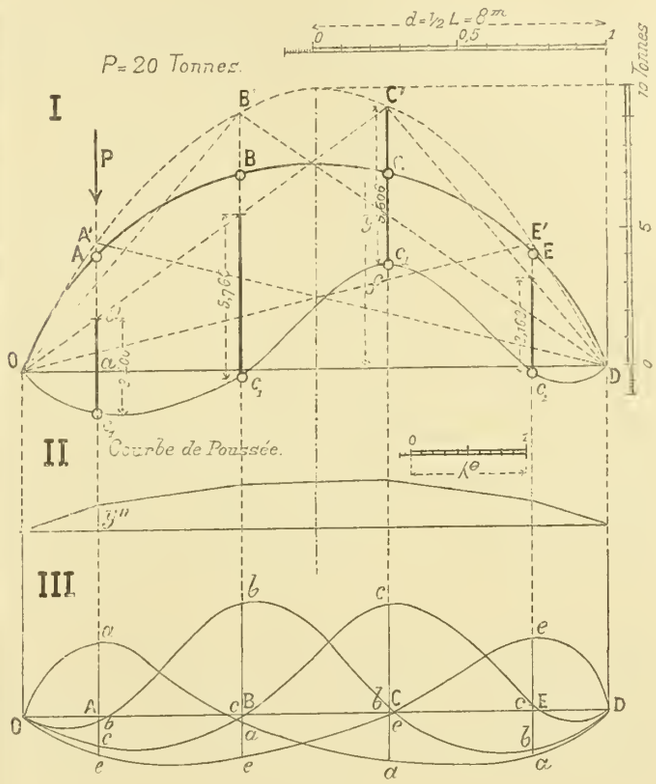


Fig. 424

points sur l'arc. Les colonnes A, B, C, E répondent aux sections dont on cherche la ligne d'influence. Les lignes A', B', C', E' répondent aux positions de la charge mobile P.

(P = 20 Tonnes)		Sections $n = y : d$				
		A	B	C	E	
		$n = 0{,}43$	$n = 0{,}72$	$n = 0{,}72$	$n = 0{,}43$	
Position de la charge ($n' = y'' : \lambda^0$) $n' = 0{,}25$	$nn' =$	0,1075	0,1700	0,1700	0,1075	A'
	$M : d =$	2,150	3,400	3,400	2,150	
$n' = 0{,}40$	$nn' =$	0,1720	0,2880	0,2880	0,1720	B'
	$M : d =$	3,440	5,760	5,766	3,440	
$n' = 0{,}39$	$nn' =$	0,1677	0,2808	0,2808	0,1677	C'
	$M : d =$	3,354	5,606	5,606	3,354	
$n' = 0{,}22$	$nn' =$	0,0946	0,1584	0,1584	0,0946	E'
	$M : d =$	1,952	3,168	3,168	1,952	

3° En tête des colonnes on inscrit le rapport $n = y : d$, et au niveau des lignes on inscrit le rapport $n' = y'' : \lambda^0$.

4° On fait le produit $n \times n'$, et on l'inscrit au croisement de la ligne et de la colonne correspondantes.

5° On fait le produit $P \times n \times n'$; et c'est ce dernier nombre qui donne M : d ; c'est lui que l'on porte, à l'échelle des forces, en déduction des moments de poutre droite.

Exemple : Pour avoir la ligne d'influence de la section C, on a pris les nombres de tonnes trouvés dans la colonne C, et on les a portés (en gros traits pleins) le premier (3^t,400) sur l'ordonnée A de c' en c_1, le second (5^t,766) sur l'ordonnée B de c' en c_1, etc..... Le lieu des points c_1c_1... est la ligne d'influence des moments pour la section C.

(*c*) **Remarques. I.** — On voit (fig. III) l'aspect des lignes d'influence des quatre sections A, B, C, E de l'arc. Si on les compare aux lignes brisées (fig. I) qui donneraient les lignes d'influence si la pièce était une poutre on voit, d'une part, que les moments de l'arc sont plus petits et, d'autre part, qu'ils passent par des valeurs négatives, tandis que ceux de la poutre sont tous positifs.

II. Si l'on veut connaître les moments dangereux pour une section, C, par exemple, il suffira de mener des tangentes horizontales à la courbe O*cc*...D ; les ordonnées des points de tangence donneront les valeurs des moments maxima dangereux, et aussi la position de la charge mobile qui y répond.

425. Lignes d'influence des efforts tranchants et des efforts normaux dans un arc à deux rotules.

(*a*) **Expression des efforts tranchants et des efforts normaux.** — Supposons, la pièce étant encore à l'état de poutre courbe, que nous connaissions pour une section B

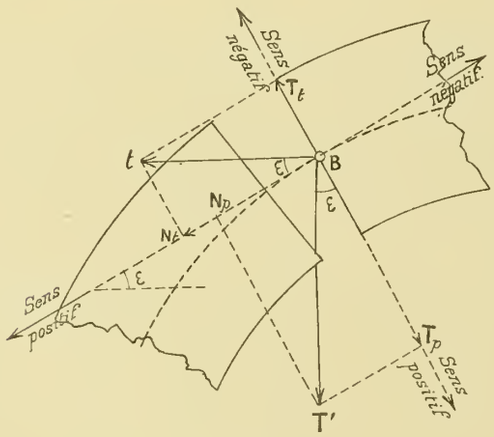


Fig. 425

(fig. 425) la résultante T′ qui proviendrait du transport, au point B, de toutes les forces situées à sa droite, c'est-à-dire du côté où s'exercera la poussée. Cette résultante T′ serait précisément l'effort tranchant de la poutre *droite*, qui aurait pour fibre neutre la corde de l'arc : et nous avons appris à le déterminer.

Supposons que T′ soit positif, c'est-à-dire, en imaginant que le tronçon de gauche soit conservé et que celui de droite soit enlevé, que T′ tende à faire descendre ce dernier par rapport au premier.

Cette résultante T′ décomposée donnera pour effort tranchant T_p, et pour effort normal N_p, et l'on aura :

$$T_p = + T' \cos \varepsilon \qquad \text{et} \qquad N_p = + T' \sin \varepsilon.$$

La poussée t, agissant de droite à gauche, donnera comme effort tranchant Tt, et comme effort normal Nt, et l'on aura :

$$T_t = - t \sin \varepsilon \qquad \text{et} \qquad N_t = + t \cos \varepsilon.$$

L'effort tranchant définitif T et l'effort normal définitif N ont donc pour expressions :

(1) $\quad T = T' \cos \varepsilon - t \sin \varepsilon \qquad$ (*effort tranchant.*)

(2) $\quad N = T' \sin \varepsilon + t \cos \varepsilon \qquad$ (*effort normal.*)

T′, effort tranchant de la poutre droite correspondante, est connu (V. n° 423-*c*). Quant à t, l'ordonnée y'' de la courbe de poussée le fait connaître et l'on a (V. n° 422)

$$t = P \times (y'' : \lambda^\theta).$$

(*b*) **Tracé des lignes d'influence.** — Le tracé des lignes d'influence d'efforts tranchants revient à construire, point par point, la valeur ci-dessus de T. Expliquons le tracé pour la section A (fig. 426).

Si la pièce était une poutre droite, la ligne d'influence serait la ligne brisée discontinue, composée de l'oblique négative OA'_1 ressautant brusquement en A pour donner l'oblique positive A_1D. (Sur l'épure ces obliques sont en trait mixte.) Les ordonnées de ces droites donnent les valeurs T′ de la formule (I).

Au lieu de la poutre droite considérons la poutre courbe, mais pas encore l'arc. Le fait d'être courbe introduit le coefficient cos ε, par lequel il faut multiplier les valeurs précédentes de T′ ; ε étant l'angle que fait avec l'horizontale la tangente de la fibre neutre, à la section A.

Pour obtenir T′ cos ε nous menons $a'\alpha$ perpendiculaire à la tangente en A et par le point A_1 une perpendiculaire sur cette tangente. On a évidemment $a'\alpha = a'A_1 \cos \varepsilon$; et on porte cette longueur $a'\alpha$ de a' en A_2, ce qui donne en $a'A_2$ la valeur de T′ cos ε pour le point A. On a réduit de même, de a' en A'_2 l'ordonnée négative et, dès lors, les lignes, d'influence d'effort tranchant pour la section A de la *poutre courbe*, seraient la ligne droite négative OA'_2, ressautant brusquement suivant la droite positive A_2D.

Pour ne pas compliquer l'épure ces lignes d'influence de la poutre courbe n'ont pas été tracées.

Transformons maintenant la poutre courbe en un arc et faisons intervenir la poussée t avec son terme de correction $- t \sin \varepsilon$. Or t a pour valeur : $t = P(y'' : \lambda^\theta)$.

y'' étant, au droit de la section A, l'ordonnée de la courbe de poussée produite par une poussée unitaire θ et λ^θ étant l'écart de sommier que produit cette même poussée.

Nous avons reproduit (fig. II) en $OA''B''D''$ cette courbe de poussée en l'empruntant à la fig. 422, mais en l'amplifiant de telle sorte que l'écart λ^0 soit représenté (fig. 426-III) par la même longueur que celle qui représente la charge (P = 20 tonnes). Dans ces conditions, les ordonnées AA'', BB'', ... donnent directement les valeurs de t, en les mesurant à l'échelle des forces.

Pour réaliser l'expression $-t \sin \varepsilon$ nous avons mené

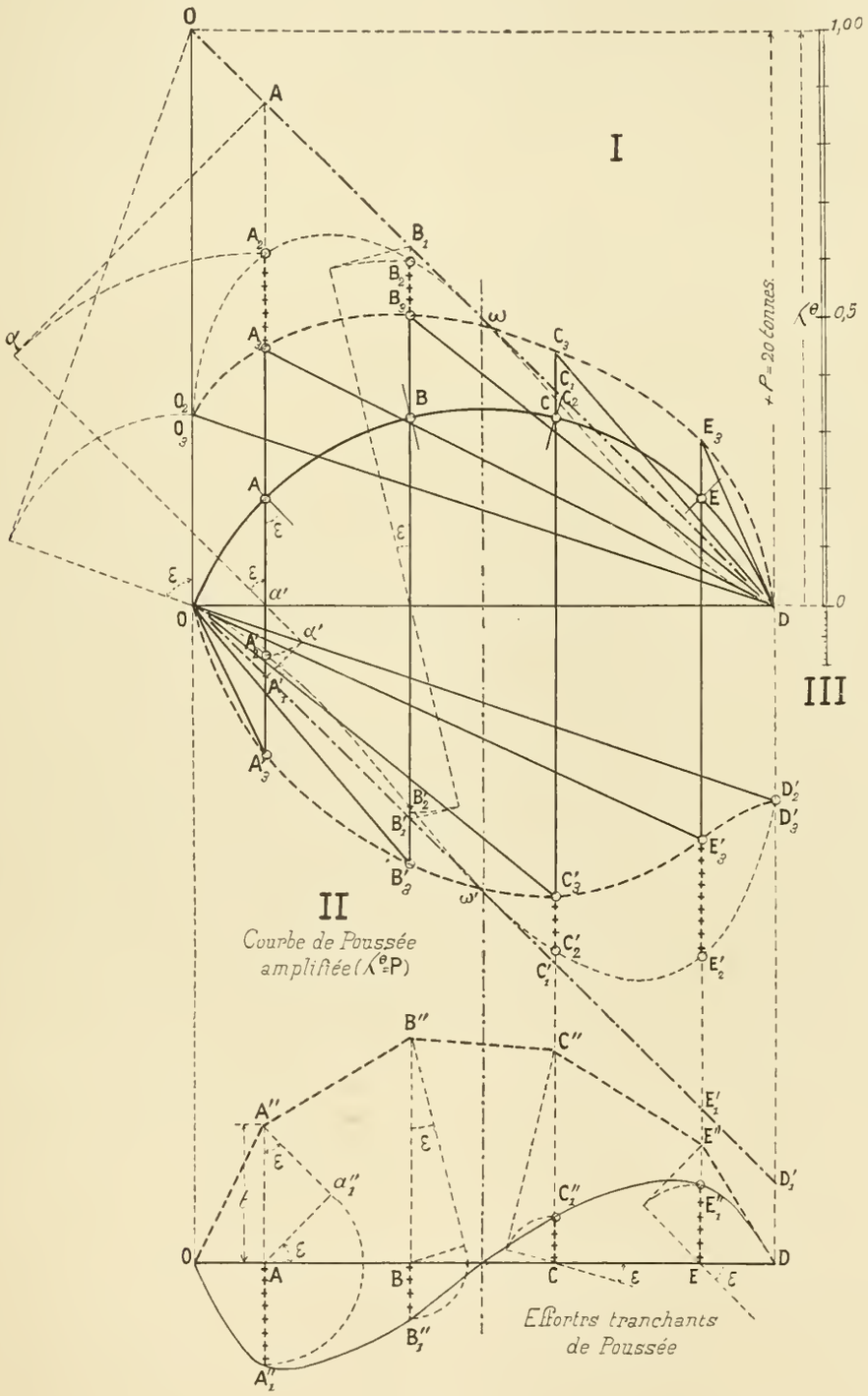


Fig. 426

(fig. II) par le pied A de l'ordonnée une *parallèle* Aa''_1 à la tangente à la fibre neutre; nous avons abaissé $A''a''_1$ perpendiculaire sur cette ligne et nous avons $Aa_1 = t \sin \varepsilon$, que nous portons négativement de A en A''_1, afin d'avoir

— $t \sin \varepsilon$. La même construction s'exécutera pour les autres sections en remarquant que, à droite de la verticale milieu, ε étant négatif, $\sin \varepsilon$ est aussi négatif ce qui rend l'expression positive.

Cela fait (fig. I) nous descendons les points A_2 et A'_2 en A_3 et A'_3 de toute la hauteur trouvée en AA''_0 sur la fig. II.

Finalement la ligne d'influence des efforts tranchants pour la section A est l'oblique négative OA'_3 ressautant brusquement sur l'oblique positive A_3D.

On a construit de même les autres lignes d'influence.

(*c*) **Lignes d'influence des efforts normaux.** — Leur tracé revient à construire les expressions

$$N = T' \sin \varepsilon + t \cos \varepsilon.$$

Or la figure 426 nous donne

(fig. I) $A_1\alpha = T' \sin \varepsilon$ et (fig. II) $\overline{A''a''_1} = t \cos \varepsilon$.

On les obtiendrait donc exactement de la même manière et elles se composeraient de lignes brisées ressautant également au droit des sections.

§ 5. — Calcul de l'équilibre général d'un arc

426. Données de causes extérieures.

(*a*) **Données de charge.** — Nous allons voir maintenant comment un arc va se comporter sous l'influence des actions extérieures (charges et dilatation calorifique), c'est-à-dire que nous allons apprendre à déterminer la poussée et les moments d'encastrement qui en résultent. Pour fixer les idées, prenons le même arc que ci-dessus. Supposons que l'on connaisse les charges et soit O*abce*D (fig. 427-IV) la représentative des moments naturels de charge, la même que si nous avions une poutre droite posée sur ses appuis (distance polaire $d = 1/2L$). Nous déformons et nous eïfions ces moments naturels comme il a été dit plus haut (v. n° 413 *bis*), en nous aidant de l'horizontale μ et de sa déformée-eïfiée *a'b'c'e'* que nous empruntons à la fig. 421, après l'avoir rendue positive, car les moments de charge sont toujours positifs. Nous obtenons ainsi en OA'B'C'E' la *déformée-eïfiée* des moments de charge.

Après avoir divisé la corde OD en 8 parties égales, nous prenons les ordonnées de rang impair 1, 3, 5. 7, et comme notre base de réduction est $d' = 1/2L$, les forces fictives d'équivalence des trapèzes seraient égales à la moitié de ces ordonnées. Pour bien faire comprendre leur rôle, nous les portons en f_1, f_3, f_5, f_7 sur la fibre neutre (fig. I), quoique cela ne soit pas nécessaire.

Sur ces forces fictives, nous construisons (fig. III et II) un funiculaire des hauteurs (fig. II) comme nous l'avons déjà indiqué; il répond à une distance polaire $d'' = 1/2L$. Le côté initial et le côté final de ce funiculaire nous font connaître en α_0^p et α_1^p les déviations angulaires, initiale et finale, de l'élastique de charge ; de plus, ils se rencontrent en un point P' qui fait connaître l'abscisse γ^p du *stabili-centre de charge* P.

Enfin (fig. V), nous traçons le funiculaire orthogonal ou *funiculaire des largeurs ;* lequel nous fait connaître l'ordonnée δ^p du *stabili-centre de charge* et en O''_1D_1 l'*écart de charge* λ^p.

Cette épure nous fait donc connaître les cinq données de charge

$$\alpha_0^p, \quad \alpha_1^p, \quad \gamma^p, \quad \delta^p \quad \text{et} \quad \lambda^p.$$

(*b*) **Données de dilatation calorifique.** — Soit τ l'allongement maximum que pourra prendre l'unité de longueur sous l'influence des variations extrêmes de température. Cela représentera, pour la corde de l'arc, un allongement $+\tau L$, si la température s'élève, ou un raccourcissement $-\tau L$ si elle s'abaisse et cela se traduira par une égale augmentation ou diminution dans l'écart des sommiers.

On calculera τL et on le portera de D_1 en D'_1 positif ou de D_1 en D''_1 négatif, en remarquant que cet écart dû à la température, doit être mesuré à l'échelle des élastiques (v. fig. 420). Nous avons ici pour une variation de 25 degrés centigrades :

$$L = 16, \qquad \tau = 0{,}00035, \qquad \tau L = 0{,}005^{mm},6.$$

Nota. — Cette augmentation d'écart, due à la dilatation, revient (fig. V *bis*) à remonter de P'' en P''' le stabili-centre de charge, et l'on a, en appelant i ce déplacement en hauteur,

$$i = \pm \frac{\tau L}{\alpha_0^p + \alpha_1^p}.$$

Le signe + répond à une élévation, et le signe — à un abaissement de 25° dans la température.

427. Calcul algébrique.

(*a*) **Arc à deux sommiers encastrés.** — *Equations de stabilité.* — Les inconnues sont la poussée t et les deux moments d'encastrement M_0 et M_1. Posons

$$x = \frac{t}{\theta}, \qquad y = \frac{M_0}{\mu} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{M_1}{\mu},$$

θ et μ étant la poussée et le moment unitaires, qui ont servi à faire les épures relatives aux constantes de l'arc. (V. n° 419-*a* et 421).

D'après ce que nous avons vu les quantités inconnues t, M_0 et M_1 produiront pour leur part les effets suivants :

	t	M_0	M_1
Ecart des sommiers.	$x\lambda^0$	$y\lambda^{\mu}_0$	$z\lambda^{\mu}_1$
Déviation angulaire à l'origine. .	$x\alpha^0_0$	$y\alpha^{\mu}_{0\,0}$	$z\alpha^{\mu}_{0\,1}$
Déviation angulaire à l'extrémité.	$x\alpha^0_1$	$y\alpha^{\mu}_{1\,0}$	$z\alpha^{\mu}_{1\,1}$

Et comme ces effets doivent transformer en arc la poutre courbe soumise aux efforts extérieurs et à la température nous écrirons que leur somme doit annuler les effets de même nature dus aux causes extérieures, ce qui nous donnera les trois équations du premier degré

$$(1)\qquad x\lambda^0 + y\lambda^{\mu}_0 + z\lambda^{\mu}_1 + (\lambda^p \pm \tau L) = 0,$$

$$(2)\qquad x\alpha^0_0 + y\alpha^{\mu}_{0\,0} + z\alpha^{\mu}_{0\,1} + \alpha^p_0 = 0,$$

$$(3)\qquad x\alpha^0_1 + y\alpha^{\mu}_{1\,0} + z\alpha^{\mu}_{1\,1} + \alpha^p_1 = 0.$$

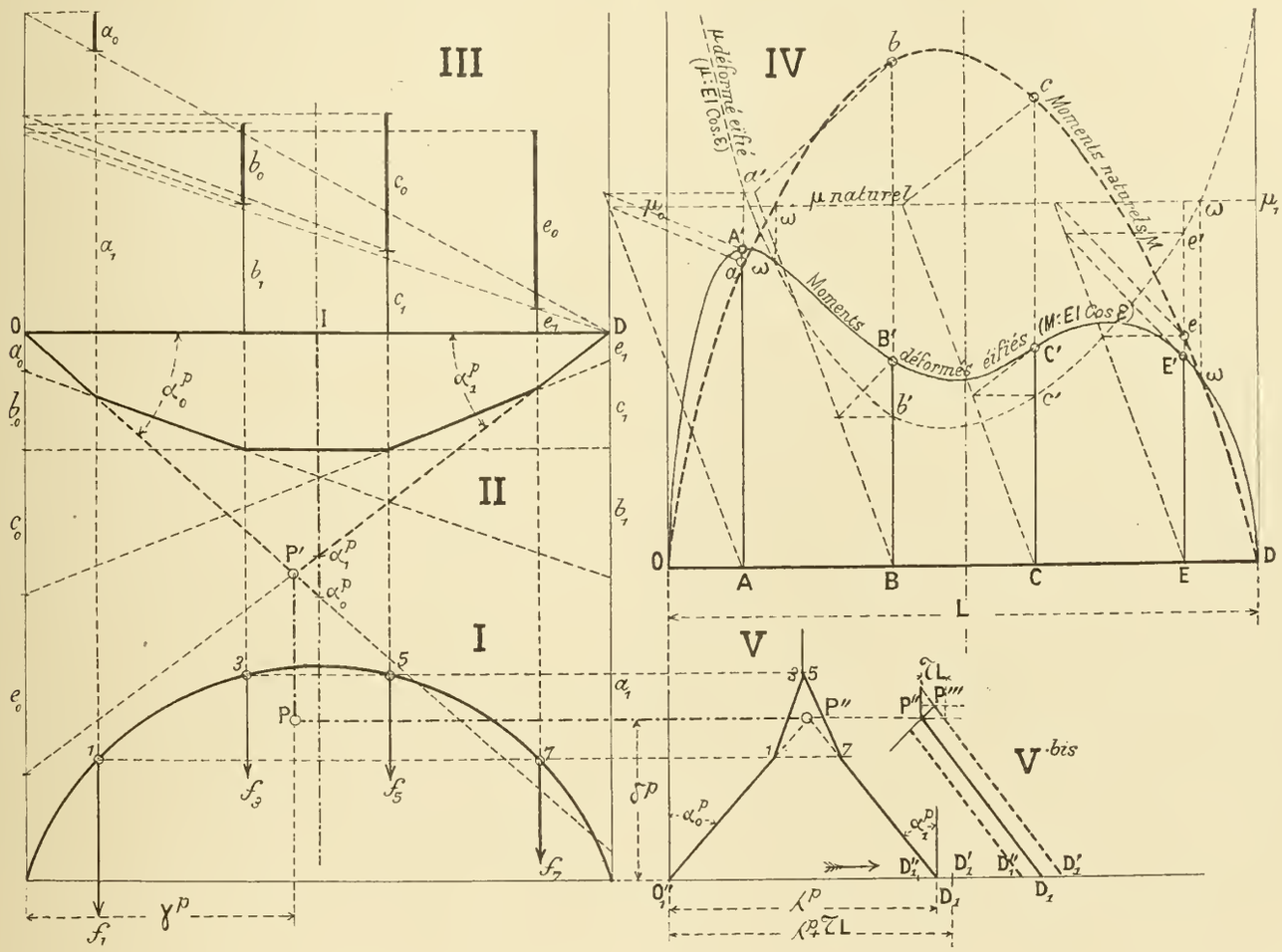


Fig. 427

Telles sont les *équations de stabilité* des arcs à deux sommiers encastrés.

L'équation (1) exprime que l'écart final des sommiers est nul.

L'équation (2) exprime que le total des déviations angulaires initiales est nul, c'est-à-dire qu'il y a encastrement parfait à l'origine.

L'équation (3) exprime, de même, qu'il y a encastrement parfait au sommier d'extrémité.

Dans ces équations les coefficients des inconnues et les termes indépendants se mesureront en longueur sur les épures. Il n'y a pas de difficultés pour les écarts λ. Pour les pentes nous conseillons de les mesurer sur les verticales milieu des funiculaires des hauteurs ; ce sont les segments tels que : $I\alpha^{\mu}_0$ et $I\alpha^{\mu}_1$ (fig. 421-IV), $I\alpha^p_0$ et $I\alpha^p_1$ (fig. 427-II), etc... interceptés sur elles par le côté initial et par le côté final de ces funiculaires.

Application à l'arc précédent. — En prenant les mesures sur les épures précédentes on trouve, en observant les signes :

$\lambda^0 = +16$	$\lambda^{\mu}_0 = +19$	$\lambda^{\mu}_1 = +17$	$\lambda_p + \tau L = +38$
$\alpha^0_0 = -15$	$\alpha^{\mu}_{0\,0} = -26$	$\alpha^{\mu}_{0\,1} = -10$	$\alpha^p_0 = -36$
$\alpha^0_1 = -14$	$\alpha^{\mu}_{1\,0} = -11$	$\alpha^{\mu}_{1\,1} = -24$	$\alpha^p_1 = -30$

Il est à remarquer que l'on peut mesurer ces longueurs

à une échelle quelconque, en millimètres par exemple ; c'est ce que nous avons fait.

Les équations de stabilité deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} 16x + 19y + 17z = -38 \\ 15x + 26y + 10z = -36 \\ 14x + 11y + 24z = -30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{avec } \theta = 10 \text{ tonnes.} \\ \mu = 100 \text{ tonnes-mètres.} \\ x = \dfrac{t}{\theta}, \quad y = \dfrac{M_0}{\mu}, \quad z = \dfrac{M_1}{\mu}. \end{array}$$

Elles donnent en nombres ronds pour les racines :

$x = -3{,}45$ d'où $t = -34^{\text{tonnes}}, 500.$

$y = +0{,}38$ d'où $M_0 = +38^{\text{tonnes-mètres}}.$

$z = +0{,}59$ d'où $M_1 = +59^{\text{tonnes-mètres}}.$

(*b*) **Arc à une rotule.** — Supposons que le sommier d'extrémité soit à rotule, tandis que le sommier d'origine sera encastré. Les deux inconnues principales sont la poussée t et le moment d'encastrement à l'origine M_0 ;

L'inconnue secondaire serait la déviation angulaire α_1 sur le sommier à rotule.

On aura $M_1 = 0$; c'est-à-dire $z = 0$.

Nous écrirons 1° que l'écart total des sommiers est nul, et 2° que la déviation angulaire totale à l'origine est nulle également, ce qui donnera :

$$(1)' \qquad x\lambda^0 + y\lambda^{\mu_0} + (\lambda^p \pm \tau L) = 0,$$

$$(2)' \qquad x\alpha_0^0 + y\alpha_{00}^{\mu} + \alpha_0^p = 0.$$

Application à l'arc précédent : Les équations deviennent

$$16x + 19y = -38$$

$$15x + 26y = -36 \qquad \text{d'où l'on tire}$$

$x = -2{,}315$ et $t = -23^{\text{tonnes}}{,}150,$

$y = -0{,}045$ et $M_0 = -4^{\text{t.m.}}{,}500.$

(*c*) **Arc à deux rotules.** — On aura $M_0 = 0$ et $M_1 = 0$. La seule inconnue principale est la poussée t ; on l'obtiendra en écrivant que l'écart des sommiers est nul, ce qui donne

$$(1)'' \qquad x\lambda^0 + (\lambda^p \pm \tau L) = 0.$$

Application à la poutre : Cette équation devient

$$16x = -38, \qquad \text{d'où}$$

$x = -2{,}37$ et $t = -23^{\text{tonnes}}{,}700.$

428. Calcul graphique.

(*a*) **Rappel du théorème général.** — La solution graphique résulte du théorème général de la stabilité des arcs (416-*c*). Rappelons d'abord sa signification.

1° On applique au sommier d'origine une force fictive représentant la déviation angulaire de la fibre neutre en ce point.

2° On applique au sommier d'extrémité une force fictive représentant la déviation angulaire en ce point.

3° On applique au centre de gravité de la courbe à cheval des moments fléchissants totaux une force fictive représentant son aire.

Théorème. — « Ces trois forces fictives supposées toujours « parallèles entre elles doivent, *elles ou leurs composantes*, « se faire équilibre dans toutes les directions (c'est ce que « l'on nomme un équilibre *astatique*) . »

Remarquons qu'il y a homogénéité dans ces forces fictives, car on se souvient que les déviations angulaires ne sont autre chose que des réactions d'aires, et, comme elles, nos épures nous les donnent sous forme de longueurs.

(*b*) **Son interprétation.** — Mais nous ne connaissons que l'aire de la courbe à cheval des moments de charge ; elle a pour valeur représentative $A_1 = \alpha_0^p + \alpha_1^p$ et elle est appliquée au stabili-centre de charge P, lequel, si l'on veut tenir compte de la dilatation calorifique, doit être monté ou descendu de la quantité $i = \tau L : (\alpha_0^p + \alpha_1^p)$. La longueur $\alpha_0^p + \alpha_1^p$ se mesure sur la verticale milieu (fig. 427-II).

Les autres forces fictives sont inconnues ; il y a :

1° La force fictive qui résulterait de l'encastrement à l'origine ; si M_0 est le moment *inconnu* d'encastrement, elle serait figurée par une longueur

$$Y = \frac{M_0}{\mu}(\alpha_{00}^{\mu} + \alpha_{10}^{\mu}).$$

appliquée au stabili-centre d'encastrement d'origine I ; la longueur $A' = (\alpha_0^{\mu_0} + \alpha_1^{\mu_0})$ se mesure sur la verticale milieu de la fig. 421-III.

2° La force fictive qui résulterait de l'encastrement d'extrémité : elle serait figurée par une longueur

$$Z = \frac{M_1}{\mu}(\alpha_{01}^{\mu} + \alpha_{11}^{\mu}),$$

appliquée au stabili-centre d'encastrement d'extrémité J : la longueur $A'' = (\alpha_0^{\mu_1} + \alpha_1^{\mu_1})$ est donnée sur la verticale milieu de la fig. 421-IV.

3° La force fictive qui résulterait de la poussée ; elle serait figurée par une longueur

$$X = \frac{t}{\theta}(\alpha_0^0 + \alpha_1^0),$$

appliquée au stabili-centre de poussée T ; la longueur entre parenthèses $A = \alpha_0^0 + \alpha_1^0$ est donnée fig. 422-III.

4° Les déviations angulaires aux sommiers ; ou bien ce seront des quantités données, qui seront nulles s'il y a encastrement ; ou bien ce seront des inconnues s'il y a rotule ; dans ce cas elles seront représentées par des forces fictives α_0, α_1, appliquées respectivement à chaque sommier et se traduisant sur l'épure par des longueurs à trouver.

En résumé l'épure de statique graphique se fera comme suit :

1° Au stabili-centre de charge P (relevé ou non par la température), on applique une force connue $A_1 = \alpha_0^p + \alpha_1^p$.

2° Au stabili-centre d'encastrement d'origine I, on applique soit une force inconnue Y, s'il doit y avoir encas-

trement, soit une force nulle, si le sommier d'origine est à rotule.

3° Au stabili-centre d'encastrement d'extrémité J, on applique soit une force inconnue Z s'il doit y avoir encastrement, soit une force nulle s'il y a rotule.

4° Au stabili-centre de poussée T, on applique une force toujours inconnue X.

5° Au sommier d'origine O, on applique soit une force inconnue α_0 si le sommier est à rotule, soit une force nulle s'il est à encastrement.

6° Au sommier d'extrémité on applique soit une force inconnue α_1 si le sommier est à rotule, soit une force nulle s'il est à encastrement.

Cela fait, on exprime graphiquement qu'il y a équilibre *astatique*, c'est-à-dire pour toutes les directions, entre les forces connues et les forces inconnues. Il n'y aura jamais que trois inconnes ainsi que le fait voir le tableau ci-après.

Points d'application et forces fictives à y appliquer ou à y trouver	1er Cas Les deux sommiers encastrés	2e Cas Sommier d'origine encastré (l'autre à rotule)	3e Cas Sommier d'extrémité encastré (l'autre à rotule)	4e Cas Les deux sommiers à rotule
Stabili-centre P, avec $A = \alpha_0^p + \alpha_1^p$	A connu	A connu	A connu	A connu
Stabili-centre T, avec $X = \frac{t}{\theta}(\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta)$	X inconnu	X inconnu	X inconnu	X inconnu
Stabili-centre I, avec $Y = \frac{M_0}{\mu}(\alpha_{00}^\mu + \alpha_{10}^\mu)$	Y inconnu	Y inconnu	$Y = 0$ et $M_0 = 0$	$Y = 0$ et $M_0 = 0$
Stabili-centre J, avec $Z = \frac{M_1}{\mu}(\alpha_{01}^\mu + \alpha_{11}^\mu)$	Z inconnu	$Z = 0$ et $M_1 = 0$	Z inconnu	$Z = 0$ et $M_1 = 0$
Sommier O, avec α_0	$\alpha_0 = 0$	$\alpha_0 = 0$	α_0 inconnu	α_0 inconnu
Sommier D, avec α_1	$\alpha_1 = 0$	α_1 inconnu	$\alpha_1 = 0$	α_1 inconnu

La force A, qui résulte des charges, est connue dans tous les cas. Pour déterminer une quelconque des trois forces inconnues (X par exemple, c'est-à-dire la poussée dans le 1er cas), le procédé le plus simple consiste à rendre les forces parallèles à la droite IJ qui réunirait les points d'application des deux autres forces inconnues Y et Z; en prenant les moments par rapport à cette droite les forces Y et Z donneront des moments nuls, et l'équation des moments, ne comprenant plus que la force X, fera connaître cette dernière.

Nota. — Les quantités A, A′, A″, A_1 peuvent se calculer arithmétiquement (v. n° 429), au lieu de se construire géométriquement.

428 *bis*. **Application de la méthode graphique** (fig. 428). (*a*) **Arc à deux sommiers encastrés** (fig. I). — Les inconnues sont la poussée t, et les deux moments d'encastrement M_0 et M_1.

1° *Poussée.* — On mène la droite IJ qui joint les stabili-centres d'encastrement, et l'on écrit que le moment, par rapport à la droite IJ de la force fictive *connue* $A = \alpha_0^p + \alpha_1^p$, appliquée en P est égal et de signe contraire à celui de la force fictive *inconnue* $X = t(\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta) : \theta$ appliquée en T. Pour évaluer les moments il est inutile d'abaisser les perpendiculaires des points P et T sur la droite IJ. On peut prendre pour bras de leviers les portions d'ordonnées PP′ et TT′ interceptées, car elles sont proportionnelles aux perpendiculaires; cela donnera :

$$(1) \qquad t = \theta \times \frac{\overline{PP'}}{TT'} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta}.$$

Les deux rapports par lesquels il faut multiplier successivement θ sont des rapports de longueurs à prendre à une échelle quelconque sur l'épure.

2° *Moment d'encastrement à l'origine* M_0. — On joint JT, et l'on écrit que le moment, pris par rapport à cette droite, d'une force fictive *inconnue* $Y = M_0(\alpha_0^{\mu_0} + \alpha_1^{\mu_0}) : \mu$ est égal à celui de la force fictive connue A appliquée en P, ce qui donne

$$(2) \qquad M_0 = \mu \times \frac{PP''}{II''} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_{00}^\mu + \alpha_{10}^\mu}.$$

3° *Moment d'encastrement à l'extrémité* M_1. — On joint IT et en prenant, par rapport à cette droite, les moments des forces fictives appliquées en P et en J, on aura

$$(3) \qquad M_1 = \mu \times \frac{PP'''}{JJ'''} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_{01}^\mu + \alpha_{11}^\mu}.$$

(*b*) **Arc avec un seul sommier encastré** (fig. II). — Supposons que ce soit le sommier d'origine : les inconnues sont la poussée t, le moment d'encastrement M_0, et la déviation angulaire à l'extrémité α_1 :

1° *Poussée.* — On joint le point I et le sommier D et l'on écrit que, par rapport à cette droite, les moments de la force fictive A, connue, appliquée en P et de X, inconnue, appliquée en T sont nuls, ce qui donne (fig. II) :

$$(4) \qquad t = \theta \times \frac{PP'}{TT'} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta}.$$

2° *Moment d'encastrement* M_0. — On mène la droite TD, et en écrivant que les moments sont nuls on a

$$(5) \qquad M_0 = \mu \times \frac{PP''}{II''} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_{00}^\mu + \alpha_{10}^\mu}.$$

3° *Déviation angulaire d'extrémité* α_1. — On mène la droite IT et c'est par rapport à elle que l'on prend les moments de la force A appliquée en P et de la force fictive α_1 appliquée en D, ce qui donne

$$(6) \qquad \alpha_1 = (\alpha_0^p + \alpha_1^p) \times \frac{PP'''}{DD''}.$$

(*c*) **Arc à deux rotules** (fig. III). — Les inconnues sont t, α_0 et α_1.

1° *Poussée.* — On joint les deux sommiers et en prenant les moments par rapport à cette droite OD, on en déduit

$$t = \theta \times \frac{PP'}{TT'} \times \frac{\alpha_0'' + \alpha_1''}{\alpha_0^0 + \alpha_1^0}. \tag{7}$$

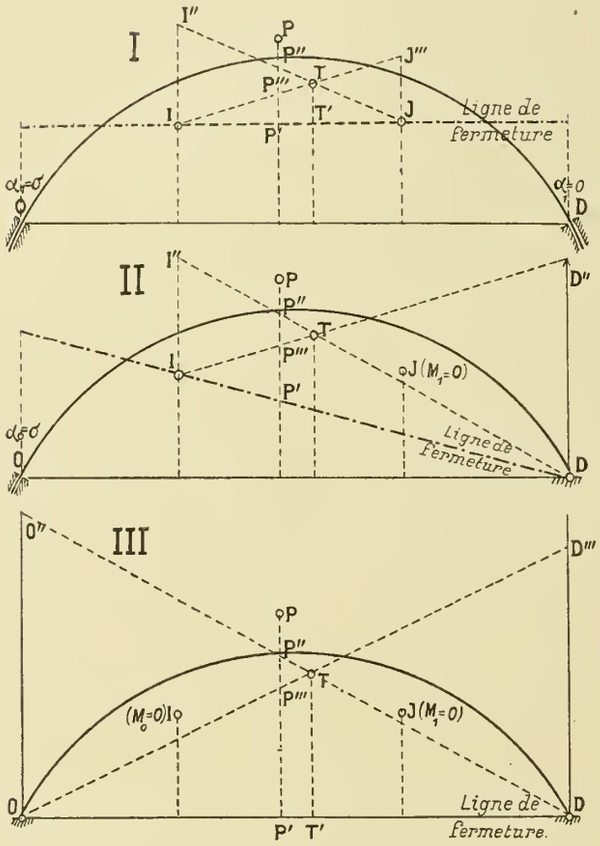


Fig. 428

2° *Déviation angulaire à l'origine.* — On joint D et T, et en prenant les moments par rapport à cette droite DT on a

$$\alpha_0 = (\alpha_0'' + \alpha_1'') \times \frac{PP''}{OO''}. \tag{8}$$

3° *Déviation angulaire à l'extrémité.* — On joint OT et en prenant les moments par rapport à cette droite OT on a

$$\alpha_1 = (\alpha_0'' + \alpha_1'') \times \frac{PP'''}{DD'''}. \tag{9}$$

Nota. — 1° Les droites telles que IJ (fig. I), DI (fig. II) et OD (fig. III) qu'il faut tracer dans chaque cas pour déterminer la poussée se nomment les *lignes de fermeture de l'arc.*

2° Nous avons appris à déterminer graphiquement les constantes de l'arc qui constituent les coefficients des équations dans la méthode algébrique ; on peut aussi, avec plus d'exactitude peut-être, les déterminer arithmétiquement ainsi que nous allons le montrer.

429. **Détermination arithmétique des constantes d'un arc.** (Voir le tableau de calcul p. 392 et 393).

(*a*) **Tableau de calcul.** — La fibre neutre sera divisée en segments de longueur ΔS, d'autant plus petits que l'on voudra plus d'exactitude; disons de suite que, comme nous allons opérer directement avec les segments de la fibre neutre et non plus avec leurs projections sur la corde, le facteur $1 : \cos \varepsilon$ n'aura plus à intervenir ici.

Si l'on fait un projet, c'est-à-dire si la constitution de l'arc n'est pas encore connue, on prendra tous les segments égaux entre eux, ce qui simplifiera les calculs. Si c'est un arc connu dont on veuille vérifier la solidité, comme les membrures de l'arc varieront en général brusquement en certains points par l'addition de semelles, ce sont les zônes d'égale membrure que l'on divisera en parties égales. On adoptera pour chacune d'elles un nombre pair de divisions et l'on prendra les sections répondant aux divisions de rang impair.

ΔS (fig. 429) sera la longueur d'un segment d'arc et les points 1, 2, 3, ... seront les centres de ces segments.

Δx et Δy seront les accroissements des coordonnées des *extrémités* des segments et non pas de leurs milieux ; au contraire x et y seront les coordonnées des milieux de segments. D'ailleurs Δx et Δy ne vont pas nous servir.

Cela posé, le tableau de calcul s'explique de lui-même.

Les colonnes 5, 6, 7 et 8 serviront pour les avant-projets, alors que l'on ne connaît pas encore la constitution de la poutre. On n'a, dans ce cas, qu'une idée approchée du contour de l'arc. C'est ainsi que si l'arc est à deux rotules son aspect sera celui de la fig. 429*bis*-I, plus épais à la clef qu'aux sommiers ; au contraire si les deux sommiers sont encastrés, il aura l'aspect de la fig. 429*bis*-II, plus épais aux sommiers qu'à la clef.

L'auteur du projet est toujours un peu maître de cet aspect, qui doit concourir à l'effet esthétique de son œuvre. Il peut donc, avant tout calcul, se donner une première

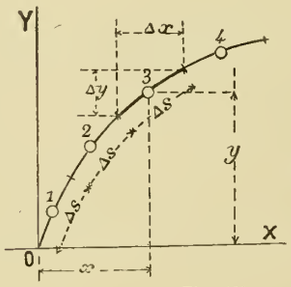


Fig. 429

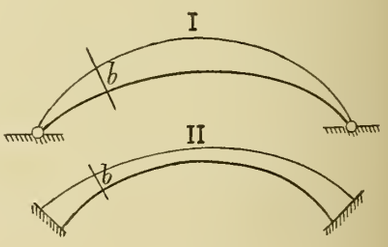


Fig. 429 bis

valeur approchée de la hauteur b de chaque section. Dès lors en admettant, toujours comme première approximation, que la membrure est uniforme, nous avons vu que, Ω étant la surface d'une des deux membrures, le moment d'inertie a pour valeur approchée $I = 2\Omega b^2$; il est pro-

portionnel à b^2. C'est pourquoi au lieu de I on peut prendre b^2 et c'est ce qui justifie le titre des colonnes 5, 6, 7 et 8. Dans les colonnes suivantes 14, 15, 16, etc... le lecteur pourra remplacer I par b^2 lorsqu'il s'agira d'un avant-projet.

Les moments indiqués m et m' (colonnes 13 et 17) sont ceux des triangles unitaires; ils pourront soit se calculer en fonction de l'abscisse

$$m = \mu\frac{L - x}{L} \quad \text{et} \quad m' = \mu - m = \mu\frac{x}{L},$$

soit se mesurer graphiquement, en construisant à grande échelle les triangles unitaires.

Le moment M (colonne 21) se mesurera sur un funiculaire des moments de charges, que l'on aura construit, au préalable, à échelle aussi grande que possible.

Les arcs seront toujours homogènes ; E sera donc constant. C'est pourquoi il est inutile de faire entrer E dans les calculs. Il n'interviendra qu'une seule fois, lorsque l'on ajoutera l'écart dû à la température à l'écart dû aux charges ; il faudra écrire $\tau L \times E$ au lieu de τL.

Comme conclusions de ce tableau on fera les totaux marqués A, B, C, A', B', C', ..., etc. Ils auront les significations suivantes.

Poussée : $A = \Sigma\frac{\theta y}{I}\Delta S$, c'est l'aire totale de la courbe à cheval de poussée unitaire ; on a donc $A = \alpha^0_0 + \alpha^0_1$.

$B = \Sigma\frac{\theta y^2}{I}\Delta S$, c'est la somme des moments des aires partielles de cette courbe à cheval par rapport à la corde de l'arc. C'est donc (v. n° 421) l'écart des sommiers dû à la poussée unitaire ou λ^0.

$C = \Sigma\frac{\theta yx}{I}\Delta s$, c'est la somme des moments des aires partielles de la courbe à cheval, par rapport à la verticale d'origine.

Par conséquent on aura, pour les coordonnées de stabili-centre de poussée,

$$\gamma^0 = \frac{C}{A}, \qquad \text{et} \qquad \delta^0 = \frac{B}{A}.$$

Enfin, en écrivant que, par rapport à la verticale d'origine, la somme des moments de la réaction d'extrémité α_1 et de l'aire totale est nulle, on aura

$$\alpha^0_1 = -\frac{C}{L}, \quad \text{et comme} \quad \alpha^0_0 + \alpha^0_1 + A = 0, \quad \alpha^0_0 = \frac{C}{L} - A.$$

Les autres constantes se déduisent de la même manière des résultats du tableau de calcul.

Si nous opérons graphiquement ce seront les quantités A, γ et δ, qui serviront. Si nous opérons algébriquement ce seront les quantités λ, α_0, et α_1.

(*b*) **Simplifications pour les arcs symétriques.** — Un arc est *à constitution symétrique* lorsqu'il y a symétrie absolue par rapport à la verticale milieu, non seulement de la fibre neutre, des lignes d'intrados et d'extrados mais encore des sections, ce qui veut dire que, à toute section située à gauche de la verticale milieu, répondra une section située à droite, qui aura les mêmes dimensions et la même constitution c'est-à-dire le même moment d'inertie. Dans la pratique ce cas se présentera presque toujours.

Il peut se faire, en outre, que l'arc soit symétriquement chargé ; mais cela sera moins fréquent car, soit le vent pour les fermes en arc, soit un convoi mobile, pour les ponts, apporteront de la dissymétrie dans les charges.

Pour un arc symétrique il est évident *à priori* :

1° Que le stabili-centre de poussée T sera sur la verticale milieu ; on aura donc $\gamma^0 = 1/2L$;

2° Que les stabili-centres d'encastrement seront symétriques par rapport à cette verticale milieu ; ils seront à la même hauteur et l'on aura : $\gamma^\mu_0 + \gamma^\mu_1 = L$ avec $\delta^\mu_0 = \delta^\mu_1$.

Considérons un point F ayant pour abscisse x et son symétrique F' ayant pour abscisse $L - x$, et voyons ce que chacun d'eux produira dans les colonnes 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19 du tableau.

	Abscisses	m	$\frac{m}{I}\Delta S$	$\frac{m}{I}y\Delta S$	$\frac{m}{I}x\Delta S$
		13 et 17	14 et 18	15 et 19	16 et 20
Point F	x	$\frac{L-x}{L}$	$\frac{L-x}{L}\times\frac{\Delta S}{I}$	$\frac{L-x}{L}\times\frac{y}{I}\Delta S$	$\frac{L-x}{L}\times\frac{x}{I}\Delta S$
Point F'	$L - x$	$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L}\times\frac{\Delta S}{I}$	$\frac{x}{L}\times\frac{y}{I}\Delta S$	$\frac{x}{L}\times\frac{x}{I}\Delta S$
Totaux.	L	1	$\frac{1}{I}\Delta S$	$\frac{y}{I}\Delta S$	$\frac{x}{I}\Delta S$
			A'=A''=D/2	B'=B''=A/2	C'=C''=F/2

Ce qui prouve que, dans le cas d'un arc symétrique, on pourra ne considérer que la moitié de l'arc, et alors

1° $\sum\frac{1}{I}\Delta S$, étendu à cette moitié, donnera le même total que $\sum\frac{m}{I}\Delta S$ ou $\sum\frac{m'}{I}\Delta S$ étendu à l'arc tout entier ; c'est-à-dire $1/2D = A' = A''$;

2° $\sum\frac{y}{I}\Delta S$ étendu à la moitié, donnera le même total que $\sum\frac{my}{I}\Delta S$ ou $\sum\frac{m'y}{I}\Delta S$ étendu à la totalité ; c'est-à-dire $1/2A = B' = B''$;

3° $\sum\frac{x}{I}\Delta S$ étendu à la moitié, donnera le même total que $\sum\frac{mx}{I}\Delta S$ ou $\sum\frac{m'x}{I}\Delta S$ étendu à la totalité ; c'est-à-dire $1/2F = C' = C''$.

Quant aux totaux relatifs à la poussée (colonnes 10, 11, 12), si on ne fait les sommes que pour la moitié de l'arc, il faudra doubler les totaux obtenus.

CONSTANTES

TABLEAU GÉNÉRAL

FIBRE NEUTRE				SECTIONS				POUSSÉE			
Centres des segments	Longueurs des segments	x, y, coordonnées des milieux des segments		Hauteur des sections	Moments d'inertie			Poussée unitaire $\theta = \ldots$			
N°s	ΔS	x	y	b	I ou b^2	$\frac{1}{I}$ ou $\frac{1}{b^2}$	$\left(\frac{1}{I}\text{ ou }\frac{1}{b^2}\right)\Delta S$	$\frac{x}{I}\Delta S$	$\frac{y}{I}\Delta S$	$\frac{y^2}{I}\Delta S$	$\frac{yx}{I}\Delta S$
1	2	3	4	5	6	7	8 (7×2)	9 (8×3)	10 (8×4)	11 (10×4)	12 (10×3)
						Totaux. .	D	F	A	B	C

Résultats du Calcul

	CONSTANTES			
	de poussée.	d'encastrement à l'origine.	d'encastrement à l'extrémité	de charges
1 Aire totale de la courbe à cheval $-(\alpha_0+\alpha_1)$	$(\alpha_0^\theta+\alpha_1^\theta)\begin{cases}=\frac{\theta}{E}\times A\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$(\alpha_0^{\mu_0}+\alpha_1^{\mu_0})\begin{cases}=\frac{\mu}{E}\times A'\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$-(\alpha_0^{\mu_1}+\alpha_1^{\mu_1})\begin{cases}=\frac{\mu}{E}\times A''\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$-(\alpha_0^p+\alpha_1^p)\begin{cases}=\frac{1}{E}\times A_1\\=\ldots\ldots\end{cases}$
2 Déviation angulaire à l'origine α_0	$\alpha_0^\theta\begin{cases}=-\frac{\theta}{E}\times\left(A-\frac{C}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_0^{\mu_0}\begin{cases}=-\frac{\mu}{E}\times\left(A'-\frac{C'}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_0^{\mu_1}\begin{cases}=-\frac{\mu}{E}\times\left(A''-\frac{C''}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_0^p\begin{cases}=-\frac{1}{E}\times\left(A_1-\frac{C_1}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$
3 Déviation angulaire à l'extrémité α_1	$\alpha_1^\theta\begin{cases}=-\frac{\theta}{E}\times\left(\frac{C}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_1^{\mu_0}\begin{cases}=-\frac{\mu}{E}\times\left(\frac{C'}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_1^{\mu_1}\begin{cases}=-\frac{\mu}{E}\times\left(\frac{C''}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\alpha_1^p\begin{cases}=-\frac{1}{E}\times\left(\frac{C_1}{L}\right)\\=\ldots\ldots\end{cases}$
4 Ecart des sommiers λ	$\lambda^\theta\begin{cases}=\frac{\theta}{E}\times B\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\lambda^{\mu_0}\begin{cases}=\frac{\mu}{E}\times B'\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\lambda^{\mu_1}\begin{cases}=\frac{\mu}{E}\times B''\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\lambda^p\begin{cases}=\frac{1}{E}(B_1\pm E\tau L)\\=\ldots\ldots\end{cases}$
5 Abscisse du stabili-centre γ	$\gamma^\theta\begin{cases}=\frac{C}{A}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\gamma^{\mu_0}\begin{cases}=\frac{C'}{A'}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\gamma^{\mu_1}\begin{cases}=\frac{C''}{A''}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\gamma^p\begin{cases}=\frac{C_1}{A_1}\\=\ldots\ldots\end{cases}$
6 Ordonnée du stabili-centre δ	$\delta^\theta\begin{cases}=\frac{B}{A}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\delta^{\mu_0}\begin{cases}=\frac{B'}{A'}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\delta^{\mu_1}\begin{cases}=\frac{B''}{A''}\\=\ldots\ldots\end{cases}$	$\delta^p\begin{cases}=\frac{B_1\pm E\tau L}{A_1}\\=\ldots\ldots\end{cases}$

DE CALCUL

ENCASTREMENTS $\left\{\begin{matrix}\text{moment}\\ \text{unitaire}\end{matrix}\right\} \mu = \ldots$								CHARGES ET DILATATION CALORIFIQUE M est le moment de charges			
A L'ORIGINE $m \left\{\begin{matrix}\text{ordonnée du triangle}\\ \text{unitaire de gauche}\end{matrix}\right\} = \mu \frac{L-x}{L}$				A L'EXTRÉMITÉ $m' \left\{\begin{matrix}\text{ordonnée du triangle}\\ \text{unitaire de droite}\end{matrix}\right\} = \mu \frac{x}{L}$							
m	$\frac{m}{I}\Delta S$	$\frac{my}{I}\Delta S$	$\frac{mx}{I}\Delta S$	m'	$\frac{m'}{I}\Delta S$	$\frac{m'y}{I}\Delta S$	$\frac{m'x}{I}\Delta S$	M	$\frac{M}{I}\Delta S$	$\frac{My}{I}\Delta S$	$\frac{Mx}{I}\Delta S$
13	14 (13 × 8)	15 (14 × 4)	16 (14 × 3)	17	18 (17 × 8)	19 (18 × 4)	20 (18 × 3)	21	22 (21 × 8)	23 (22 × 4)	24 (22 × 3)
Totaux.	A′	B′	C′	Totaux.	A″	B″	C″	Totaux.	A_1	B_1	C_1

Observations : 1° En général on prend $\theta = 1$ (1 tonne) $\mu = 1$ (1 tonne-mètre); E est constant, et il n'est pas utile d'introduire les facteurs $\theta : E$ et $\mu : E$. Le module d'élasticité E n'est à faire intervenir que si l'on veut connaître les valeurs absolues des défigurations (Déviations angulaires ou écarts de sommiers).

2° Pour les constantes de charge (4e et 6e lignes), le terme correctif de dilation $E\tau L$ s'introduit, une première fois pour augmenter l'écart des sommiers de la quantité $\pm \tau L$ et une seconde fois pour déplacer, en hauteur, le stabilicentre des charges de la quantité $\pm (E\tau L : A_1)$. Le signe + répond à une augmentation de la température et le signe — répond à une diminution; en admettant 25° centigrades de variation, par rapport à la température à l'instant du montage, on aura, pour le fer et l'acier, $\tau = 0{,}00035$.

3° (*Important*). Il ne faut introduire le terme correctif de température que si l'on opère avec les véritables moments d'inertie I et non pas avec des valeurs proportionnelles, telles que b^2 (v. plus loin n° 442-*b*). De plus il faut que les moments de charge soient exprimés en kilogrammomètres; s'ils étaient exprimés en tonne-mètres il faudrait prendre pour E une valeur 1000 fois plus petite.

Enfin, pour les charges (colonnes 22, 23, 24) on fera les totaux pour l'arc entier ; cependant si les charges sont symétriques on ne considérera que la moitié de l'arc et on doublera, aussi, les totaux.

§ 6 — Équilibre moléculaire des sections. — Courbe des pressions

430. Moments fléchissants définitifs (fig. 430).

(*a*) **Représentative à distance polaire quelconque.** — Nous avons appris à déterminer, dans tous les cas possibles, la poussée t, et, quand il y a encastrement aux sommiers, les moments d'encastrement M_0 et M_1.

Nous connaissons la représentative des moments positifs de charge ; elle a été obtenue par un funiculaire de distance polaire arbitraire, d par exemple, mais qui, ainsi que nous allons le voir, n'est que provisoire.

Les moments d'encastrement donnent lieu à une représentative de moments qui est la droite, négative ou positive, M_0M_1. Et, si nous avions une poutre et non un arc, en déplaçant la courbe des moments jusqu'à ce qu'elle ait cette droite pour ligne de fermeture, nous aurions en $M_0\omega GM_1$ (tracé en pointillé) la représentative des moments fléchissants sur la poutre encastrée.

Mais nous avons un arc et la poussée, t, donne lieu, de son côté, à des moments négatifs, dont la représentative est une dilatation, OTD, de la fibre neutre ; et les moments définitifs sont mesurés par les portions d'ordonnées comprises entre la courbe M_0GM_1 et la dilatée de fibre neutre OTD ; la distance polaire étant toujours d, et provisoire.

Les ordonnées y' de cette dilatée doivent être telles qu'en les mesurant à l'échelle des forces et en les multipliant par la distance polaire d, on obtienne le moment de poussée, c'est-à-dire $t \times y$. On doit donc avoir

$$y' \times d = t \times y \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{t}{d}.$$

Ce qui veut dire que les ordonnées de la représentative OTD des moments de poussée, sont aux ordonnées de la fibre neutre, comme la longueur t *qui représente la poussée* est à la longueur d qui *représente la distance polaire* actuelle.

Imaginons que ces deux longueurs soient les mêmes et l'on aura $y' = y$; d'où ce lemme :

Lemme. — « Si la distance polaire et la poussée sont « représentées, graphiquement, par la même longueur, la « représentative des moments de poussée sera confondue « avec la fibre neutre. »

Nous dirons alors que d est *graphiquement* égal à t.

(*b*) **Représentative à distance polaire** $d = t$. — Nous aurons intérêt, ainsi que nous allons le montrer, à ramener à cette distance polaire ($d = t$) tous les funiculaires de moments, aussi bien les funiculaires des moments de charge que la droite M_0M_1, qui est la représentative des moments d'encastrement ; cela se fera en dilatant toutes les ordonnées dans le rapport $t : d$.

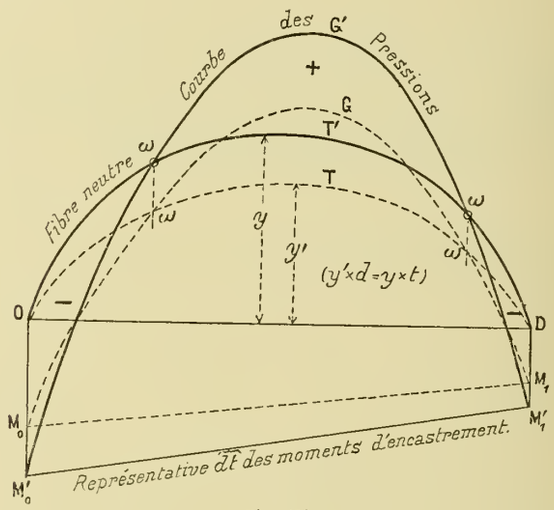


Fig. 430

Nous désignerons par les deux lettres réunies $\widetilde{dt}$ ces funiculaires ainsi dilatés, et nous dirons « le funiculaire $\widetilde{dt}$ des moments de charge », ce qui voudra dire qu'il a une distance polaire d qui, mesurée à l'échelle des longueurs, est égale à la longueur qui, à l'échelle des forces, mesure la poussée t. Nous dirons aussi la droite $\widetilde{dt}$ des moments d'encastrement. Sur la fig. 430, nous avons dilaté dans le rapport $t : d$:

1° La courbe OTD, ce qui a redonné la fibre neutre ;

2° La droite M_0M_1, ce qui a donné la représentative $\widetilde{dt}$ des moments d'encastrement ;

3° La courbe M_0GM_1, représentative descendue des moments fléchissants, ce qui a donné, en $M'_0G'M'_1$, la représentative descendue $\widetilde{dt}$ des moments fléchissants, que nous nommerons la *courbe des pressions*, pour les raisons que nous allons expliquer.

431. Polygone et courbe des pressions. — (*a*) **Définition.** — On nomme polygone des pressions dans un arc, la ligne brisée formée par les lignes d'action successives des forces extérieures qui agissent sur lui, en comprenant la poussée parmi ces forces.

On a un polygone des pressions lorsque les forces sont discontinues ; ce polygone devient, à la limite, une courbe lorsque les forces sont réparties d'une manière continue.

(*b*) **Théorème.** — « Le polygone des pressions n'est autre « chose que le funiculaire $\widetilde{dt}$, ayant pour ligne de ferme- « ture la représentative $\widetilde{dt}$ des moments d'encastrement. »

Supposons d'abord que l'arc soit à deux rotules, et que nous connaissions (fig. 431-I) la poussée t (force horizontale) et la réaction X_0 des charges (force verticale), appliquées toutes deux au sommier d'origine O. Leur résultante $Og = R'$ donnerait le premier côté du polygone des pressions. Nous prenons en a sa rencontre avec la première charge rencontrée f_1 et la résultante ab de ces deux forces donnerait le second côté du polygone des pressions, et ainsi de suite. En allant jusqu'au bout, nous devrons fermer ce polygone sur le sommier d'extrémité D.

Pour faire ce tracé, on construira d'abord un dynamique (fig. 431-II) avec la poussée t, que l'on combinera avec les charges f_1, f_2 et les réactions X_0 et X_1. Les rayons polaires numérotés 1, 2, 3 de ce dynamique donnent les grandeurs et les directions des résultantes successives des pressions. Cela prouve que le polygone des pressions O, a, b, c, D n'est autre chose, dans le cas de l'arc à deux rotules, que le funiculaire $\widetilde{dt}$, tel que nous l'avons défini ci-dessus.

S'il y a encastrement, je dis que le funiculaire $\widetilde{dt}$ descendu de telle sorte que sa ligne de fermeture en M_0M_1 soit confondue sur la représentative $\widetilde{dt}$ des moments d'encastrement est encore le polygone des pressions.

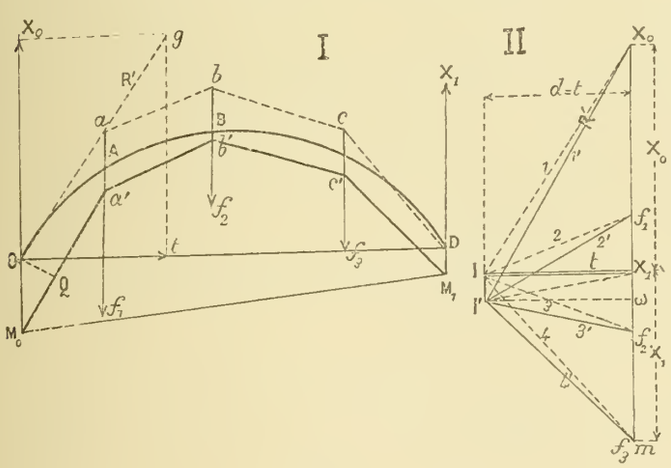


Fig. 431

En effet, déplaçons le pôle du dynamique (fig. II) de I en I', de telle sorte que X_1I', qui primitivement était parallèle à la corde de l'arc, soit maintenant parallèle à la ligne des moments M_0M_1. Je dis tout d'abord que I'I représente la modification apportée dans la réaction de l'appui d'origine par l'ensemble des couples d'encastrement M_0 et M_1.

En effet, cette réaction n'est autre chose que l'effort tranchant qui, en O, résulte de l'action réunie de ces deux couples M_0 et M_1, et sa valeur est donnée par la pente *vraie* de la représentative M_0M_1. Ici elle est négative. La *pente-épure* de cette ligne des moments est fournie par le dynamique ; elle est II' : d ; sa pente *vraie* s'obtiendra en multipliant sa *pente-épure* par la distance polaire d, ce qui donnera II', ainsi que nous l'avions annoncé.

Par conséquent, au droit du sommier d'origine, les trois forces en présence sont, en les prenant sur le dynamique (fig. II) :

1° La réaction I'I, provenant des moments, et qui a été trouvée ci-dessus ;

2° La poussée IX_1 ;

3° La réaction verticale X_1X_0 . . . de l'appui.

La résultante de ces trois forces est bien, en direction et en grandeur, donnée par le rayon polaire $I'X_0$ du dynamique, et par conséquent le côté M_0a' (fig. I) du funiculaire $\widetilde{dt}$, qui lui est parallèle, donne bien *en direction* le premier côté du polygone de poussée.

Je dis qu'il le donne aussi en position. Pour le démontrer, il suffit de prouver que cette force, dont la grandeur R' est donnée en $I'X_0$ (fig. II), développe, à l'origine, un moment fléchissant égal à M_0.

Or, abaissons OQ, perpendiculaire, sur M_0a'. Le moment de la force M_0a' pris par rapport au point O, est le produit de $I'X_0$ (fig. II), par OQ (fig. I). Les triangles OQM_0 (fig. I) et $I'\omega X_0$ (fig. II) sont semblables comme étant rectangles et ayant un angle aigu égal. Ils donnent :

$$\frac{OQ}{t} = \frac{OM_0}{R'}, \qquad \text{d'où} \qquad OQ \times R' = OM_0 \times t = M_0,$$

car le moment d'encastrement réel M_0 s'obtient en multipliant sa représentative OM_0 par la distance polaire t.

Passons maintenant aux autres forces. Cette première résultante R' rencontre en a' la force f_1, et doit se combiner avec elle pour donner le second côté du polygone des pressions. Le dynamique le donne en grandeur et direction par son second rayon polaire $I'f_1$ qui est parallèle au second côté $a'b'$ du funiculaire $\widetilde{dt}$; donc ce côté est bien la seconde résultante partielle des forces extérieures, c'est-à-dire aussi le second côté du polygone des pressions, et ainsi de suite. Le théorème est donc démontré.

Nota. — Si les forces sont réparties d'une manière continue, le polygone des pressions devient *la courbe des pressions*, dont les tangentes sont les positions limites des côtés du polygone.

432. Centres de pression. — Effort tranchant.

Supposons tracée la ligne des pressions que nous venons d'étudier, et considérons une section quelconque de l'arc, normale à la fibre neutre primitive du point A (fig 432-I).

Pour étudier ce qui se passe en ce point, reproduisons (fig. II) la portion de dynamique correspondante.

Soit OA′ la courbe des pressions, les points A et A′ étant, d'après la démonstration précédente, sur une même verticale. Soit AK la section normale de l'arc ; le moment fléchissant en A est, nous l'avons vu, égal au produit de l'ordonnée AA′ par la distance polaire $d = t$ du funiculaire $\widetilde{dt}$ qui constitue la courbe des pressions ; il est positif dans le cas de la figure.

Menons au point A′ la tangente à la courbe des pressions ; le point I où cette tangente rencontre la section AK est le *centre de pression* de cette section, car c'est bien le point I ou la résultante des forces, laquelle a pour ligne d'action A′I, vient rencontrer la section.

Si l'on a un polygone, au lieu d'une courbe des pressions la tangente précédente sera remplacée par le côté du polygone des pressions que rencontre la verticale AA′.

Sur le dynamique, la distance polaire est Sω égale à t ; le rayon polaire Sa est parallèle à la tangente en A à la courbe des pressions ; ce rayon polaire représente, en gran-

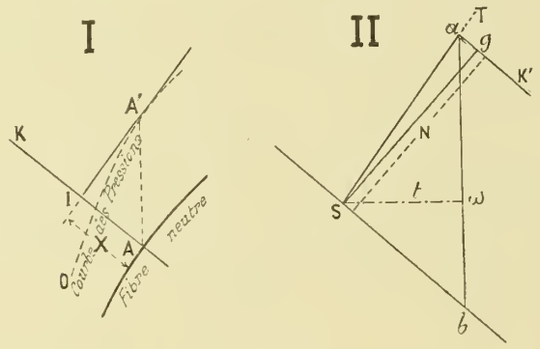


Fig. 432

deur et direction, la pression P que subit la section AK. Menons aK′ parallèle au plan de la section AK ; abaissons du pôle S la perpendiculaire Sg sur cette droite, la droite Sg nous donne la valeur de la *pression normale* N sur la section AK ; la droite ga nous donne celle de l'*effort tranchant* T.

On voit que si on transporte la force N appliquée au point I, de ce point au centre de gravité A de la section, le moment de transport est égal à NX, et positif dans le cas actuel, X représentant la distance du centre de pression I au centre de gravité A de la section. Il doit être égal au moment fléchissant dans la section AK et de même signe que lui.

Cela doit être, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 413-*d* ; mais nous allons le vérifier dans le cas actuel et prouver que l'on a bien :

$$AI \times N = AA' \times t.$$

En effet les triangles semblables AIA′ (fig. I) et aSb (fig. II), Sb étant parallèle à AK, donnent :

$$\frac{ab}{Sb} = \frac{AA'}{AI},$$

et comme dans le triangle aSb, on a :

$$ab \times t = Sb \times N, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ab}{Sb} = \frac{N}{t}$$

car, chacune de ces deux expressions représente le double de sa surface, il en résulte

$$\frac{ab}{Sb} = \frac{N}{t} = \frac{AA'}{AI}, \qquad \text{d'où}$$

$$AA' \times t = AI \times N. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous pourrions donc, sans construire le dynamique (fig. II), déduire la valeur de N de la figure I, à condition qu'elle soit faite à assez grande échelle.

Remarque. — En général la courbe des pressions ne passe pas par les centres de pression. Le lieu de ces derniers points est une courbe distincte de la précédente et qu'on nomme *courbe des centres de pression.*

La connaissance de la première entraîne celle de la seconde. En effet, si l'on donne la courbe de pression on prendra les points de cette courbe, tel que A′ situés sur la verticale du centre de gravité des sections ; on mènera sa tangente en ce point et la rencontre en I de cette droite avec la section donnera le centre de pression sur cette dernière.

Les deux courbes ne seraient confondues que si la fibre neutre elle-même était la courbe des pressions. On voit alors que dans aucune section de l'arc il n'y aurait de moment fléchissant ni d'effort tranchant. L'arc ne serait soumis qu'à des efforts de compression longitudinale.

433. Calcul des sections.

(*a*) **Arc à âme pleine.** — Nous avons déjà indiqué, au n° 413, comment, dans une pièce à âme pleine, la connaissance du moment fléchissant M, de l'effort tranchant T et de l'effort normal N permettrait de vérifier l'équilibre moléculaire de la section et de calculer ses dimensions. Nous n'y reviendrons pas car nous en ferons plus loin une application ; parlons seulement ici des arcs à âme évidée.

(*b*) **Arc en treillis.** — Si l'âme est constituée par des barres de treillis, ces barres ne résisteront qu'à l'effort tranchant. (V. n° 388-*c*-2°).

Soit ab (fig. 432) l'une de ces barres ; et soit αβ la ligne des pressions. Opérons comme nous l'avons fait pour les poutres droites en treillis ; coupons les trois barres ab, bc, ad par un plan XY normal à la fibre neutre, la tension de la barre ab devra faire équilibre à la résultante projetée sur la normale à la fibre neutre, de toutes les forces situées à gauche du plan de section, c'est-à-dire à l'effort tranchant dans le plan de section XY.

Il faut remarquer que les charges agissant sur l'arc seront réparties entre les différents nœuds ; par suite la ligne des pressions sera un polygone et entre les forces f qui est appliquée en a et f_1 qui est appliquée en b, nous aurons

un côté rectiligne $\alpha\beta$ de cette ligne des pressions ; de plus l'effort tranchant entre les deux points a et b sera

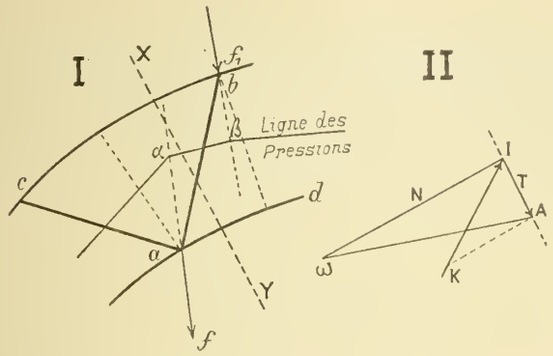


Fig. 433

maximum au point α, et on le trouvera sur le dynamique ainsi que nous l'avons déjà montré ; on considérera (fig. II) le rayon polaire ωA parallèle à $\alpha\beta$ et qui représente la résultante des forces situées à gauche de α. On décomposera cette force suivant la direction ωI normale à la section a et la direction AI parallèle à cette même section. IA est l'effort tranchant.

Menons maintenant par le point A une parallèle à ωI et par le point I une parallèle à la barre de treillis ab qui nous intéresse ; cette parallèle coupe la première au point K ; KI représente en grandeur, direction et sens la tension de la barre ab. On voit que dans le cas actuel, c'est une traction ; l'effort tranchant étant négatif. Si l'effort tranchant était positif, ce serait une compression.

Remarque. — On voit qu'un arc en treillis se calculera de la même manière qu'un arc à âme pleine. Il sera bon cependant, comme nous l'avons indiqué dans l'étude des poutres droites en treillis, pour l'évaluation des défigurations élastiques, de remplacer le module d'élasticité E, par un module réduit E'.

§ 7. — Arcs a sommiers encastrés

434. Courbe de poussée dans un arc à deux sommiers encastrés.

(*a*) *Préliminaires.* — On se donne un arc quelconque, à sommiers encastrés ou non ; on transforme l'arc en une poutre courbe, ce qui veut dire qu'on laisse son sommier d'extrémité libre de glisser sur la ligne des appuis, pourvu

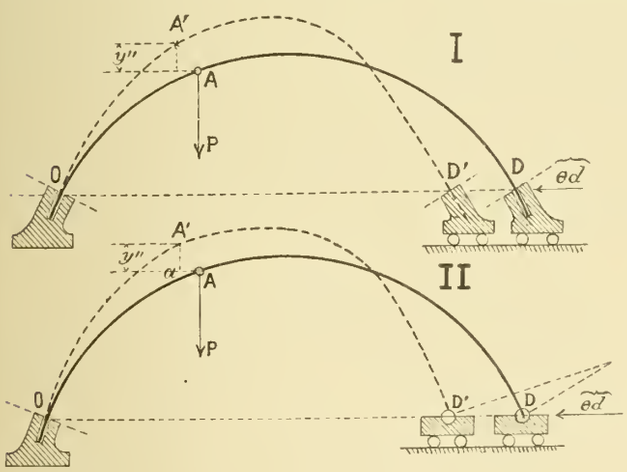


Fig. 434

toutefois que la fibre neutre soit, en ce sommier, assujettie aux mêmes conditions d'orientation que dans l'arc ; on exerce sur cette poutre courbe une poussée unitaire θ, qui défigure la fibre neutre et fait prendre à un quelconque de ses points A un déplacement en hauteur y''. Enfin on revient de la poutre courbe à l'arc. Cela posé :

(*b*) **Théorème.** — « Une charge P appliquée au point A « *de l'arc*, déterminera une poussée qui sera donnée, à un « facteur près, par le déplacement en hauteur, y'', que le « point A de la *poutre courbe* aurait pris sous l'influence « de la poussée θ. » (1).

Le théorème a été déjà démontré (v. n° 422) pour l'arc à deux rotules ; nous allons le démontrer pour un arc à deux sommiers encastrés (fig. 434-I) ; la démonstration serait la même pour un arc ayant un sommier encastré et l'autre à rotule (fig. II).

Tout d'abord convenons de prendre une poussée unitaire θ, *graphiquement* égale à la distance polaire d ; nous savons que dans ce cas la représentative des moments de poussée est la fibre neutre elle-même. Nous désignerons cette poussée par la double lettre $\widetilde{\theta d}$.

Cherchons quels sont les moments d'encastrement M_0 et M_1 que cette poussée θ développe aux sommiers de la poutre courbe (fig. 435). Si on les connaissait, on tracerait leur droite représentative M_0M_1 et les moments définitifs seraient mesurés, à l'échelle des moments, par les différences entre les ordonnées de la fibre neutre et celles de cette droite que nous nommerons avec M. **Maurice Lévy**, *la ligne de fermeture de l'arc*. Je dis que :

(*c*) **Lemme et ligne de fermeture.** — « La ligne de fer- « meture est la droite IJ qui joint les stabili-centres d'en- « castrement. »

(1) Cette proposition n'est qu'un corollaire du beau théorème général, dit : *de Réciprocité*, démontré par M. *Bertrand de Fontviolant* (compte-rendu de la Société des ingénieurs civils.)

Pour le démontrer il suffit de prouver que les ordonnées de chacun des moments trisecteurs N et N′ de cette droite, sont égales aux ordonnées δ^{μ_0} et δ^{μ_1} des stabili-centres d'encastrement. Démontrons-le pour un seul des deux, par exemple pour le moment trisecteur de droite N′ et prouvons que l'on a : $N' = \delta^{\mu_1}$.

Le théorème des moments trisecteurs, démontré aux n°s 197 et 287, s'applique également aux poutres courbes, il s'écrit

$$(1) \qquad N' = \mu \times \frac{\alpha_1^0}{\alpha_1^\mu}.$$

Il signifie que ce moment trisecteur N ne dépend que de la déviation angulaire α_1^0 que l'encastrement a pour mission de corriger sur le sommier qui est du même côté que lui et nullement de celle qu'il faut détruire sur l'autre sommier. Ce fait est à retenir parce qu'il généralisera la démonstration pour le cas où un seul sommier serait encastré.

La formule (1) exprime que ce moment trisecteur N′ est au moment unitaire μ, comme la déviation angulaire à détruire α_1^0 sur le sommier qui lui correspond est à la déviation angulaire α_1^μ, que le moment unitaire μ appliqué *uniformément* sur toute la pièce, produirait sur le même sommier. Cela étant rappelé :

α_1^0 dans la formule (1) nous est donné par le tableau de calcul de la page 392, colonne 12. On a, en remarqant que θ sera facteur dans tous les termes de la somme

$$\alpha_1^0 = -\frac{C}{L} = -\frac{\theta}{L}\sum\frac{yx}{I}\Delta S.$$

α_1^μ est égal à $\alpha_0^{\mu_1} + \alpha_1^{\mu_1}$, et serait donné par la colonne 18 dans laquelle on remplacera m' par sa valeur qui, en tant

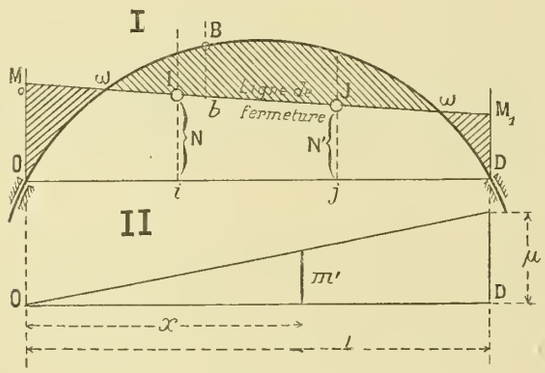


Fig. 435

qu'ordonnée du triangle unitaire de droite (fig. 435-II), a pour expression $m' = \mu x : L$; on aura donc, en mettant en facteur dans tous les termes, μ et L,

$$\alpha_1^\mu = A'' = \frac{\mu}{L}\sum\frac{x}{I}\Delta S,$$

d'où en remplaçant dans la valeur de N′, supprimant haut et bas les facteurs communs μ et L,

$$N' = -\theta\,\frac{\sum\frac{yx}{I}\Delta S}{\sum\frac{x}{I}\Delta S}.$$

Telle serait la valeur *vraie* de N′, en fonction de θ. Pour la représenter graphiquement il faut la diviser par la distance polaire d, afin qu'en la multipliant par d, nous retrouvions sa valeur vraie. Mais puisque nous avons pris θ graphiquement égal à d, on voit que cela revient à supprimer le facteur θ, et que N′ a pour valeur d'épure

$$N' = -\frac{\sum\frac{yx}{I}\Delta S}{\sum\frac{x}{I}\Delta S}.$$

Maintenant le tableau donne, colonnes 18 et 19, pour l'ordonnée du stabili-centre J d'encastrement de droite, en remplaçant m' par sa valeur qui est $m' = \mu x : L$, et supprimant, haut et bas, le facteur μ commun à tous les termes des sommes

$$\delta^{\mu_1} = \frac{B''}{A''} = \frac{\sum\frac{yx}{I}\Delta S}{\sum\frac{x}{I}\Delta S} = -N'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On aura de même $\delta^{\mu_0} = -N$. Nous devrions porter les ordonnées en sens contraire de celles de la fibre neutre, ce qui donnerait les symétriques des stabili-centres d'encastrement. Mais nous les porterons du même côté et nous compterons les moments définitifs à partir de cette ligne de fermeture IJ, jusqu'à la fibre neutre ; positivement quand la droite sera au-dessus de la fibre neutre, négativement quand elle sera au-dessous.

La ligne de fermeture IJ, prolongée jusqu'aux verticales des appuis, ferait connaître M_0 et M_1.

Nota. — Nous désignerons par y', au lieu de y, les ordonnées telles que Bb (fig. 435-I) de la fibre neutre comptées à partir de la ligne de fermeture.

(*d*) **Démonstration du théorème.** — Ce lemme étant admis, pour démontrer le théorème nous allons :

1° Supposer qu'un poids P est appliqué en un point A (la pièce étant un arc et non pas une poutre courbe) et calculer la poussée qui résulterait de cette charge ;

2° Calculer pour ce même point A l'ordonnée y'' de l'élastique-hauteur que la pièce (étant une *poutre courbe* et non plus un arc) prendrait sous l'influence des moments dont la représentative a été trouvée fig. 435 et qui est reproduite fig. 436 ;

3° Prouver que cette poussée est, à un facteur près, que nous déterminerons, représentée par l'ordonnée y'' de l'élastique-hauteur, ce qui justifiera, pour cette élastique, le nom de *courbe de poussée*.

Les calculs étant tout à fait analogues à ceux du n° 422, que l'on fera bien de relire, nous les expliquerons rapidement.

1° *Poussée.* — Le poids P (fig. 436) étant en A, d'abscisse X, donne une représentative des moments de charge représentée par la ligne brisée OA'D (fig. II). En un point B, d'abscisse x, le moment a pour ordonnée représentative B_1b_1 à laquelle répond un élément de surface, qui est :

$$\overline{B_1b_1} \times \Delta x = \frac{P(L-X)x}{L}\,\Delta x. \qquad \text{(comme au n° 422)}$$

Nous le déformons et nous l'eifions, ce qui donne $\overline{b_1B_1}$: EI cos ε ; après quoi cette quantité, considérée comme une force fictive élémentaire, est appliquée au point B de la fibre neutre (fig. I).

Elle contribue à la poussée définitive pour un élément que nous appellerons Δt, et c'est ici que la démonstration diffère de celle du n° 422.

Nous avons vu dans le calcul graphique des arcs à sommiers encastrés (v. n° 428 *bis a*) que T étant le stabili-centre de poussée, P celui de charge et IJ la ligne de fermeture (fig. 429 *bis* I), la poussée se déterminait en fonction 1° des distances TT' et PP' des points T et P à la ligne IJ, 2° de la surface $\alpha_0^p + \alpha_1^p$, de la courbe à cheval des moments de charge déformés-eïfiés ; 3° de la surface $\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta$ de la courbe à cheval de poussée.

Dans le cas actuel nous avons une charge infiniment petite, appliquée en B (fig. 446), c'est donc ce point B qui, pour cette charge, joue le rôle de stabili-centre. Par conséquent dans la formule du n° 428 *bis* nous remplacerons PP' par y', ordonnée relative du point B par rapport à la ligne de fermeture et $\alpha_0^p + \alpha_1^p$ par $(B_1b_1 : EI \cos\varepsilon)\,\Delta x$; dès lors dans la formule (1) du n° 428 *bis*, qui était

$$t = \theta \times \frac{PP'}{TT'} \times \frac{\alpha_0^p + \alpha_1^p}{\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta},$$

en remplaçant t par Δt, PP' par l'ordonnée relative y', et $\alpha_0^p + \alpha_1^p$ par la valeur ci-dessus, il vient :

$$\Delta t = \theta \times \frac{y'}{TT'} \times \frac{P(L-X)x}{L(\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta)EI\cos\varepsilon}\,\Delta x.$$

Remarquons que $Tt \times (\alpha_0^\theta + \alpha_1^\theta)$ ce serait l'écart de sommier λ^θ que la poussée θ produirait sur la poutre courbe supposée à deux rotules, par conséquent le dénominateur du second facteur pourrait s'écrire $\lambda^\theta (TT' : Tt)$.

C'est d'ailleurs l'écart de sommier que la poussée θ produirait sur la poutre courbe ayant ses sommiers encastrés et non plus à rotules, en le désignant par λ'^θ, c'est-à-dire en écrivant

$$\lambda'^\theta = \lambda^\theta (TT' : Tt), \qquad \text{nous aurons}$$

$$(1) \qquad \Delta t = \theta \times \frac{y'}{\lambda'^\theta} \times \frac{P(L-X)x}{L(EI\cos\varepsilon)}\,\Delta x.$$

2° *Elastique de poussée.* — Au droit du même point B, le moment fléchissant a pour valeur $\theta y'$; après sa déformation et après son eification il donne un élément de surface qui est $(\theta y' : EI\cos\varepsilon)\,\Delta x$. Il contribue pour un élément

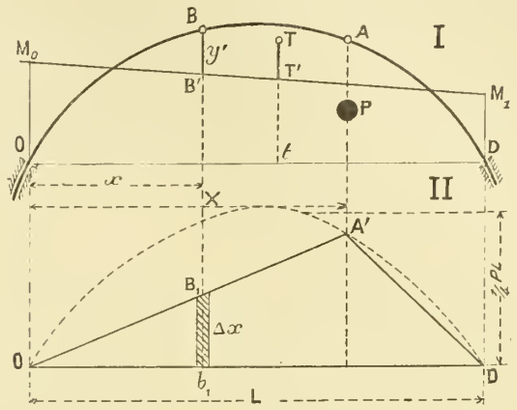


Fig. 436

que nous désignerons par ΔY, au déplacement en hauteur y'' du point A, et exactement comme au n° 422, on aura

$$(2) \qquad \Delta Y = \frac{\theta . y'}{EI\cos\varepsilon} \times \frac{(L-X)x}{L}\,\Delta x.$$

On conclut des formules (1) et (2),

$$(3) \qquad \Delta t = \Delta Y \times \frac{P}{\lambda'^\theta}.$$

En totalisant les éléments de poussée Δt et les éléments de hauteur ΔY, le facteur $(P : \lambda'^\theta)$ étant commun à tous les termes on aura, pour la poussée définitive t produite par le poids P arrivé en A, et pour l'ordonnée y'' de l'élastique-hauteur de poussée répondant à ce même point A,

$$(4) \qquad t = \frac{y''}{\lambda'^\theta} \times P.$$

Le théorème est donc démontré et le coefficient de proportionnalite $(y'' : \lambda'^\theta)$ résulte de la démonstration.

(*e*) **Tracé de la courbe de Poussée.** — On pourrait la tracer directement par un funiculaire construit à l'aide des ordonnées relatives y' ; ou bien on pourrait l'obtenir en combinant, par addition algébrique, trois élastiques déjà connues, savoir :

1° L'élastique *positive* due à la poussée seule : c'est la courbe ou le polygone de la fig. 422 que nous avons désignée déjà sous le nom de courbe de poussée pour l'arc à deux rotules. Nous la prenons telle qu'elle est, puisque nous avons précisément θ graphiquement égal à d.

2° L'élastique *négative* produite par le moment d'encastrement à l'origine M_0, moment que l'épure précédente nous a fait connaître. Nous la déduirons de l'élastique μ_0 (v. fig. 421-III) en amplifiant les ordonnées de cette dernière dans le rapport $M_0 : \mu$.

3° L'élastique *négative* produite par le moment d'encastrement à l'extrémité M_1 que nous déduirons de l'élas-

tique μ_1 (v. fig. 421-IV) en amplifiant ses ordonnées dans le rapport $M_1 : \mu$.

L'élastique-hauteur finale se déduit de ces additions algébriques, et, comme vérification, son côté initial et son côté final (ou bien sa tangente initiale et sa tangente finale, si c'est une courbe), doivent être confondus avec la corde de l'arc puisque les moments d'encastrement M_0 et M_1 ont eu précisément pour fonction de détruire les déviations angulaires aux sommiers que la poussée seule aurait produites sur la pièce à deux rotules.

435. **Lignes d'influence dans un arc à deux sommiers encastrés.** — La question se traite exactement de la même manière que pour l'arc à deux rotules (v. n°s 424 et 425). On se servira de la nouvelle courbe de poussée comme on s'était servi de l'ancienne. Il n'y aura rien de changé ni dans les calculs ni dans les traces.

436. **Courbe de poussée et lignes d'influence dans un arc à un seul sommier encastré.** — Supposons que ce soit le sommier d'origine qui possède un encastrement. On démontrera comme dans le cas précédent les points suivants :

1° La ligne de fermeture (v. fig. 428 *bis* II, page 390) est la droite DI qui joint le sommier non encastré et le stabilicentre d'encastrement de l'autre sommier. Cela veut dire que si (v. fig. 434-II) on exerçait une poussée $\widetilde{\theta = d}$ sur la poutre courbe, la représentative du moment d'encastrement qui en serait la conséquence serait la droite DI.

2° Si l'on construit l'élastique-hauteur qui est la conséquence de cette poussée, l'ordonnée y'' d'un quelconque de ses points, A, donnerait, à un facteur près, la poussée t qu'une charge P, placée au même point A, déterminerait dans l'arc et l'on aurait :

$$t = P \times \frac{y''}{\lambda'^{\theta}}.$$

λ'^{θ} étant l'écart de sommier produit sur la poutre courbe, par la poussée θ.

Cette courbe des déplacements en hauteur y'' sera la *courbe de poussée de l'arc*.

On s'en servira, comme dans les autres cas, pour déterminer les lignes d'influence de moments fléchissants, d'efforts tranchants et d'efforts normaux.

Avertissement. — Dans le chapitre II qui va suivre, nous allons donner des applications simples des théories qui viennent d'être exposées. Ce ne sont pas de véritables projets que nous allons traiter mais plutôt des *mises-en-train* de projets. Nous étudierons :

1° Un arc avec deux sommiers à rotule et une charnière à la clé (ou arc à trois rotules) ;

2° Un arc avec deux sommiers à rotules ;

3° Un arc avec deux sommiers encastrés.

CHAPITRE II

APPLICATIONS

§ 1. — Arc a trois rotules

437. **Données.** — (*a*) **Données de figure.**

Portée L = 30 mètres d'axe en axe des rotules des sommiers.

Flèche H = 6 mètres.

Fibre neutre en arc de cercle.

Ame pleine ; de hauteur *b* constante et égale à $0^{m},750$.

Symétrique et symétriquement chargé, ce qui permettra de n'étudier qu'une moitié de l'arc, celle de gauche par exemple.

La *passerelle* pour piétons, AB, que l'arc a pour mission de supporter, est rattachée à l'arc par quatre *jambettes* CCCC (fig. 4), espacées de 5 mètres en 5 mètres. De plus elle repose, au milieu, sur le sommet de l'arc.

(*b*) **Données de charge.** — *Poids propre de l'arc* : 1.500 k. par mètre courant de sa corde, représentant une charge totale, *uniformément répartie*, de 45.000 k.

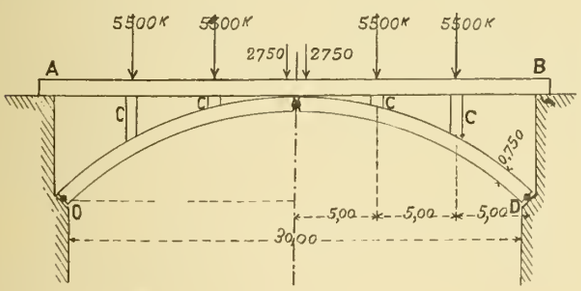


Fig. 437

Poids de la passerelle, y compris sa surcharge, 1.100 k. par mètre courant, ce qui représente pour chaque jambette courante $5 \times 1.100 = 5.500$ k. et pour celle de la clé seulement la moitié, soit 2.750 k., puisque nous n'étudions que la moitié de l'arc.

(*c*) **Moments de charge** (fig. 438).

On prend pour distance polaire $d = 1/2$ L, et on construit (fig. II et I) par la méthode Collignon, en $Oa_1b_1d_1r_1$, le polygone funiculaire des charges transmises par les jambettes. (En pointillé.)

En OP (également pointillé) on dessine la parabole des moments de charge uniformément répartie ; sa hauteur au sommet IP est prise, on le sait, égale au quart de la charge totale, mesurée à l'échelle des forces ; on a

$$IP = \frac{45000}{4} = 11250 \text{ k.}$$

On ajoute ces deux représentatives et l'on a en $O\beta\delta\rho$ la représentative totale des moments de charge.

438. **Equilibre général et équilibre moléculaire de l'arc.** — (*a*) **Poussée.** — Nous avons vu, dès le début de notre étude sur les arcs (v. n° 412-*d*), que dans un arc à trois rotules la poussée *t* est déterminable *statiquement*, c'est-à-dire sans faire intervenir les déformations élastiques. Chaque charnière ou chaque rotule a pour conséquence que le moment définitif, c'est-à-dire celui qui résulte de la différence entre le moment de charge et le moment de la poussée, doit y être nul.

Ecrivant qu'il en est ainsi pour la charnière R ; désignant par *t* la poussée inconnue, par M le moment de charge à la charnière, par H la flèche de l'arc, on aura l'équation

$$M - t \times H = 0, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{M}{H}.$$

$M = I\rho$ (fig. I), mesuré à l'échelle des forces, donne $19^{t},670$ k., et comme la distance polaire est $d = 15$ m., on a $M = 19670 \times 15$; de plus, $H = 6$ m., donc

$$t = \frac{19670 \times 15}{6} = 49^{t},175 \text{ k.}$$

(*b*) **Courbe des pressions.** — 1re *Méthode.* — On réduit toutes les ordonnées, telles que $d\delta$, du funiculaire des moments de charge, dans le rapport constant $I\rho : IR$, et l'on obtient ainsi en $OA_1B_1C_1D_1E_1R$ la courbe des pressions (v. n° 431). La figure ci-contre montre comment, à l'aide d'obliques parallèles entre elles, on peut faire cette réduction.

2e *Méthode.* — On sait que la courbe de pression est un funiculaire $\widetilde{dt}$ des moments de charge, c'est-à-dire un funiculaire construit avec une distance polaire *graphiquement* égale à la poussée. Dès lors :

1° Prenons (fig. III) une force verticale R_3H égale à la réaction, sur l'appui, de toutes les charges. A cause de la symétrie, cela donnera la moitié du total des charges, soit $1/2(45000 + 5 \times 5500) = 36250$ k ;

2° Au point R_3 menons une horizontale que nous prendrons en $R_3\omega$ égale à la poussée, soit 49175 k. mesurés à l'échelle des forces. Le point ω sera le pôle du dynamique $\widetilde{dt}$ qui répond au polygone des pressions;

3° Calculons les charges qui incombent à chacun des centres de sections A, B, C, D,... de l'arc que l'on veut étudier. Ces points sont au nombre de six. Ceux tels que A, C, E qui ne sont pas sous les jambettes ne supportent que le poids propre de l'arc, c'est-à-dire chacun 3 750 k. Les autres supportent la même charge, 3 750 k., plus 5 500 k. transmis par la jambette ;

4° Nous portons (fig. III) ces forces bout à bout, et de haut en bas, à partir du point H, et leur total doit nous ramener au point R_3. Il convient de ne pas porter en bloc $5500 + 3750$, mais au contraire séparément ; nous verrons que cela est nécessaire pour la détermination future des efforts tranchants ;

5° Nous menons les rayons polaires ωH, ωA_2..., ωB_2..., etc. dessinés en pointillé sur la fig. III, et, enfin,

6° En partant du point O (fig. I) et menant les côtés OA_1, A_1B_1, B_1C_1, etc..., parallèles à ces rayons polaires, et se recoupant sur les verticales des points A, B, C..., nous obtenons le polygone des pressions, lequel, à titre de vérification, doit se fermer sur la charnière R.

(*c*) **Moments fléchissants.** — Le moment fléchissant en un point quelconque, C, par exemple, est égal au produit du segment d'ordonnée CC_1, compris entre la fibre neutre et la ligne des pressions, par la distance polaire de cette ligne.

Le segment d'ordonnée CC_1, mesuré à l'échelle des forces, vaut 600 k.; la distance polaire évaluée en longueur, est $29^m,50$; le moment en C est donc égal à

$$600 \times 29,50 = 17\,700 \text{ km.}$$

Nota. — Comme en tous les points, la courbe des pressions est au-dessous de la fibre neutre, les moments fléchissants sont partout négatifs, c'est-à-dire qu'ils tendent à faire fermer l'arc en rapprochant les sommiers, la semelle d'intrados étant la plus comprimée.

(*d*) **Efforts normaux et efforts tranchants.** — Pour déterminer la pression normale et l'effort tranchant dans la section C, il faut mener la tangente au point C_1 à la courbe des pressions; cette tangente représente la ligne d'action de la résultante des forces agissant à gauche de la section C; menons sur le dynamique (fig. III) la droite ωC_2 parallèle à cette tangente, c'est un des rayons polaires tracés tout à l'heure ; ωC_2, mesurée à l'échelle des forces, donne la grandeur de cette résultante. Nous la décomposons en deux forces, l'une C_2J, parallèle à la section C, l'autre ωJ, normale à cette section ; la force C_2J est l'effort tranchant, la force ωJ est l'effort normal agissant sur la section C.

Nous avons dessiné à plus grande échelle (fig. V) ce qui se passe au point D, qui est situé sous une jambette. A gauche de ce point, la courbe des pressions a une tangente $D_1\theta$, à droite la tangente est $D_1\theta'$ différente de $D_1\theta$; les rayons polaires parallèles à ces deux tangentes sont respectivement (fig. III) ωD_2 et ωD_3 et la distance D_2D_3 est précisément égale à 5500 k., valeur de la force appliquée à la section D et provenant de la jambette.

A gauche de la section D, la pression normale sera de 51400 k.; l'effort tranchant de 4500 k.; à droite de cette section, la pression normale sera de 50160 k., l'effort tranchant, devenu négatif, sera de 900 k.

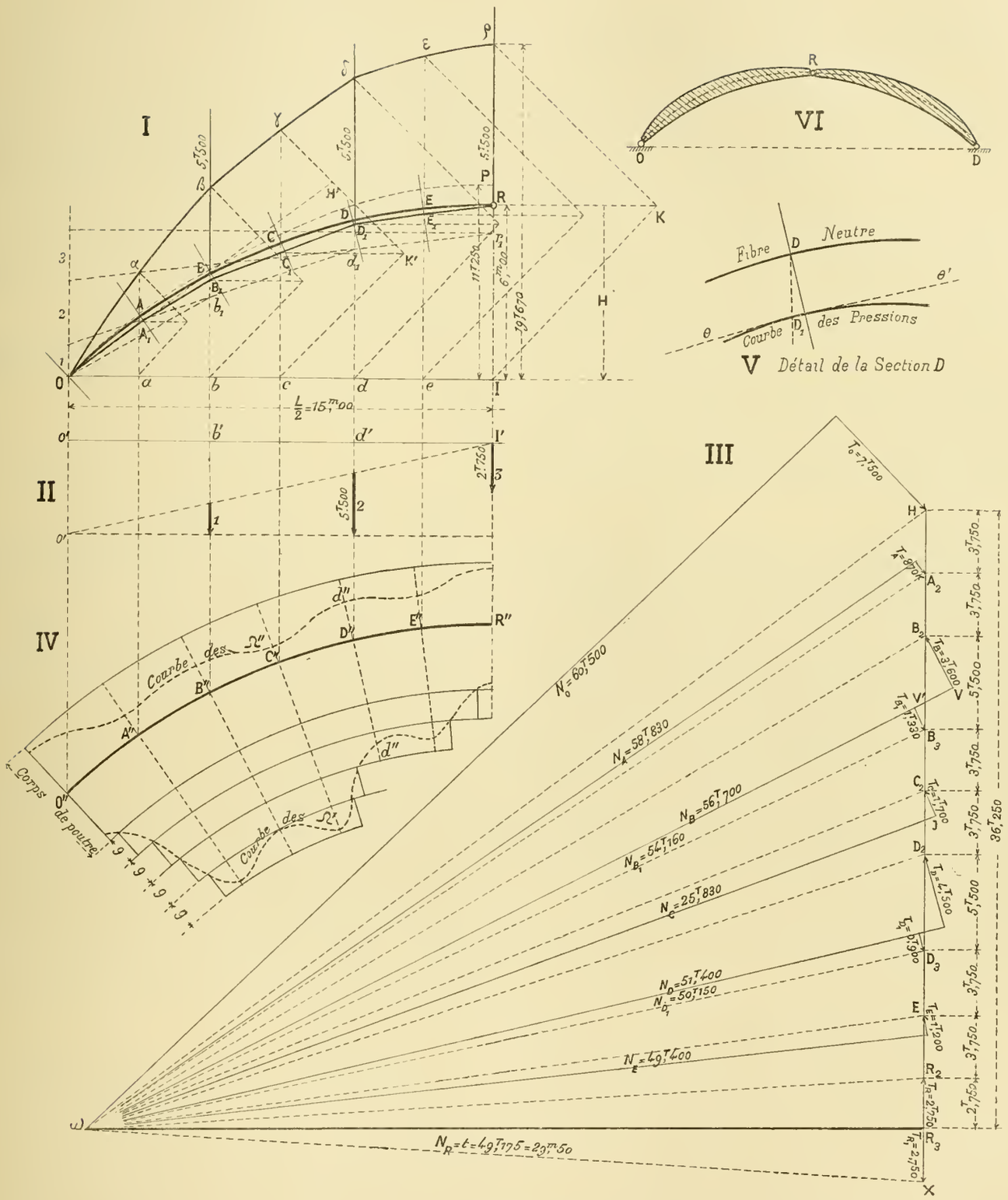
Remarquons encore qu'au point R, sur la charnière du sommet, se produit un fait analogue, l'effort tranchant étant positif à gauche de ce point et égal à 2750 k., tandis qu'à droite, il est négatif et de même valeur ; la différence entre ces deux efforts représente la force de 5500 k. appliquée au point R.

439. Calcul des sections. — Théorie.

Comme pour les poutres droites d'une certaine importance, un arc sera en général constitué au moyen de tôles et de cornières ; le corps de poutre sera formé d'une âme ou d'un treillis et de quatre cornières, s'il s'agit d'un profil double T ; les cornières seront les mêmes dans toute la longueur de l'arc, la variation de la section étant obtenue, s'il y a lieu, au moyen de semelles, d'épaisseurs autant que possible égales entre elles, qui permettront de se rapprocher d'un solide d'égale résistance.

On considérera l'âme comme ne devant résister qu'à l'effort tranchant, les tables de la section devant résister au moment fléchissant et à l'effort normal.

(*a*) **Première approximation.** — Pour une première approximation, nous emploierons pour le moment d'inertie la formule simplifiée $I = 1/2\,\Omega b^2$, dans laquelle Ω est la section d'une table, et b la hauteur de la section.



ECHELLES

Longueurs $0^m,005$ pour 1 mètre. | Forces $0^m,003$ pour 1 tonne. | Surfaces des sections (fig. IV) $0^m,0002$ pour 1 cent².

Fig. 438

Il en résulte $I : v = \Omega b$.

La formule de l'effort fibraire maximum devient alors :

$$p = \frac{N}{2\Omega} + \frac{M}{\Omega b},$$

d'où l'on tire en faisant $p = R$ résistance de sécurité

$$\Omega = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{2} + \frac{M}{b}\right).$$

On connaît dans chaque section M, N et b ; par suite, on pourra trouver Ω et dresser un tableau des valeurs ainsi obtenues pour les différentes sections.

Nous allons voir tout-à-l'heure que la section de l'arc ne doit pas être symétrique ; l'une des tables, la table inférieure, aura une surface plus grande que Ω, l'autre, la table supérieure, aura une surface plus petite.

On formera alors des tables donnant un corps de poutre répondant à la plus petite section trouvée ; des semelles supplémentaires réparties par un procédé graphique analogue à celui que nous avons employé dans le cas des poutres droites (v. n° 257) permettront d'obtenir en chaque point la section calculée.

(*b*) **Projet définitif.** — De l'étude qui vient d'être faite de l'avant-projet résulteront des dimensions provisoires à donner aux différentes parties de l'arc, et, par suite, des poids qui nous permettront de corriger les charges propres adoptées au début. Une nouvelle épure fournira des valeurs nouvelles pour les moments fléchissants, pour les pressions normales et pour les efforts tranchants, valeurs au moyen desquelles nous calculerons les sections à donner à l'arc en ses différents points ; elles devront différer peu des sections d'avant-projet. Si nous les considérons comme définitives nous calculerons, mais alors exactement, dans chaque section de l'arc les valeurs de la surface 2Ω et du moment, d'inertie I, et nous appliquerons les formules exactes de l'effort fibraire pour la fibre la plus comprimée, et pour la fibre la moins comprimée, qui pourra même, dans certains cas, être tirée.

En aucun point, l'effort fibraire ne devra dépasser la résistance de sécurité.

(*c*) **Dissymétrie à apporter aux semelles.** — Soit p' l'effort unitaire supporté par la fibre la plus comprimée, et p'' celui supporté par la fibre la moins comprimée, laquelle peut, dans certains cas, être tirée : on a, d'après les formules connues :

$$p' = \frac{N}{2\Omega} + \frac{Mv}{I}, \qquad \text{et} \qquad p'' = \frac{N}{2\Omega} - \frac{Mv}{I}.$$

Et comme nous admettons, pour une première approximation, que $I : v = \Omega b$, en faisant la substitution on obtient les trois formules :

$$(1) \qquad p' = \frac{N}{2\Omega} + \frac{M}{\Omega b},$$

$$(2) \qquad p'' = \frac{N}{2\Omega} - \frac{M}{\Omega b} \qquad \text{d'où} \qquad p' + p'' = \frac{N}{\Omega}.$$

Faut-il que les deux tables aient la même surface Ω ? S'il en était ainsi, comme p' est plus grand que p'' il en résulterait que si la première table travaillait à la résistance de sécurité ($p' = R$), la seconde travaillerait beaucoup moins et que la matière ne se trouverait pas employée avec économie.

Au contraire, si nous proportionnons les surfaces des tables aux efforts p' et p'', que nous venons de trouver, nous serons très voisins de faire travailler les fibres extrêmes sous le même effort unitaire lequel pourra, et même devra, être la résistance de sécurité R.

Soit Ω' la surface de la table qui reçoit le plus grand effort, et Ω'' la surface de l'autre : nous écrirons les deux relations primordiales :

$$(3) \qquad \Omega' + \Omega'' = 2\Omega, \qquad \text{et}$$

$$(4) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega''} = \frac{p'}{p''}.$$

Cela posé, nous considérons deux cas.

1er Cas. — Les semelles sont toutes deux comprimées. On reconnaît ce cas à ce que p'' est positif, ce qui veut dire que :

$$\frac{N}{2\Omega} - \frac{M}{\Omega b} > 0, \qquad \text{d'où} \qquad N > \frac{2M}{b} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2M}{Nb} < 1$$

Entre les 4 équations (1), (2), (3) et (4) on élimine d'abord p' et p'', puis on les résout par rapport à Ω' et Ω'' et l'on en tire :

$$(A) \qquad \Omega' = \Omega\left(1 + \frac{2M}{Nb}\right) \qquad \text{et} \qquad \Omega'' = \Omega\left(1 - \frac{2M}{Nb}\right).$$

En donnant aux tables les surfaces Ω' et Ω'' nous serons dans de meilleures conditions qu'en les faisant égales, chacune à Ω, et nous nous rapprocherons beaucoup d'un solide d'égale résistance. Néanmoins il faut remarquer que nous n'avons plus tout à fait la même pièce qu'au début. Du moins la fibre neutre, c'est-à-dire le lieu géométrique des centres de gravité des sections, est changée ; en effet : soit v' et v'' les distances des fibres extrêmes d'une section à son centre de gravité, nous aurons $v' + v'' = b$ et $v' : v'' = \Omega'' : \Omega$, d'où :

$$v' = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{2M}{Nb}\right) \qquad \text{et} \qquad v'' = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{2M}{Nb}\right).$$

On reconnaîtra facilement, en se reportant aux formules du n° 413-*d*, que ce nouveau centre de gravité est précisément le centre de pression. D'où il résulte que la dissymétrie à apporter aux semelles, d'après les formules précédentes, revient à créer à la pièce une nouvelle fibre neutre qui coïncide avec la courbe des centres de pression, et nous avons vu que, s'il en est ainsi, l'arc est dans les meilleures conditions possibles ; il devient un *arc sans flexion*.

2e Cas. — Une des semelles est comprimée, l'autre est tirée. — On reconnaît ce cas à ce que p'' est négatif, ce qui veut dire que :

$$\frac{N}{2\Omega} < \frac{M}{\Omega b} \quad \text{d'où} \quad N < \frac{2M}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{Nb}{2M} < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2M}{Nb} > 1.$$

Pour le calcul des dimensions des fers ce qu'il importe de connaître ce sont les valeurs absolues des efforts fibraires. Si p'' est la valeur absolue de l'effort unitaire de traction, les équations (1) et (2) deviennent :

$$(1') \qquad p' = \frac{N}{2\Omega} + \frac{M}{\Omega b},$$

$$(2') \qquad p'' = \frac{M}{\Omega b} - \frac{N}{2\Omega} \qquad \text{et} \qquad p' - p'' = \frac{N}{\Omega}.$$

En posant encore

$$(3) \qquad \Omega' + \Omega'' = 2\Omega. \qquad \text{et}$$

$$(4) \qquad \frac{\Omega'}{\Omega''} = \frac{p'}{p''}.$$

En éliminant p' et p'' et résolvant, on tire :

$$(B) \qquad \Omega' = \Omega\left(1 + \frac{Nb}{2M}\right) \qquad \text{et} \qquad \Omega'' = \Omega\left(1 - \frac{Nb}{2M}\right).$$

Les distances v' et v'' seront alors

$$v' = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{Nb}{2M}\right) \qquad \text{et} \qquad v'' = \frac{b}{2}\left(1 + \frac{Nb}{2M}\right).$$

Le centre de gravité de la nouvelle section, avec tables dissymétriques, n'est plus ici le centre de pression.

Faisons l'application de ce que nous venons d'établir, au calcul des sections de l'arc étudié ci-dessus.

440. Application à l'arc à trois rotules.

(*a*) **Calcul des sections.** — Nous avons réuni dans le tableau ci-dessous les valeurs des efforts relatifs aux sections du demi-arc de gauche et des surfaces correspondantes. Les deux demi-arcs seront construits avec les mêmes dimensions.

Les surfaces sont calculées par les formules :

$$\Omega = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{2} + \frac{M}{b}\right) \qquad \text{avec} \qquad R = 6 \times 10^6.$$

Comme partout $2M : Nb$ est < 1, en aucun point, les fibres ne seront tirées, et nous emploierons les formules A,

$$\Omega' = \Omega\left(1 + \frac{2M}{Nb}\right), \qquad \text{et} \qquad \Omega'' = \Omega\left(1 - \frac{2M}{Nb}\right).$$

DÉSIGNATION des SECTIONS	MOMENTS FLÉCHISSANTS		Efforts normaux N.	Efforts tranchants T.	Section (1) moyenne d'une table $\Omega = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{2} + \frac{M}{b}\right)$	RÉPARTITION DISSYMÉTRIQUE		
	Ordonnées du funiculaire à l'échelle des forces	Moments en kilog. mèt.				Valeurs de $\frac{2M}{Nb}$	$\Omega' = \Omega\left(1 + \frac{2M}{Nb}\right)$	$\Omega'' = \Omega\left(1 - \frac{2M}{Nb}\right)$
0	0	0	60500	— 7500	0,005042	0	0,005042	0,005042
A	— 580	— 17110	58830	— 870	0,008705	0,77	0,015408	0,002002
B gauche	— 500	— 14750	56700	+ 3600	0,008003	0,69	0,013525	0,002481
B droite			54160	— 1330	»			
C	— 600	— 17700	52830	+ 1700	0,008336	0,88	0,015672	0,001000
D gauche	— 300	— 8850	51400	+ 4500	0,006250	0,46	0,009125	0,003375
D droite			50160	— 900	»			
E	— 340	— 10030	49400	+ 1200	0,006345	0,54	0,009771	0,002919
R gauche	0	0	49175	+ 2750	0,004098	0	0,004098	0,004098
R droite				— 2750				

(1) Les sections Ω, Ω', Ω'' sont rapportées au mètre carré.

La poutre sera à section double T ; nous constituerons le corps de poutre par une âme pleine de 8mm d'épaisseur, quatre cornières de $0.100 \times 0.100 \times 0.008$ et deux semelles de 0.0065 d'épaisseur et 0.280 de largeur.

Nous ne tiendrons compte, dans le calcul des sections, que des portions d'âme comprises entre les cornières, le reste devra résister à l'effort tranchant.

Nous aurons ainsi pour la section d'une table :

2 cornières de $0,100 \times 0,100$ sur 0,008.	0,003040
Un bout d'âme de 0,100 sur 0,008. . . .	0,000800
Une semelle de 0,280 sur 0,065.	0,001820
Total.	0,005660

Cette section est plus forte que la plus petite des sections trouvées dans le tableau précédent ; mais si nous voulions observer rigoureusement les indications que fournit ce tableau, nous aurions un corps de poutre beaucoup trop

maigre, et des semelles énormes ; de plus la dissymétrie de la poutre serait trop accentuée.

La section la plus grande d'une table étant de 0,015672, la différence $0{,}015672 - 0{,}005660 = 0{,}010012$ sera obtenue au moyen de semelles dont l'épaisseur totale sera $\frac{0{,}010012}{0{,}280} = 0{,}0357$.

Nous prendrons quatre semelles de 0,009 dont la surface totale sera de $0{,}280 \times 0{,}036 = 0{,}010080$, c'est-à-dire un peu plus que ce qu'il nous faut.

(*b*) **Répartition des semelles.**— Dessinons la fibre neutre (fig. 438-IV) et menons les normales aux points O″ A″ B″ etc., portons sur ces normales, du côté de l'extrados, des longueurs proportionnelles à Ω'' et du côté de l'intrados des longueurs proportionnelles à Ω' ; en joignant les points ainsi obtenus par des courbes (figurées en pointillé sur l'épure), nous aurons deux représentatives polaires des surfaces Ω' et Ω''.

Représentons à la même échelle les surfaces qui correspondent : 1° au corps de poutre ; 2° aux semelles et traçons des cercles concentriques qui sont les représentatives de ces surfaces, nous obtiendrons ainsi aux points d'intersection de la courbe Ω' et des cercles représentant les épaisseurs de semelles les points où ces semelles devront être arrêtées.

Nota. — Sur la fig. IV, les surfaces Ω, Ω', Ω'', ... ainsi que celles afférentes aux semelles, sont représentées à l'échelle de $0^m{,}0002$ pour 1 cent. carré.

(*c*) **Vérification des efforts tranchants.** — Le plus grand effort tranchant se produit dans la section d'appui et a pour valeur 7.500 k.

La section ayant 0,750 de hauteur, en retranchant la hauteur des cornières et des semelles formant le corps de poutre, il reste :

$$0{,}750 - 2(0{,}100 + 0{,}0065) = 0{,}537,$$

qui représente la hauteur de la portion d'âme comprise entre les deux tables de la pièce ; sa section est :

$$0{,}537 \times 0{,}008 = 0{,}002696.$$

L'effort de tranchage par millimètre carré est donc égal à

$$\frac{7500}{2696} = 2^k{,}781,$$

valeur inférieure à la résistance de sécurité au cisaillement, qui est pour le fer de $4^k{,}800$ par millimètre carré.

(*d*) **Données pour une deuxième étude.** — Pour une deuxième étude, nous admettrons que les sections que nous venons de calculer sont exactes ; nous pourrons alors chercher en chacun des points O, A, B, C, etc. les poids correspondant à ces sections.

Après avoir modifié, d'après ces indications, les poids admis dans l'étude d'avant-projet, nous rechercherons les réactions des appuis, et les moments de charges, puis la poussée qui seront les conséquences de ces modifications ; nous tracerons la nouvelle ligne des pressions et, après avoir déterminé les efforts dans chaque section, nous referons par la même méthode le calcul des surfaces, qui ne devront pas trop différer de celles que nous avons trouvées dans l'avant-projet.

Il en résultera une nouvelle répartition des semelles, que nous considérerons, cette fois, comme définitive.

Nous calculerons alors les sections employées et les moments d'inertie, et nous appliquerons les *formules exactes* des efforts fibraires à l'intrados et à l'extrados, pour vérifier qu'en aucun point la résistance de sécurité n'est sensiblement dépassée.

Nota. — Nous avons pris une hauteur constante *b*, pour l'arc. Il résulte de cette étude qu'il eût mieux valu lui donner les profils d'intrados et d'extrados représentés fig. VI.

§ 2. — Arc a deux rotules

441. Données.

(*a*) **Données de figure** (fig. 439). — La portée $L = 30^m$, la flèche $H = 6^m$ sont les mêmes que dans l'exemple précédent. La fibre neutre est le même arc de cercle, seulement la hauteur *b*, des sections, ira en croissant des sommiers jusqu'à la clef. Elle sera de 0,50 aux naissances et de 1,10 à la clef. Nous admettrons que la variation de la hauteur est proportionnelle à la longueur de la fibre neutre ; par suite (fig. 439-II), si nous prenons comme axe des X en O′R′ la fibre neutre développée, la loi de variation de la hauteur sera représentée par la droite ayant pour ordonnée à l'origine $0^m{,}50$ et pour ordonnée à l'extrémité $1^m{,}10$, ce qui nous donnera la valeur de *b* pour chaque section.

(*b*) **Données de charges et moments de charges.** — Ce sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Le funiculaire des moments de charge (poids propre provisoire et surcharge due à la passerelle), le même que fig. 438, est représenté (fig. I) en $O\alpha\beta\ldots\rho$ avec la distance polaire *provisoire*

$$d = 1/2\ L = 15^m.$$

Nous considérons 1/2 L comme distance polaire provisoire parce que, lorsque nous connaîtrons la poussée *t*, c'est elle (ou plutôt c'est une distance graphiquement égale à cette poussée) que nous prendrons pour distance polaire $\overline{dt}$, afin de tracer la courbe des pressions $OA_1B_1C_1R_1$.

(*c*) **Données de constitution.** — *Moments d'inertie.* — Nous avons vu que pour trouver les constantes de l'arc nous

avions besoin de former pour chaque section les quantités M : EI, y : EI,..., etc... Or, nous ne connaissons pas les moments d'inertie I, puisque les éléments de chaque section sont précisément les inconnues du problème. C'est pourquoi nous sommes obligés, comme toujours, d'opérer par méthode de *fausse position*, c'est-à-dire de faire des hypothèses provisoires.

Soit Ω la section, inconnue d'ailleurs, d'une table, nous prendrons pour valeur approchée du moment d'inertie :

$$I = \frac{\Omega b^2}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{EI} = \frac{2}{E\Omega b^2},$$

et, pour une première étude, nous supposerons Ω, constant. E l'étant également, nous pourrons, dans nos calculs des constantes, laisser de côté le facteur constant 2 : EΩ et prendre seulement les quantités M : b^2, y : b^2... ainsi que le prévoit le tableau de calcul du n° 429 (page 392).

442. Recherche des constantes de l'arc. — La pièce n'étant pas encastrée nous n'avons pas à nous occuper des moments aux sommiers M_0 et M_1, car ils seront nuls. Notre seule inconnue d'équilibre général sera donc la poussée t.

(*a*) **Méthode algébrique.** — Si, pour la déterminer, nous employons la méthode algébrique nous n'aurons qu'à écrire que l'écart de sommier λ^t produit par la poussée inconnue t, est égal, et de ligne contraire, à l'écart de sommiers λ^p, produit par les charges connues :

$$\lambda^t = \lambda^p, \qquad \text{ou} \qquad \lambda^t = \lambda^p \pm E\tau L,$$

si nous tenons compte de la dilatation calorifique.

Les seules constantes à déterminer seront donc

$$\lambda^0 = 0 \sum \frac{y^2}{I} \Delta S \qquad \text{et} \qquad \lambda^p = \sum \frac{My}{I} \Delta S \pm E\tau L.$$

(*b*) **Dilatation calorifique.** — On se rappelle que nous introduisons, en facteur du terme correctif de température, le module d'élasticité E, parce que ayant pris I pour le dénominateur, au lieu de EI, nous avons ainsi des sommes qui sont E fois trop grandes et que pour garder la proportion, il faut aussi rendre E fois plus grande la dilatation calorifique de la corde de l'arc.

Si au lieu de I, en dénominateur, nous prenons b^2, après avoir admis que $I = 1/2\, \Omega b^2$, il faudra, pour la même raison, multiplier le terme de dilatation par $1/2\, \Omega$.

Or, nous ne connaissons pas encore Ω : nous ne pouvons donc pas introduire ce facteur. C'est pourquoi, dans une première étude, il ne faut pas tenir compte de la dilatation calorifique. On ne le fait que pour une seconde étude, c'est-à-dire lorsque l'on a déjà des valeurs à peu près arrêtées, non seulement pour les valeurs relatives des moments d'inertie I de chaque section, mais encore pour leurs valeurs *absolues*.

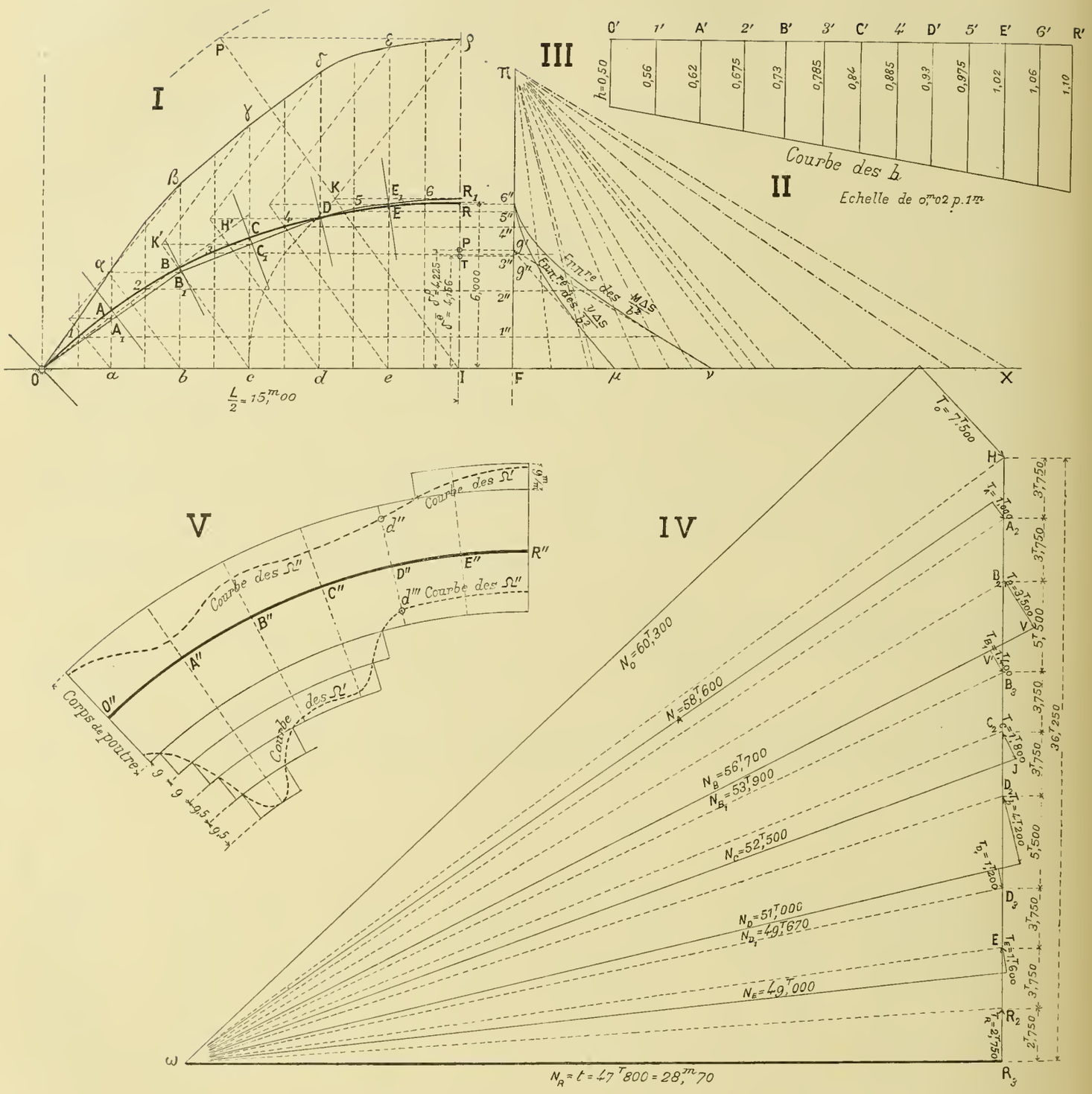
(*c*) **Méthode géométrique.** — Si l'on emploie la méthode géométrique il faudra, en plus, avoir les ordonnées δ^0 et δ^p des stabili-centres de poussée et de charges.

Le tableau de calcul (p. 292) nous donne ces ordonnées de stabili-centre, et nous pourrions par un funiculaire orthogonal (fig. III), les obtenir graphiquement.

Quant aux abscisses elles sont inutiles ; mais d'ailleurs, à cause de la symétrie de l'arc et de la symétrie des charges, elles sont égales, chacune, à 1/2 L, car ces stabili-centres sont sur la verticale milieu.

(*d*) **Calcul arithmétique des constantes.** — Les n^{os} de colonne du tableau de calcul ci-joint sont les mêmes que ceux des colonnes correspondantes du tableau général, dont celui-ci n'est qu'un extrait simplifié (v. n° 430).

N^{os}	ΔS	LES SECTIONS				MOMENTS DE POUSSÉE			MOMENTS DE CHARGE		
		b	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{\Delta S}{b^2}$	y	$y\frac{\Delta S}{b^2}$	$y^2\frac{\Delta S}{b^2}$	M	$M\frac{\Delta S}{b^2}$	$My\frac{\Delta S}{b^2}$
1	2	12	13	14	15	6	16 (6 × 11)	17 (6 × 16)	27	28 (27 × 15)	29 (28 × 6)
1	3^m,30	0,560	1,78	3,17	10,461	1^m,20	12,557	15,068	50^{tm},0	523,05	628,66
2	3,00	0,675	1,48	2,19	6,570	2,80	18,396	51,508	132,5	870,525	2437,47
3	2,80	0,785	1,27	1,62	4,536	4,20	19,051	80,015	192,5	873,180	3667,35
4	2,60	0,885	1,13	1,27	3,302	5,00	16,510	82,550	242,5	800,250	4001,25
5	2,55	0,975	1,02	1,05	2,677	5,70	15,261	86,993	277,5	742,867	4234,36
6	2,50	1,060	0,94	0,89	2,225	5,95	13,238	78,766	295,0	656 375	3905,40
Ordonnées des Stabili-centres : de poussée $\delta^0 = \frac{B}{A} = 4^m,156$, de charge $\delta^p = \frac{B_1}{A_1} = 4^m,225$.							95,023 A	394,920 B		4466,307 A_1	18874,49 B_1



ÉCHELLES

Longueurs 0m,005 pour 1 mètre. | Forces 0m,003 pour 1 tonne. | Surfaces des sections (fig. V) 0m,0002 pour 1 cent².

Fig. 439

Nota — Les longueurs marquées dans les colonnes Δs, y, b... sont les longueurs vraies dans l'espace, évaluées en prenant le mètre pour unité.

Les moments M (col. 27) sont aussi les moments vrais évalués en tonne-mètres.

Quand on se sert des y pour faire les produits $y\Delta S : b_2$ (col. 16) et $y^2\Delta S : b^2$ (col 17), on suppose implicitement que la poussée unitaire $\theta = 1^t$.

443. Equilibre général et équilibre moléculaire. — (*a*) **Poussée.** — On écrit que les écarts de sommiers λ^t et λ^p sont égaux, et, remarquant que $\lambda^t = (t : \theta)\lambda^\theta = t\lambda^\theta$ puisque $\theta = 1$; on a

$$t = \frac{\lambda^p}{\lambda^\theta} = \frac{B_1}{B} = \frac{18874,49}{394,92} = 47^t,800 \text{ k.}$$

(*b*) **Courbe des pressions.** — 1re *Méthode.* — Elle passe par chacun des deux sommiers. Nous avons donc en O (fig. 439-I) son point de départ. Nous savons qu'elle est un funiculaire $\widetilde{dt}$, c'est-à-dire une représentative des moments de charge répondant à une distance polaire *graphiquement* égale à la poussée.

Or, les échelles sont 0,003 pour 1 tonne et 0,005 pour 1 mètre ; la poussée $t = 47^t,800$ serait donc représentée graphiquement, par une longueur

$$d' = 49,800 \times 0,003 : 0,005 = 28^m,70,$$

telle serait la nouvelle distance polaire.

L'ancien funiculaire des moments de charge O, α, β... ρ était établi avec la distance polaire $d = 1/2\ L = 15^m$, il faut donc réduire toutes les ordonnées de ce premier funiculaire dans le rapport 28,70 : 15, et nous aurons la courbe des pressions.

On peut faire cette réduction comme suit :

1° De I comme centre (fig. I) avec une fraction quelconque de la nouvelle distance polaire, 28,70 (la moitié par exemple), on trace une circonférence et on prend le point P de cette circonférence situé au niveau du point ρ.

2° Sur ce rayon IP on porte en IK la même fraction (la moitié) de l'ancienne distance polaire 15,00.

3° Le point R_1 situé au niveau du point K, donne le sommet de la courbe de poussée.

4° Les autres points E_1 D_1 etc... s'obtiennent, comme l'indique la figure, par deux séries d'obliques respectivement parallèles à ρK et IK.

2e *Méthode.* — On construira fig. IV le dynamique $\widetilde{dt}$, c'est-à-dire celui qui a sa distance polaire $R_3\omega$ graphiquement égale à la poussée.

C'est exactement la même construction que pour l'exemple précédent (v. n° 438-*b*), il est inutile d'insister.

(*c*) **Moments fléchissants.** — 1° *Méthode graphique.* — On obtient les moments fléchissants mesurés à la nouvelle échelle qu'entraîne la nouvelle distance polaire ($d' = t = 28^m,70$ au lieu de 15^m) en mesurant les différences entre les ordonnées de la fibre neutre et celles de la courbe des pressions.

Remarque. — Il y a des moments positifs et d'autres négatifs, et il faut remarquer que dans les arcs continus il en sera toujours ainsi. Cela résulte du théorème fondamental (n° 416-*c*) qui exige que la somme des moments fictifs des aires partielles de la courbe à cheval ($M\Delta x$: EI cos ε), prise par rapport à la corde de l'arc, soit nulle. L'arc étant supposé tout entier au-dessus de sa corde, les bras de levier de ces moments seront tous positifs et cette somme ne peut être nulle que s'il y a des moments fléchissants définitifs M″ positifs et d'autres négatifs.

2° *Méthode arithmétique.* — On connaît la poussée t ; on fera le produit $M' = ty$, ce qui donnera pour chaque section le moment de poussée et la différence $M'' = M - M'$ entre le moment de charge M et le moment de poussée M′ donnera le moment définitif M″.

(*d*) **Efforts normaux et efforts tranchants.** — Exactement comme pour l'exemple précédent le dynamique $\widetilde{dt}$, fig. IV, les fait connaître graphiquement. Inutile d'insister (v. n° 438-*d*).

444. Calcul des sections.

(*a*) **Répartition des semelles.** — Le tableau ci-dessous donne les valeurs des efforts agissant sur chaque section, et les valeurs des surfaces correspondantes pour le demi-arc de gauche.

Les calculs sont faits exactement comme il est dit aux nos 439 et 440. Le lecteur est prié de s'y reporter.

Comme en aucun point nous n'avons $Nb < 2M$ ou $(2M : Nb) > 1$, nulle part les fibres ne sont tirées.

La pièce, à section double T, sera constituée : par un corps de poutre comprenant :

une âme pleine de 8^{mm} d'épaisseur, quatre cornières de $100 \times 100 \times 8$ et deux semelles de 6^{mm} d'épaisseur et 280 de largeur.

La section d'une table est donc :

2 cornières de $0,100 \times 0,100 \times 0,008$. .	0,003040
Un bout d'âme de $0,100 \times 0,008$	0,000800
Une semelle de 0,280 sur 0,006	0,001680
Total.	0,005520

La surface Ω′ la plus forte devant être de 0,015845 (v. tableau — section A) la différence

$$0,015845 - 0,005520 = 0,010325$$

sera obtenue au moyen de semelles dont l'épaisseur totale sera $0,010325 : 0,280 = 0,0368$.

DÉSIGNATION des SECTIONS	MOMENTS FLÉCHISSANTS — Ordonnées du funiculaire à l'échelle des forces	MOMENTS FLÉCHISSANTS — Moments en kilog.-mèt.	Composantes normales N.	Efforts tranchants T.	Section moyenne d'une table $\Omega = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{2}+\frac{M}{b}\right)$	RÉPARTITION DISSYMÉTRIQUE — Valeurs de $\frac{2M}{Nb}$	RÉPARTITION DISSYMÉTRIQUE — $\Omega' = \Omega\left(1+\frac{2M}{Nb}\right)$	RÉPARTITION DISSYMÉTRIQUE — $\Omega'' = \Omega\left(1-\frac{2M}{Nb}\right)$
O	0	0	60300	— 7500	0,005025	0	Intrados 0,005025	Extrados 0,005025
A	— 500	— 14580	58600	— 1000	0,008803	0,8	0,015845	0,001761
B gauche			56700	+ 3500	0,006922	0,46	0,010106	0,003738
B	— 330	— 9625						
B droite			53900	— 1400				
C	— 400	— 11665	52500	+ 1800	0,006690	0,52	0,010169	0,003211
D gauche			51000	+ 4200	0,004250	0	Extrados 0,004250	Intrados 0,004250
D	0	0						
D droite			49670	— 1200				
E	+ 230	+ 6707	49000	+ 1600	0,005180	0,27	0,006578	0,003782
R gauche				+ 2750				
R	+ 340	+ 9914	48600		0,005552	0,37	0,007606	0,003498
R droite				— 2750				

Nous prendrons deux semelles de 0,009, donnant chacune une surface de 0,002520 et deux semelles de 0,0095, donnant chacune 0,002660 ; la surface totale de ces quatres semelles sera de 0,010370. La répartition des semelles se fera (fig. V) comme dans l'exemple précédent, mais en observant que du point O au point D, la courbe Ω'' est à l'extrados, et Ω' est à l'intrados tandis que de D en R, Ω' est à l'extrados et Ω'' à l'intrados.

(*b*) **Vérification de l'effort tranchant.** — L'effort tranchant maximum se produit dans la section d'origine ; il est de 7.500 k. (v. fig. IV).

La hauteur de cette section est de $0^m,500$. Retranchons de cette hauteur la hauteur des cornières et des semelles, soit 0,204, la section d'âme qui reste et qui doit résister seule à l'effort tranchant sera de

$$(0,500 - 0,204) \times 0,008 = 0,002368$$

ce qui donne par millimètre carré

$$\frac{7500}{2368} = 3^k,167.$$

C'est au-dessous de la limite de sécurité au cisaillement.

(*c*) **Données pour une deuxième étude.** — En admettant comme première approximation les sections que nous venons de trouver, nous pourrons rectifier les poids admis comme point de départ de l'avant-projet, puis calculer en chaque point les véritables moments d'inertie. Nous chercherons alors les moments de charge, puis nous calculerons les M : EI et les y : EI ; nous déterminerons la poussée, soit par le tableau de calcul, soit graphiquement.

Nous tracerons la ligne des pressions ; nous chercherons les efforts agissant dans chaque section et nous referons le calcul des surfaces, qui devront différer peu de celles qui ont été adoptées dans l'avant-projet.

Il en résultera une nouvelle répartition des semelles, qui sera considérée comme définitive.

Nous chercherons, enfin, au moyen des formules exactes les efforts fibraires développés dans chaque section à l'intrados et à l'extrados, et nous vérifierons que nulle part la résistance de sécurité n'est dépassée.

(*d*) **Dilatation calorifique.** — C'est au moment de cette seconde étude que nous devrons tenir compte de la dilatation calorifique, car ce n'est que maintenant que nous connaissons, avec assez d'approximation, les valeurs *absolues* des moments d'inertie de chaque section.

Si nous opérons algébriquement, au lieu d'écrire pour l'équation qui donne la poussée :

$$t = \frac{\lambda^p}{\lambda^0}, \qquad \text{on écrira} \qquad t = \frac{\lambda^p \pm E\tau L}{\lambda^0},$$

λ^p ce sera le total B_1 et λ^0 ce sera le total B du nouveau tableau de calcul que nous aurons dressé, mais dans lequel, au lieu des quantités b^2, nous mettrons les vrais moments d'inertie I fournis par la première étude.

Si l'on opère graphiquement, nous savons que la dilatation calorifique ou la contraction frigorifique ont pour effet d'élever ou d'abaisser le stabili-centre de charge (v. n° 426-*b*).

(*e*) **Nota.** — Notre épure donne (fig. III) par un funiculaire spécial, qui serait l'analogue des funiculaires orthogonaux qui nous ont servi à trouver les élastiques-largeurs, les ordonnées des stabili-centres de charge et de poussée. N'insistons pas puisque cela a été fait arithmétiquement.

§ 3. — Arc a sommiers encastrés

445. **Données.** — (*a*) **Données de figure.** — Portée, $L = 30^m$; Flèche, $H = 6^m$. La fibre neutre est un arc de cercle, comme dans les exemples précédents.

Les sections iront en décroissant de hauteur, depuis les sommiers, où l'on aura $b = 1,10$, jusqu'à la clef, où l'on aura $b = 0,50$; on voit que c'est le contraire du second exemple.

Cette disposition est favorable pour les arcs à sommiers encastrés, tandis que l'autre convient pour les arcs à deux rotules.

La hauteur b décroît proportionnellement aux longueurs de la fibre neutre et le développement de cette dernière (fig. 440-III) donne la valeur de b pour chaque section.

(*b*) **Données de charges.** — Nous supposons des conditions un peu différentes de celles de l'exemple précédent. La charge uniformément répartie, due au poids propre, est la même, et la représentative de ses moments est la parabole OP (fig. I). Les jambettes qui transmettent le poids du tablier sont toujours au nombre de deux; elles transmettent chacune 5500 k. Mais nous supposons que leurs points d'application B et D divisent l'arc, et non plus sa corde, en trois parties égales. Nous avons construit en $Ob_1d_1\ldots$ le funiculaire Collignon (fig. I et II), relatif à ces charges. Enfin, en additionnant ce polygone avec la parabole, nous avons en $O\beta\delta\rho$ la représentative des moments de charge.

(*c*) **Données de constitution.** — Pour une première étude, nous admettons également que les moments d'inertie sont proportionnels aux valeurs de b^2, et nous ne tiendrons compte des dilatations calorifiques que dans une deuxième étude.

446. **Constante et équilibre général de l'axe.** — (*a*) **Simplifications dues à la symétrie.** — Remarquons tout d'abord que nos inconnues seront la poussée t et les moments d'encastrement M_0 et M_1. Mais, à cause de la symétrie de l'arc et de la symétrie des charges,

1° On aura $M_0 = M_1$, ce qui réduit à deux les inconnues;

2° Le stabili-centre de charge et celui de poussée seront sur la verticale milieu ;

3° Les deux stabili-centres d'encastrement seront sur une même parallèle à la corde de l'arc.

(*b*) **Equations d'équilibre et sommes à chercher.** — Voyons d'abord, avant de préparer un tableau de calcul, quelles sont les constantes dont, grâce à la symétrie, nous aurons strictement besoin et anticipons sur ce qui va suivre.

Pour déterminer les deux inconnues t et M_0, nous écrivons d'abord que la somme des écarts de sommiers dus à cette poussée et aux moments d'encastrement M_0 et M_1 (égaux entre eux) est égale à l'écart de sommier dû aux charges.

Mais, puisque $M_0 = M_1$, c'est comme si la pièce était soumise à un moment général à représentative rectangulaire ; M_0 et son écart sera égal à l'écart λ^μ que produirait le moment unitaire général μ, multiplié par M_0, et si $\mu = 1$

$$\lambda^{m_0} = M_0\lambda^\mu = 2M_0 \sum \frac{y\Delta S}{EI}.$$

Nous multiplions le dernier membre par 2, parce que nous ne faisons la somme que pour la moitié de l'arc.

Bien entendu, nous n'introduirons pas le facteur E et nous remplacerons, avec les restrictions déjà formulées, I par b^2.

L'écart dû à la poussée sera, au même facteur près,

$$\lambda^t = 2t \sum \frac{y^2\Delta S}{b^2}.$$

Et l'écart dû aux charges sera

$$\lambda^p = 2 \sum \frac{My\Delta S}{b^2}.$$

Nous aurons la première équation d'équilibre,

$$\lambda^{m_0} + \lambda^t + \lambda^p = 0.$$

$$(1) \qquad t \sum \frac{y^2\Delta S}{b^2} + M_0 \sum \frac{y\Delta S}{b^2} + \sum \frac{My\Delta S}{b^2} = 0.$$

Nous écrirons ensuite que le total des déviations angulaires sur chacun des sommiers est nul; or on sait que ces déviations sont les réactions, sur le sommier, des aires des courbes à cheval correspondantes et, en vertu de la symétrie, ces réactions seront égales entre elles et, par suite, à la moitié de ces aires.

La symétrie simplifie donc le calcul en ce sens qu'elle nous dispense de chercher ces réactions, c'est-à-dire, en réalité, la position des trisectrices, et que nous n'avons qu'à écrire que l'aire de la courbe à cheval des charges ajoutée à la somme des aires des courbes à cheval de poussée et de moments d'encastrement, donne un total nul ; ce qui fournira l'équation

$$(2) \qquad t \sum \frac{y\Delta S}{b^2} + M_0 \sum \frac{\Delta S}{b^2} + \sum \frac{M\Delta S}{b^2} = 0.$$

(*c*) **Tableau de calcul.** — Le tableau de calcul ci-contre fera connaître les coefficients des équations (1) et (2). On remarquera que nous avons divisé l'arc, et non plus sa corde, en parties égales ; c'est pourquoi le facteur commun ΔS pourrait être supprimé. Nous l'avons néanmoins conservé pour plus de généralité.

Nos	ΔS	b	b^2	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{\Delta S}{b^2}$	y	$y\frac{\Delta S}{b^2}$	$y^2\frac{\Delta S}{b^2}$	M	$M\frac{\Delta S}{b^2}$	$My\frac{\Delta S}{b^2}$
1	2,76	1,05	1,102	0,907	2,503	0,90	2,252	2,026	40	100,120	90,108
2	2,76	0,95	0,902	1,108	3,058	2,60	7,950	20,670	117,5	358,315	931,620
3	2,76	0,85	0,722	1,384	3,820	3,90	14,900	58,110	180	687,600	2701,640
4	2,76	0,75	0,562	1,778	4,907	4,90	24,044	117,815	230	1128,610	5530,220
5	2,76	0,65	0,422	2,367	6,533	5,60	36,584	204,870	267,5	1747,577	9586,430
6	2,76	0,55	0,302	3,306	9,124	5,95	54,287	323,007	287,5	2623,150	15607,742
					29,945		140,017	726,498		6628,072	34447,760
					D		A	B		A_1	B_1

(*d*) **Poussée et moments d'encastrement.** — En substituant dans les équations (1) et (2) les valeurs que ce tableau fournit pour les coefficients, nous avons les équations numériques suivantes, dans lesquelles, pour simplifier, nous avons supprimé les décimales, en forçant le dernier chiffre entier, quand il y avait lieu :

(1) $$726t + 140M_0 + 34447 = 0,$$

(2) $$140t + 30M_0 + 6628 = 0,$$

qui donnent pour racines

$t = -49^{\text{tonnes}},500$ k. et $M_0 = +9^{\text{t.m.}}502$ km.

447. **Equilibre moléculaire.**

(*a*) **Courbe des pressions.** — La ligne des pressions est le funiculaire des charges construit avec une distance polaire égale à la poussée t évaluée à l'échelle des longueurs, c'est-à-dire égale à $29^{\text{m}},70$ (on fera facilement le calcul). Ce funiculaire doit être amené à passer par l'extrémité O_1 de l'ordonnée qui représente, *à la même échelle*, le moment d'encastrement d'origine, et sur l'autre appui par l'extrémité D_1 de l'ordonnée qui représente le moment d'encastrement d'extrémité. Ces ordonnées sont égales, puisque $M_0 = M_1$, ce qui montre qu'on devra simplement déplacer le funiculaire parallèlement à lui-même.

L'ordonnée OO_1 est positive, elle a pour valeur (9 502 : 29,70) = 319 k. mesurée à l'échelle des forces.

Nous construisons la ligne des pressions par réduction des ordonnées du funiculaire des charges $O\alpha\beta\ldots\sigma$ en la faisant passer d'abord par le sommier O, en $OA_1'B_1'C_1'D_1'E_1'R_1'$, comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent, puis nous la remontons tout entière de la quantité OO_1, dans la position définitive $O_1A_1B_1C_1D_1E_1R_1$ (fig. 440-I).

Un dynamique $\widetilde{dt}$ (fig. V) sera construit et permettra de faire une vérification de la courbe des pressions.

(*b*) **Efforts dans chaque section.** — Cette détermination se fera encore comme dans les exemples précédents sur le dynamique $\widetilde{dt}$ (fig. V), et les mêmes remarques seront à faire pour les pressions normales et les efforts tranchants aux points d'application des charges distinctes transmises par les jambettes. La courbe des pressions traverse deux fois la fibre neutre aux points 2 et E.

Les moments fléchissants sont positifs du point O au point 2 et du point E au point R. Ils sont négatifs du point 2 au point É. De sorte que la fibre la plus comprimée est à l'extrados de O en 2 et de E en R et à l'intrados, de 2 en E.

Nota. — Notre épure est confuse, mais cette confusion disparaîtrait en adaptant des échelles plus grandes.

448. **Calcul des sections.**

(*a*) **Répartition des semelles.** — Le tableau de la page 414 donne les valeurs des efforts agissant dans chaque section et les surfaces correspondantes pour le demi-arc de gauche.

En aucun point nous n'aurons $2M > Nb$ ou $2M : Nb > 1$, par suite, nulle part les fibres ne sont tirées :

La poutre, à section double T, sera constituée par un corps de poutre comprenant une âme pleine de 0,008 d'épaisseur, quatre cornières de $0,100 \times 0,100 \times 0,008$ et deux semelles de 0,250 de largeur sur 0,005 d'épaisseur.

La section d'une table est donc :

2 cornières	$0,100 \times 0,100 \times 0,008$	= 0,003040
Un bout d'âme de	$0,100 \times 0,008$	= 0,000800
Une semelle de	$0,250 \times 0,005$	= 0,001250
	Total.	0,005090

La section la plus forte devant être de 0,008329, la différence 0,008329 — 0,005090 = 0,003239.

Elle sera obtenue au moyen de semelles dont l'épaisseur sera $\frac{0,003239}{0,250} = 0,0129$.

Nous prendrons deux semelles de 0,0065 chacune et donnant une surface totale de 0,003250 ; c'est un peu plus que la différence.

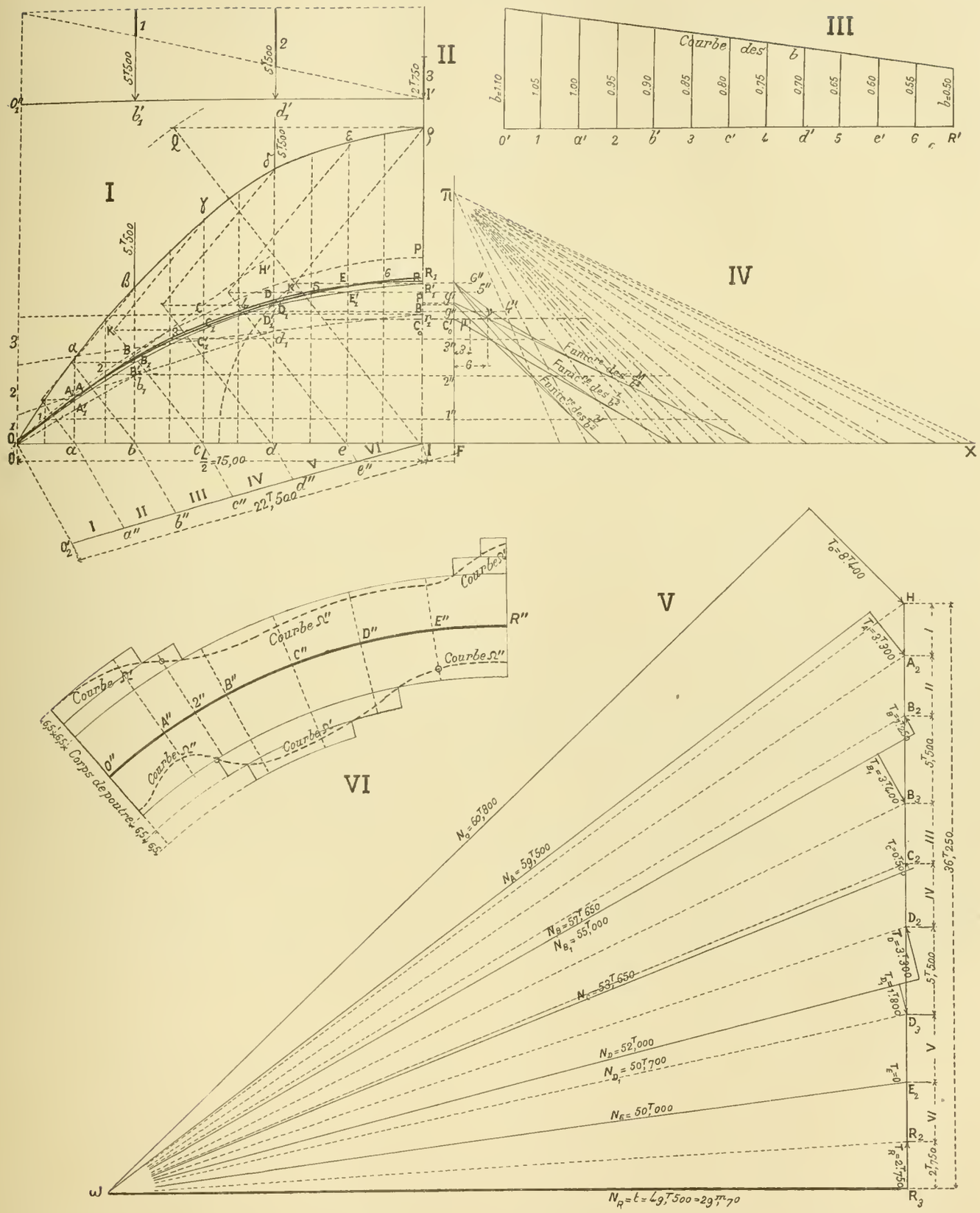

I
II
III
IV
V
VI
Courbe des b
Corps de poutre 65×65
Courbe Ω
Courbe Ω'
Courbe Ω''
Fonct.re des E_2
Fonct.re des b_2
Fonct.re des b_3
$N_A = 59,500$
$N_B = 57,650$
$N_{B_1} = 55,000$
$N_C = 53,650$
$N_D = 52,000$
$N_{D_1} = 50,700$
$N_E = 50,000$
$N_R = t = 49,500 = 29^m,70$
$T_A = 3,300$
$T_B = 3,400$
$T_C = 0,50$
$T_D = 3,900$
$T_E = 0$
$T_R = 2,750$
$36,250$
$22,500$
$15,00$

Fig. 440

DÉSIGNATION des SECTIONS	MOMENTS FLÉCHISSANTS		Composantes normales N.	Efforts tranchants T.	Section moyenne d'une table $\Omega = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{2} + \frac{M}{b}\right)$	REPARTITION DISSYMÉTRIQUE		
	Ordonnées du funiculaire à l'échelle des forces	Moments en kilog.-mèt.				Valeurs de $\frac{2M}{Nb}$	$\Omega' = \Omega\left(1 + \frac{2M}{Nb}\right)$	$\Omega'' = \Omega\left(1 - \frac{2M}{Nb}\right)$
0	+ 319	+ 9502	60800	— 8400	0,006507	0,28	Extrados 0,008329	Intrados 0,004685
A	+ 50	+ 1435	59500	— 3300	0,005198	0,48	0,007693	0,002703
B gauche			57650	+ 1250				
B	— 130	— 3861			0,005520	0,15	0,007000	0,004040
B droite			55000	— 3400				
C	— 200	— 5940	53650	+ 0,500	0,005708	0,27	Intrados 0,007249	Extrados 0,004167
D gauche			52000	— 3300				
D	— 100	— 2970			0,005040	0,16	0,005846	0,004234
D droite			50700	+ 1800				
E	0	0	50000	0	0,004167	0	0,004167	0,004167
R gauche				+ 2750				
R	+ 160	+ 4752	49500		0,005708	0,38	Extrados 0,007877	Intrados 0,003539
R droite				— 2750				

La répartition de ces semelles se fera de la même manière que dans les exemples précédents, en observant qu'entre les points 0 et 2 d'une part, E et R de l'autre, la courbe Ω' est du côté de l'extrados, tandis qu'elle est du côté de l'intrados entre les points 2 et E.

(*b*) **Vérification de l'effort tranchant.** — Nous admettons que l'âme résiste seule à l'effort tranchant ; la section la moins haute de l'arc ayant 0,500 la portion d'âme qui reste entre les cornières a pour hauteur $0{,}500 - 0{,}210 = 0{,}290$, représentant une section de $0{,}290 \times 0{,}008 = 0{,}002320$ capable de résister à un effort tranchant égal à

$$2\,320 \times 4^{k},8 = 11\,136^{k},$$

valeur qui n'est atteinte en aucun point de l'arc.

(*c*) **Données pour une deuxième étude.** — En admettant comme très approchées les sections que nous venons de trouver, nous rectifierons les poids admis comme point de départ de l'étude d'avant-projet ; nous calculerons ensuite les moments d'inertie dans les diverses sections.

Après avoir construit le funiculaire des charges nous calculerons les M : EI et les y : EI en valeurs absolues ; nous déterminerons une nouvelle poussée et de nouveaux moments d'encastrement.

Nous tracerons une nouvelle ligne des pressions ; nous en déduirons les efforts agissant dans chaque section, puis nous referons le calcul des surfaces, d'où résultera une nouvelle répartition des semelles, qui sera considérée, cette fois, comme définitive.

Nous calculerons, enfin, au moyen des formules exactes, les efforts fibraires développés dans chaque section à l'intrados et à l'extrados, efforts qui ne devront en aucun point dépasser la résistance de sécurité.

(*d*) **Dilatation calorifique.** — Mêmes observations qu'au n° 444-*d*. La dilatation calorifique se traduira par un terme additionnel dans l'équation 1 d'équilibre général ; nous écrirons que l'écart de sommiers λ^p dû aux charges est augmenté ou diminué de τL, et l'équation (1) s'écrira

$$(1) \qquad t\sum\frac{y^2\Delta S}{I} + M_0\sum\frac{y\Delta S}{I} + \sum\frac{My\Delta S}{I} \pm E\tau L = 0.$$

CHAPITRE III

FERMES EN ARC

§ 1. — Généralités

449. **Surcharges à adopter.** — Ces surcharges sont les mêmes que pour les fermes ordinaires ; seulement, il n'est pas possible de dire *à priori* quelle sera la surcharge la plus défavorable, si ce sera celle de la neige ou celle du vent.

On opère alors de la manière suivante :

1° On étudie la ferme sans surcharges.

2° On ajoute la surcharge, verticale, de neige, n'agissant que sur un seul des deux égouts ;

3° On ajoute la surcharge, verticale, de la neige, agissant sur les deux égouts du toit ;

4° On fait agir le vent, horizontalement, sur un seul de s deux égouts, la neige étant supprimée.

On cherche, pour chaque section, quelle est celle des trois surcharges qui, combinée avec le poids propre de la ferme, donne les efforts maxima; et ce sont ces derniers qui serviront à calculer les dimensions de la section.

Nous ne dirons rien de la surcharge de neige ; elle est verticale et on l'étudiera comme il a été dit ci-dessus.

450. **Action du vent.**

(*a*) **Répartition des actions.** — L'action du vent sur une surface plane a été étudiée plus haut (v. n° 344). Nous savons donc trouver l'action normale due au vent, agissant sur un égout plan de la ferme, action qui sera répartie entre les différentes pannes.

Si la surface extérieure des égouts est courbe, il faudra chercher séparément l'action normale agissant sur chaque panne, ce qu'on obtiendra facilement et avec une approximation suffisante de la manière suivante :

Soit A la panne sur laquelle nous voulons connaître l'action du vent. Menons la tangente en A à la courbe d'extrados ; menons les tangentes aux points B et C où sont placées les autres pannes voisines de A ; ces tangentes coupent en T et T′ la tangente en A ; nous pourrons, *sans erreur sensible*, considérer que la panne A supporte l'action du vent agissant sur la portion plane TT′.

Nous ferons la même opération pour toutes les autres pannes de l'égout soumis au vent.

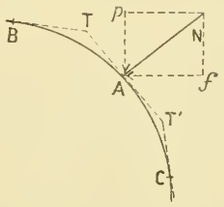


Fig. 441

Si la ferme comporte des parties verticales formant supports, ce qui est un cas très ordinaire, il faudra tenir compte de l'action du vent sur la partie verticale, car elle sera plus importante que toutes les autres.

(*b*) **Application.** — Pour fixer les idées, montrons le tracé pour un comble circulaire, (v. plus loin fig. 442.) A, B, C, G (fig. I) sont les pannes de la moitié de droite.

1° Sur les normales on a porté, en AA′, BB′, CC′..., à l'échelle de forces, ce que nous avons appelé la puissance du vent c'est-à-dire $\Omega \times 125k$..... Ω étant la surface d'égout, évaluée en mètres carrés, qui incombe à chaque panne.

2° On a projeté une première fois les points A′, B′, C′..., en $a'b'c'$ sur la direction du vent, supposé incliné à 10° sur l'horizontale, et une seconde fois on a projeté sur les normales en $A_1B_1C_1$, les points $a'b'c'$. Les efforts normaux, réels, exercés par le vent sur le comble sont représentés par AA_1 — BB_1... — GG_1.

3° On a cherché en $f_1f_2f_3f_4$ les composantes horizontales de ces efforts normaux et en $p_1p_2p_3p_4$ leurs composantes verticales.

Nous allons voir maintenant les effets des ces forces sur un arc continu.

§ 2. — Arc continu soumis a l'action du vent

451. **Moments fléchissants sur la poutre courbe.** — Nous allons, comme à l'ordinaire, considérer d'abord la pièce comme une *poutre courbe* (fig. 442-VII) dont le sommier d'origine, O, serait à rotule fixe et dont le sommier d'extrémité, D, serait à rotule pouvant glisser suivant la corde de l'arc, et nous allons chercher séparément :

1° En O*gcba*D (fig. IV), le funiculaire $p_1p_2,\ldots$ des moments dus aux composantes verticales ;

2° En O$gc''b''a''$D (fig. V), le funiculaire $f_1f_2,\ldots$ des moments dus aux composantes horizontales, après quoi :

3° Nous les ajouterons et nous aurons en $OG_2C_2B_2A_2$ le funiculaire total des moments fléchissants produits par l'action du vent sur la poutre courbe.

(*a*) **Funiculaire des composantes verticales.** — Nous l'obtenons comme à l'ordinaire (fig. III et IV), par la méthode Collignon (distance polaire $d = 1/2$ L). Les explications sont inutiles.

(*b*) **Funiculaire des composantes horizontales.** — 1° *Corbeau vertical* : Tout d'abord imaginons (fig. VI) qu'une poutre verticale D'G', encastrée à son pied D', et libre à l'autre, c'est-à-dire formant *corbeau*, soit soumise aux efforts horizontaux $f_1f_2f_3f_4$ et cherchons les moments fléchissants qu'elle supporterait. La méthode Collignon appliquée aux corbeaux (v. n° 200), nous en fait connaître la représentative. On voit (fig. II) l'épure préparatoire exécutée avec la distance polaire $d = 1/2$ L pour faire connaître les segments 4', 3', 2', 1', lesquels ont été reportés sur la fig. VI, et ont permis d'obtenir en G'C'B'A'K' (fig. VI), ce que nous nommerons le *funiculaire du corbeau*. Remarquons que D'K' représente le moment par rapport au sommier D de l'ensemble de toutes les forces horizontales, et que les autres abscisses a'A', b'B' sont, par rapport aux points a', b'..., les moments positifs des forces situées au-dessus de ces points.

2° *Réactions spéciales des appuis* : Les composantes $f_1f_2,\ldots$, horizontales, tendraient à faire tourner la pièce autour du sommier O en soulevant le sommier D. Le couple de rotation a pour valeur représentative D'K'. Pour empêcher ce mouvement il est nécessaire que les appuis développent des réactions spéciales de nature à donner naissance à un couple égal au précédent et de sens contraire : soient $+v$ la réaction du sommier O et $-v$ celle du sommier D, on devra donc avoir (1/2 L étant la distance polaire)

$$vL = 1/2\ L \times D'K' \qquad \text{d'où} \qquad v = 1/2\ \overline{D'K'}.$$

3° *Le funiculaire* : Pour un point quelconque N situé *à gauche* de la première panne chargée G (fig. V) le moment fléchissant, *positif*, est dû à la seule réaction v, du sommier d'origine O. Et x étant l'abscisse de ce point N, il a pour expression vx. Sa représentative est la droite OK, et l'on a pour l'ordonnée d'extrémité de cette droite DK (fig. V) = D'K' (fig. VI).

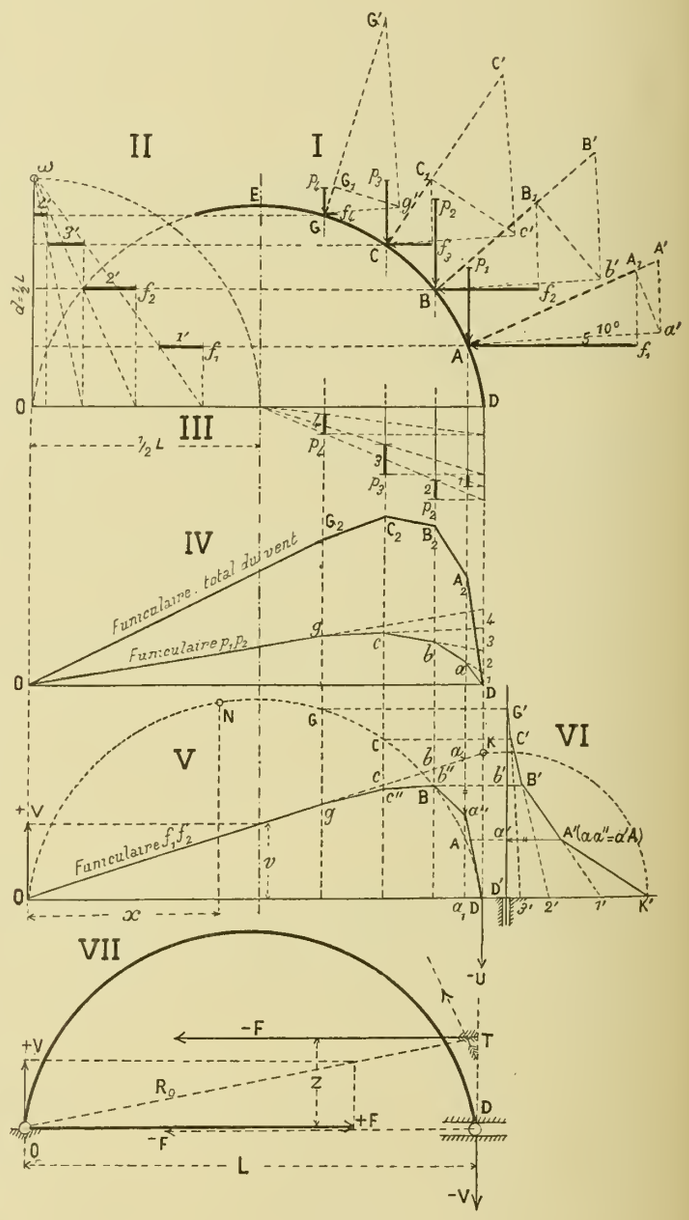


Fig. 442

Si nous prenons maintenant un point tel que A, situé *à droite* de la charge la plus haute G, pour ce point, le moment a_1a, produit par la réaction $+v$, doit être

diminué du moment $a'A'$ (fig. VI), que produisent les charges horizontales G, C et B. D'où cette conclusion :

Le funiculaire $c'b''a''D$ des moments dus aux composantes horizontales s'obtient en retranchant des ordonnées de la droite OK, celles du funiculaire du corbeau.

Ainsi que nous l'avons dit, nous pourrions additionner le funiculaire f_1f_2 (fig. V) au funiculaire p_1p_2, ... (fig. IV) et obtenir en $OG_2C_2B_2D_2$ (fig. IV) la représentative totale des moments de charge dus à l'action du vent. Mais, ainsi qu'il résultera du numéro suivant, il n'y a pas intérêt à faire cette addition.

Connaissant les moments supportés par la poutre courbe, nous allons, maintenant, la transformer en un arc et chercher les modifications qui résultent de cette transformation.

(*d*) **Marche à suivre pour un arc.** — Nous conseillons de fractionner le problème, c'est-à-dire : 1° de considérer d'abord l'arc comme ne supportant que les composantes verticales p, et de déterminer la poussée t^p, et, s'il y a encastrement, les moments d'encastrement M_0^p et M_1^p qu'elles produiraient. (Nous avons appris à résoudre cette question, nous n'y reviendrons donc pas). 2° De considérer ensuite le même arc comme étant soumis aux seules composantes horizontales f et de déterminer les quantités t^f, M_0^f et M_1^f correspondantes. Nous allons apprendre à le faire.

Après quoi on aura pour la poussée et pour les moments définitifs

$$t = t^p + t^f, \qquad M_0 = M_0^p + M_0^f, \qquad M_1 = M_1^p + M_1^f.$$

Dès lors, l'équilibre général de l'arc sera connu.

Pour connaître ce qui se passe dans chaque section :

1° Nous construirons la courbe des pressions répondant aux composantes verticales, ainsi que son dynamique $\widetilde{dt}$; et nous en déduirons pour chaque section les moments fléchissants, les efforts tranchants et les efforts normaux dus à ces composantes ;

2° Nous tracerons, de même, la courbe des pressions répondant aux composantes horizontales ainsi que son dynamique $\widetilde{dv}$, et nous en déduirons les moments et les efforts ;

Nota. — Nous appelons ce dernier dynamique $\widetilde{dv}$, parce que nous prouverons plus loin qu'il a sa distance polaire graphiquement égale à la réaction verticale v engendrée sur les appuis par les efforts horizontaux.

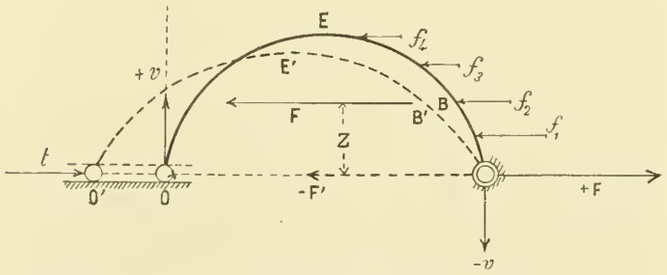
3° Pour chaque section on ajoutera les résultats et l'on aura les efforts définitifs.

452. **Équilibre général d'un arc soumis, seulement, à des forces horizontales** — Analysons les faits et prenons (fig. 443) la pièce à l'état de poutre courbe. Seulement, supposons que ce soit le sommier D situé, du côté du vent, qui soit à rotule fixe et l'autre O qui soit à rotule glissante. Cela revient au même que de faire l'hypothèse contraire et cela facilitera les raisonnements.

Transportons toutes les forces f_1f_2... sur la rotule fixe, en donnant ainsi naissance à un couple $-F \times Z$ ($-F$ est la résultante des forces et Z est sa distance à la rotule D).

Ce couple développe sur les appuis les réactions verticales $+v$ et $-v$, que nous avions étudiées tout à l'heure et qui, jointes aux forces f_1f_2..., donnent des moments fléchissants dont nous avons appris à tracer la représentative (fig. 442-V).

La résultante de transport $-F'$ est appliquée au sommier fixe, et par conséquent elle est intégralement détruite par lui, grâce à la réaction $+F$ qui en est la conséquence : elle ne développe donc aucun moment fléchissant dans la poutre courbe.



Erratum. A côté du sommier de droite mettre la lettre D.

Fig. 443

Cette dernière se défigure et elle prend une élastique B'E'O', qui est due exclusivement aux moments, exactement comme si ces derniers provenaient de charges verticales au lieu d'être produits par des forces horizontales.

Soient λ' l'écart OO' de sommier pris ainsi, et soient α_0 et α_1 les déviations angulaires des sommiers.

Transformons maintenant la poutre en un arc, c'est-à-dire ramenons le point O' en O, afin de détruire l'écart des sommiers et, s'il y a encastrement, développons des moments d'encastrement convenables. Tous ces effets correctifs à combiner exigeront une poussée t, et des moments d'encastrement M_0 et M_1 que l'on sait calculer dès que l'on connaît la représentative des moments de charge, que ces charges soient verticales ou qu'elles soient horizontales.

Quelles seront les réactions dans le cas le plus général, celui de l'arc à deux sommiers encastrés ? (fig. 444).

(*a*) **Réactions horizontales.** — Au sommier O, celui qui est du côté opposé au vent, la réaction est la poussée t, calculable comme il vient d'être dit. Au sommier D nous avons la force F, soulagée de la poussée t, c'est-à-dire $F - t$.

(*b*) **Réactions verticales.** — S'il n'y avait pas d'encastrement nous aurions en O la réaction $+v$, et sur le sommier D nous aurions $-v$. Mais les moments d'encastrement modifient ces réactions d'une quantité ε, qui est égale à la

pente *vraie* de la représentative des moments, c'est-à-dire que l'on a $\varepsilon = (M_0 - M) : L$. On se souvient que si la distance polaire est $d = 1/2\,L$, la quantité ε se prend à l'échelle des forces, sur la verticale milieu I.

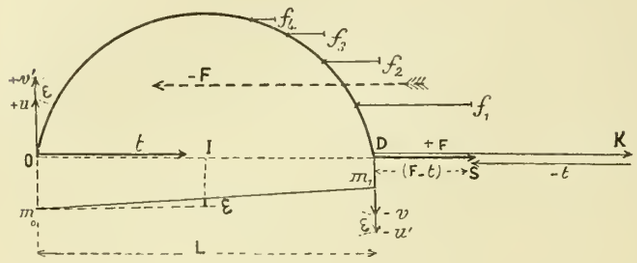


Fig. 444

Les réactions verticales seront donc :
En O ... $+v' = v + \varepsilon$, et en D $-v' = -(v + \varepsilon)$; en grandeur absolue il y a augmentation de ε pour la première aussi bien que pour la seconde.

453. **Lignes des pressions relatives aux forces horizontales.**

(*a*) **Arc à deux rotules** (fig. 445). — Portons sur une horizontale (fig. II) et bout à bout, en $Jf_4f_3f_2f_1$ les forces horizontales qui agissent sur l'arc. Portons JS égal à la poussée t (que nous supposons déterminée par ce qui précède), et construisons un dynamique en prenant, à plomb du point S, un pôle ω, ayant sa distance polaire égale à la réaction v qui sur le sommier O est due aux forces horizontales. Nous avons appris à déterminer cette réaction (fig. 442-V et VI).

Ce sera le dynamique $\widetilde{dv}$, ainsi appelé à cause de la longueur v, de sa distance polaire.

Prenons les rayons polaires de ce dynamique $\widetilde{dv}$ et, enfin, construisons (fig. I) en prenant la rotule O pour point de départ, le funiculaire $OG_1C_1B_1A_1D$ correspondant à ce dynamique $\widetilde{dv}$.

Je dis : 1° Que le funiculaire $\widetilde{dv}$ doit se refermer sur la seconde rotule D, et : 2° qu'il est le polygone des pressions.

Pour démontrer le premier point remarquons que les horizontales, telles que $c_1C_1 - b_1B_1$, a_1A_1... et OD_1 comprises entre le côté initial OG_1 et les sommets successifs donnent à l'échelle de la distance polaire $d = v$, les moments fléchissants des forces f_1f_3... par rapport aux points C, B, A, c'est-à-dire les moments sur le corbeau D'G' de la fig. 442-VI ; seulement elles les donnent à une autre échelle.

On aura en particulier, en désignant par M_d le moment du corbeau en D (v étant la distance polaire),

$$M_d = OD_1 \times v,$$

et, comme $v = M_d : L$, on en déduit $OD_1 = L$. C.Q.F.D.

Le second point est presque évident, car le premier côté OG_1 est parallèle à la résultante R_0 de la poussée t_0 et de la réaction v. Le second côté G_1C_1 est parallèle au rayon polaire ωf_4 de la fig. II, lequel est la résultante de R_0 et de la force f_4 et ainsi de suite.

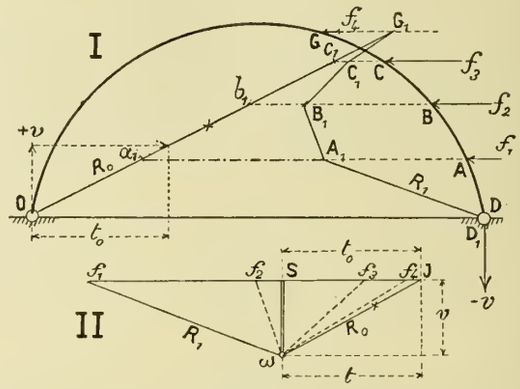


Fig. 445

Nota. — Les abscisses relatives $b_1B_1 - a_1A_1$ sont des dilatations des abscisses $b'B'$, $a'A'$, ... du corbeau (fig. 442-VI). Le rapport d'amplification est $1/2\,L : v$. Cette remarque permettra, une fois le côté initial OG_1 tracé, d'obtenir le polygone des pressions par des dilatations, ce qui donne plus d'exactitude que l'emploi du dynamique $\widetilde{dv}$. Cette courbe des pressions est un funiculaire $\widetilde{dv}$.

(*b*) **Arc à deux sommiers encastrés** (fig. 446). — Nous supposons que la poussée t à l'origine ainsi que les deux moments d'encastrement M_0 et M_1, que nous admettons positifs, ont été déterminés.

Soient Om_0 et Dm_1 les représentatives de ces moments à

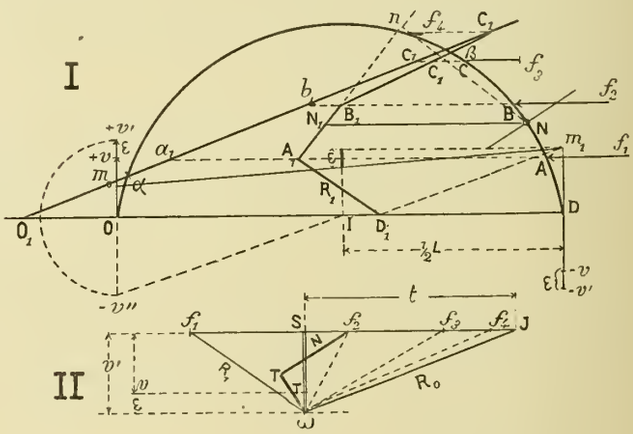


Fig. 446

l'échelle des funiculaires Collignon ($d = 1/2\,L$), ce qui veut dire que l'on aura

$$M_0 = \overline{Om_0} \times 1/2\,L \qquad \text{et} \qquad M_1 = \overline{Dm_1} \times 1/2\,L.$$

Nous avons vu (n° 452—*b*) que les réactions v et $-v$ de tout

à l'heure devaient être augmentées, en valeur absolue, de la quantité $\varepsilon = (M_0 - M_1) : L$; soient $+v'$ et $-v'$ ces deux nouvelles réactions.

Construisons (fig. 446-II) sur les forces $f_1 f_2 f_3$ un dynamique $\widehat{dv'}$, c'est-à-dire ayant pour distance polaire $d = v'$, et son pôle ω à plomb du point S lequel est à une distance du point J égale à la poussée t.

Les rayons polaires de ce dynamique donnent en grandeur et direction les résultantes successives qui, une fois mises en place, seront les côtés du polygone de pressions $O_1C_1B_1D_1$. Il ne reste qu'à mettre ces côtés en position. Faisons-le seulement pour le côté initial et tous les autres s'y mettront naturellement.

Soit O_1 et D_1, sur la corde de l'arc, les points inconnus par lesquels passeront le côté initial R_0 et le côté final R_1, on aura :

$$\overline{OO_1} = \frac{Om_0}{v'} \times \frac{L}{2} \qquad \text{et} \qquad DD_1 = \frac{Om_1}{v'} \times \frac{L}{2}.$$

Nous pourrions le démontrer directement, mais ce sera une conséquence du **nota** du numéro suivant (n° 454).

On obtiendra O_1 et D_1 comme suit :

On joint le point I, milieu de la corde, parce que la distance polaire est $d = 1/2\,L$, à l'extrémité $-v''$ du symétrique du point v', et l'on mène m_0O_1 parallèle à la droite Iv'', ce qui donne le point O_1.

On aura de même le point D_1 par lequel doit passer le côté final R_1 du polygone des pressions, lequel est obtenu en $O_1G_1C_1B_1A_1D_1$. Comme vérification :

1° Ce polygone doit se fermer sur le point D_1, et 2° ses abscisses relatives b_1B_1, a_1A_1, etc., doivent être une dilatation, dans le rapport constant $O_1D_1 : 2v'$, de celles du funiculaire du corbeau $b'B'$, $a'A'$... de la fig. 442-VI.

Nota. — On pourrait hésiter pour savoir si O_1 doit être à droite ou à gauche de O. Si M_0 est positif, R_0 étant dirigé de gauche à droite, R_0 doit être en dessus de O, et par suite O_1 doit être à gauche de O. Ce serait le contraire si M_0 était négatif.

454. **Efforts dans chaque section.** — (*a*) **Moments fléchissants.** — *Théorème* : « Les moments fléchissants sont « proportionnels aux segments *horizontaux* interceptés entre « la fibre neutre et la courbe des pressions; le coefficient de « proportionnalité est la réaction verticale des appuis. »

Démontrons-le pour le cas général de l'arc à deux sommiers encastrés.

Soit N (fig. 446) un point de la fibre neutre pour lequel nous voulons calculer le moment fléchissant définitif. Lorsque nous sommes au point N, la résultante de toutes les forces qui agissent sur l'arc, entre le sommier d'origine et ce point, est donnée en position par le côté B_1A_1 du polygone des pressions, et en grandeur par le côté ωf_2 du dynamique (fig. II). Le bras de levier du couple de flexion est la perpendiculaire Nn (fig. I), abaissée du point N sur la force A_1B_1, et le moment fléchissant a pour valeur $M_n = \omega f_2 \times Nn$.

Soit NN_1 l'horizontale interceptée entre le point N de la fibre neutre et le côté A_1B_1 du polygone des pressions. Les triangles rectangles NN_1n et $\omega S f_2$ sont semblables et donnent :

$$\frac{\omega f_2}{NN_1} = \frac{\omega S}{Nn}; \qquad \text{d'où} \qquad \omega f_2 \times Nn = NN_1 \times \omega S,$$

et par suite $\qquad M_n = NN_1 \times v'$.

Le théorème est donc démontré. Le coefficient de proportionnalité est la distance polaire v', c'est-à-dire la réaction verticale des sommiers.

Nota. — 1° *Sommiers.* Le théorème est vrai pour les sommiers ; on aura donc

$$M_0 = OO_1 \times v', \qquad \text{et comme} \qquad M_0 = Om_0 \times 1/2\,L,$$

attendu que $1/2\,L$ est la distance polaire, on a

$$OO_1 = \frac{\overline{Om_0}}{v'} \times \frac{L}{2} \qquad \text{et} \qquad DD_1 = \frac{\overline{Om_1}}{v'} \times \frac{L}{2}.$$

Ce sont les valeurs de OO_1 et DD_1 annoncées ci-dessus.

2° *Signes.* Les moments sont positifs lorsque le polygone des pressions est à gauche de la portion de fibre neutre à laquelle il répond ; ils sont négatifs dans le cas contraire.

Sur la fig. 446, les moments sont positifs de O en α et de β en D; ils sont négatifs de α en β.

(*b*) **Efforts normaux et efforts tranchants.** — On les trouve exactement comme dans le cas de forces verticales. Refaisons le tracé pour la section N : (même fig. 446.)

1° On mène (fig. I) la normale à la fibre neutre ;

2° Sur le dynamiqne (fig. II) on mène f_2T parallèle à cette normale et ωT perpendiculaire; ce qui donne en f_2T l'effort normal et en ωT l'effort tranchant.

455. **Arc à trois rotules** (fig. 446 bis). — Nous avons vu (v. n° 412) que dans un pareil arc la ligne des pressions de-

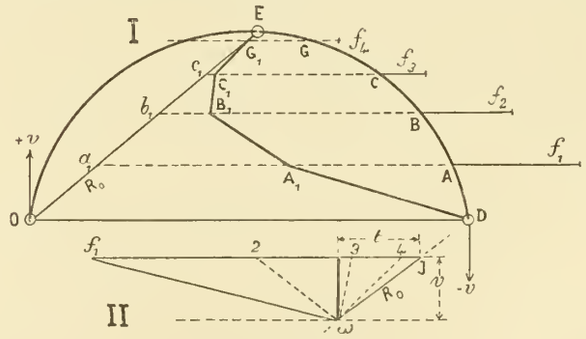


Fig. 446 bis

vait passer par chacune des trois rotules, ce qui détermine statiquement la poussée, sans faire intervenir les défigurations élastiques.

Dans le cas actuel, le premier côté R_0 du polygone des

pressions se tracera donc *a priori* de la rotule O à la charnière E sur la fig. I, et de J en ω sur le dynamique (fig. II). On aura déterminé, comme ci-dessus, par le funiculaire du corbeau, la réaction v des appuis, et (fig. II) on aura donc par recoupement en ω le pôle du dynamique, d'où l'on déduira en JS la poussée t. Cela fait : la ligne des pressions se trace en $OG_1C_1B_1A_1D$ de la même manière que dans les exemples précédents.

456. **Conclusions du chapitre III.** — En résumé, ce chapitre a pour objet d'étudier les effets produits, sur un arc, par des forces dirigées d'une manière quelconque. Nous aurions pu traiter la question en prenant directement ces forces, sans les décomposer, au préalable, en composantes verticales et en composantes horizontales. Mais les dynamiques et les funiculaires qui eussent été la conséquence de cette manière de procéder eussent été tout à fait quelconques ; leur plus grand inconvénient eût été, pour l'appréciation des moments fléchissants, de nous obliger à changer de distance polaire pour chaque nouveau moment à évaluer (v. n° 34).

La méthode que nous venons d'exposer et que nous devons à M. **Cordeau**, ingénieur, nous permet, au contraire, de garder une distance polaire toujours la même et d'appliquer, en outre, les tracés à la fois si simples, si exacts et si peu encombrants de M. **Collignon**.

SIXIÈME PARTIE

LES MASSIFS EN MAÇONNERIE

CHAPITRE I

LES VOUTES

§ 1. — Généralités sur les voutes

457. **Définitions.** (V. notre traité de stéréotomie, n° 76.)

(*a*) **Murs.** — Pierre de taille et moellons. — Carreaux, parpaings, boutisses. — Surfaces de lit et surfaces de joint. — Principe de la découpe et de l'orthogonalité des lignes et des surfaces.

(*b*) **Voûtes.** — Piédroits et naissances d'une voûte. — Piles et culées. — Voussoirs, clef et contre-clefs, reins, sommiers. — Intrados et extrados; extrados parallèle ou extrados en tas de charge ; tympans.

(*c*) **Voûtes en berceau.** — Ouverture ou portée; montée ou flèche d'une voûte. — Voûtes en plein cintre, voûtes surhaussées ou surbaissées. — Voûtes en arc de cercle, en ellipse, en anse de panier, en ogive, en arc rampant.

458. **Hypothèses.** — Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les voûtes considérées sont des berceaux ; qu'elles sont symétriques et symétriquement chargées par rapport à la verticale de clef (fig. 447).

Nous imaginerons qu'il existe un joint à la clef CD. Nous considérerons donc cette clef comme formée de deux demi-voussoirs symétriques par rapport à la verticale.

Si nous supprimons la moitié de droite B de la voûte, il faudra la remplacer par une réaction $IF = t$, laquelle, à cause de la symétrie des charges et de la figure, sera forcément horizontale. Cette force IF sera le premier élément de la courbe des pressions. Son point d'application I, aussi bien que sa grandeur, sont des inconnues du problème ; en tout cas nous pouvons, dès maintenant, affirmer qu'elle est égale à la poussée $OG = + t$ du sommier.

Les voussoirs peuvent être posés à joints vifs, ou séparés par un lit de mortier; dans ce dernier cas, le mortier, s'il est de bonne qualité, produit une adhérence des voussoirs entre eux, et s'oppose à leur décollement tant qu'il ne se développe pas d'efforts de traction supérieurs à une certaine limite, laquelle dépend de la nature des pierres, de la qualité du mortier et de la façon dont il est employé.

On peut considérer la voûte comme formée de voussoirs très minces, tels que α, qu'on nomme *voussoirs élémentaires*; ce sont les équivalents des biplateaux considérés pour les poutres et pour les arcs; la réunion de plusieurs voussoirs élémentaires forme un *voussoir théorique* qui peut se confondre d'ailleurs avec un voussoir proprement dit, tel qu'on le considère en stéréotomie, et que nous nommerons un *voussoir réel*.

Enfin, nous étudierons toujours une portion de voûte comprise entre deux plans de têtes distants entre eux de $1^m,00$; de cette manière les volumes des différentes parties de la voûte et des charges en maçonnerie qu'elle

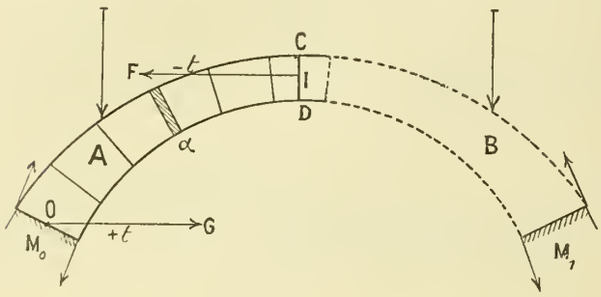


Fig. 447

supporte seront exprimés par les mêmes nombres que les surfaces des profils de ces parties ou par des nombres proportionnels à ces surfaces.

459. **Transmission des pressions.** — Si une voûte était *monolithe*, c'est-à-dire formée par un seul morceau de pierre, elle serait exactement dans les mêmes conditions qu'un arc continu, à sommiers encastrés. Les sommiers supporteraient des moments fléchissants M_0 et M_1; il y aurait une poussée t, et un polygone ou plutôt une courbe des pressions qui serait un funiculaire $\widetilde{dt}$ des moments de charge. Les côtés du polygone des pressions, ou plutôt les

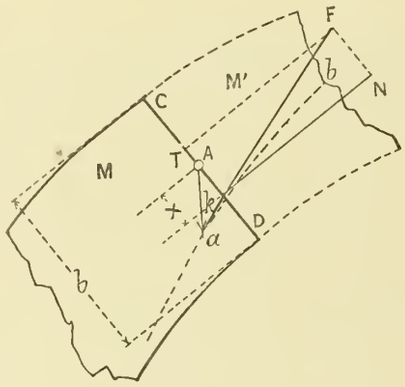


Fig. 448

tangentes à la courbe des pressions ab aux points tels que a (fig. 448), situés à plomb des centres de gravité tels que A des sections normales à la fibre neutre de la voûte viendraient rencontrer lesdites sections aux centres de pression. Tel serait obtenu le centre de pression K de la section CD.

Rappelons, mais en l'appliquant à deux voussoirs consécutifs d'une voûte M et M' (fig. 448), ce que nous avons dit relativement à la transmission des pressions par contact (v. n°s 321 à 330).

Soit A le centre de gravité d'une section, c'est-à-dire de la surface de lit qui sépare deux voussoirs réels; soit ab la courbe des pressions, soit a le point de cette courbe situé sur la verticale de A.

On sait que la courbe des pressions étant un funiculaire $\widetilde{dt}$, c'est-à-dire une représentative des moments de charge répondant à une distance polaire d, *graphiquement égale* à la poussée t, il en résulte que le moment fléchissant sur la section a pour valeur (v. n° 432)

$$M = \overline{Aa} \times t.$$

Soit aKF la tangente en a à la courbe des pressions, rencontrant en K le plan de lit; K est le centre de pression;

Soit X sa distance au centre de gravité A, et soit FK = F la résultante des forces qui agissent en K;

On sait (v. n° 431) que le dynamique $\widetilde{dt}$ donne, par celui de ses rayons polaires qui est parallèle à KF, la grandeur de cette résultante.

On décompose la force F en une composante normale au plan de lit N, et en une composante T située dans ce plan de lit. T, pour les arcs, était l'effort tranchant, mais pour les voûtes ce sera l'effort de *glissement*, ainsi nommé parce qu'il aura pour tendance de faire glisser les deux pierres l'une sur l'autre. Le frottement est là pour s'opposer à ce glissement et nous savons (v. n° 317-*c*) que si la résultante F fait avec la normale N un angle inférieur à l'angle de frottement, le mouvement ne peut pas avoir lieu.

Quant à l'effort normal N, agissant à la distance X du centre de gravité, il tend à produire, à la fois, une compression générale et une rotation, cette dernière répondant à un moment fléchissant $M = N \times X$ ou $M = \overline{Aa} \times t$. Ces deux expressions sont équivalentes; et nous avons étudié très complètement les effets produits par cette double cause aux n°s 329, 330 et 331, que nous conseillons de relire en entier. Nous nous contenterons d'en donner ici le résumé.

Résumé. — Les efforts fibraires développés dans les fibres extrêmes ont pour expression

$$p' = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{X}{\alpha}\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la fibre la plus fatiguée D, située} \\ \text{du même côté que le centre de pression} \\ \text{K (\textit{fibre intérieure}),} \end{array} \right.$$

$$p'' = \frac{N}{\Omega}\left(1 - \frac{X}{\alpha}\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la fibre la moins fatiguée, située} \\ \text{du côté opposé au centre de pression} \\ \text{(\textit{fibre extérieure}).} \end{array} \right.$$

Dans ces formules Ω est la surface de la section, c'est-à-dire du panneau de lit, α est la dimension du noyau central et, dans le cas d'une section rectangulaire de hauteur b, on a $\alpha = 1/6b$.

Nous avons distingué deux cas :

1° Les surfaces sont rivées, ce qui veut dire que la fibre p'' peut, non seulement, ne plus être comprimée mais encore subir une traction.

Cela aura lieu si l'on a $X > \alpha$, c'est-à-dire si le centre de pression sort en dehors du noyau central.

2° Les surfaces sont simplement posées ; tel est le cas des pierres posées à joints vifs. Alors si l'on a $X = \alpha$, c'est-à-dire si le centre de pression tombe à la limite du noyau central, on a

$$p'' = 0 \qquad \text{et} \qquad p' = \frac{2N}{\Omega},$$

ce qui veut dire que l'arête située du côté opposé au centre de pression (ou *arête extérieure*) ne porte plus, tandis que l'arête située du même côté (ou *arête intérieure*) subit une pression unitaire p qui est le double de ce qu'elle serait si le centre de pression coïncidait avec le centre de gravité.

Si le centre de pression sort du noyau central alors il y a *décollement* du côté de l'arête extérieure (v. n° 330) ; une zone *inerte* se déclare ; la zone *active* se réduit de plus en plus à mesure que le centre de pression se rapproche de l'arête intérieure ; cette zone active a une étendue qui est toujours le triple de la distance du centre de pression à cette arête intérieure.

Dès que le centre de pression sort du noyau central le danger d'écrasement croît très rapidement et nous pourrions poser en principe, ce que nous appellerons le *condition de canalisation* à savoir que :

Dans une voûte, jamais le centre de pression ne devrait sortir du noyau central.

Cette condition est bien rigoureuse, car elle force la courbe des centres de pression à se tenir dans une sorte de *canal central* qui n'aurait comme hauteur qu'un sixième de la hauteur des voussoirs, de part et d'autre de la fibre neutre, soit un tiers en tout.

Voyons si l'emploi de bons mortiers, bien adhérents et possédant par eux-mêmes une certaine résistance à la traction, ne permettrait pas d'augmenter les dimensions de ce canal central et, par suite, d'avoir plus de marge pour loger la courbe des centres de pression.

460. **Conséquences de l'adhérence des mortiers.** — (*a*) **Noyau central mixte.**

Dans le cas où le mortier est de bonne qualité, il produit une adhérence des pierres qui s'oppose à leur décollement tant que l'effort de traction ne dépasse pas une certaine limite, qui varie d'ailleurs avec la nature des pierres, avec celle du mortier et avec la façon dont il est employé.

En général, on peut admettre que les bons mortiers de ciment résistent, avant de se détacher des pierres auxquelles ils adhèrent à une charge variant de 1/5 à 1/20 de la charge de la rupture par écrasement de ces mêmes mortiers. On pourra donc, dans ce cas, assimiler les maçonneries à des pièces rivées dans lesquelles l'effort de traction que pourront subir les fibres sera une fraction déterminée $1/n$ (variant de 1/5 à 1/20) de l'effort de compression. Il en résultera, comme nous allons le voir, que les dimensions du noyau central seront augmentées.

En effet, posons-nous les deux questions suivantes :

1re Question.

« A quelle distance α' le centre de pression devrait-il se « trouver du centre de gravité pour que la fibre extérieure « travaille à un effort de traction qui soit $1/n$ de l'effort de « compression supporté par la fibre intérieure ? »

Dans les formules qui donnent p' et p'' nous écrirons que $X = \alpha'$ et que $p'' = p' : n$, ce qui nous donnera, en ne considérant que les valeurs absolues de p' et de p'',

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha}\right), \qquad \text{d'où}$$

$$\alpha' = \alpha\frac{n+1}{n-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n+1}{n-1}.$$

Nous nommerons *noyau central mixte*, la limite α' déterminée par la formule ci-dessus.

(*b*) **2e Question.** « p_1 étant, avec lit de mortier, l'effort « unitaire de compression supporté par la fibre extrême in- « térieure lorsque la pression agit à la limite α' du noyau « central mixte, et p' étant l'effort unitaire que supporte- « rait la même fibre si, le mortier venant à céder ou même « n'ayant jamais été interposé, la pression agissait à cette « même distance α' du centre, calculer le rapport $p' : p_1$. »

Remarquons que Ω peut être pris égal à b puisque la profondeur de la voûte est de 1 mètre, et que $b = 3.\alpha$ Dès lors :

1° Si le mortier existe,

$$p_1 = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \frac{N}{6\alpha}\left(1 + \frac{\alpha'}{\alpha}\right).$$

2° Si le mortier n'existe pas, il se produit un décollement du côté de l'arête extérieure ; la zone active (fig. 439) a une surface

$$\Omega' = 3\left(\frac{b}{2} - \alpha'\right) = 3(3\alpha - \alpha').$$

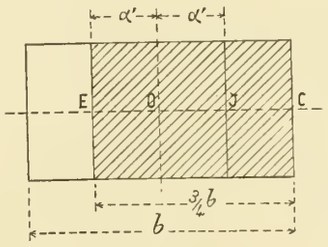


Fig. 439

Sur l'arête intérieure, comprimée, la pression unitaire p' est le double de ce quelle serait si le centre de pression tombait au centre de cette zone active ; on a donc :

$$p' = \frac{2N}{\Omega'} = \frac{2N}{3(3\alpha - \alpha')} = \frac{2N}{3\alpha\left(3 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)},$$

d'où l'on déduit, après simplifications,

$$\frac{p'}{p_1} = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} = 1 + \frac{1}{n(n-2)}.$$

Cette formule a permis de calculer la troisième colonne du tableau ci-après. Elle prouve que, même dans le cas le plus favorable, celui où l'adhérence est grande ($1/n = 1/5$), l'arête comprimée se ressent fort peu du manque d'adhérence du mortier tant que le centre de pression ne sort pas du noyau central mixte.

(*c*) **Résultats.** — Les résultats répondant à différentes valeurs de n sont consignés dans le tableau ci-dessous.

TABLEAU

DES EFFETS DE L'ADHÉRENCE DU MORTIER

$\frac{1}{n} =$	$\alpha' =$	$p' : p_1$
0	$1{,}000\alpha = 0{,}166b = \frac{1}{6}b$	
$\frac{1}{20}$	$1{,}105\alpha = 0{,}184b$	$1 + \frac{1}{360}$
$\frac{1}{15}$	$1{,}143\alpha = 0{,}190b$	$1 + \frac{1}{195}$
$\frac{1}{10}$	$1{,}222\alpha = 0{,}204b$	$1 + \frac{1}{80}$
$\frac{1}{5}$	$1{,}500\alpha = 0{,}250b = \frac{1}{4}b$	$1 + \frac{1}{15}$

Dans ce tableau les lettres ont les significations suivantes :

b, hauteur de la section supposée rectangulaire ;

α, limite du noyau central vrai, $\alpha = 1/6\ b$;

$\frac{1}{n}$, *coefficient d'adhérence*, c'est-à-dire rapport de la résistance d'adhérence du mortier à la traction, à sa résistance à la compression ;

α', limite du noyau central mixte, ou distance à laquelle doit agir la pression pour que sur l'arête extérieure, tirée, le mortier travaille à $1/n$ de ce qu'il travaille sur l'arête intérieure comprimée ;

p', effort unitaire supporté par la fibre intérieure, comprimée, lorsque la pression agit à la distance α', les voussoirs étant posés sans mortier;

p_1, effort unitaire de la même fibre lorsque les pierres sont posées avec mortier.

(*d*) **Conclusions.** — Nous tirerons de cette étude les conclusions suivantes :

1° On sera dans les meilleures conditions si le centre de pression tombe toujours dans l'intérieur du noyau central vrai ($\alpha = 1/6\ b$) et la pression unitaire sur l'arête intérieure, celle qui est la plus comprimée, ne dépassera jamais le double, soit les 4/2 de la pression moyenne N : Ω.

2° On pourra, en admettant un mortier dont le coefficient d'adhérence sera (dans les conditions les plus favorables) $1/n = 1/5$, accepter que le centre de pression, tombe dans l'intérieur du noyau central mixte ($\alpha' = 1/4\ b$ au lieu de $1/6\ b$ pour $1/n = 1/5$) et dans ce cas la pression unitaire sur la fibre intérieure p_1 ne dépassera jamais les 5/2 de la pression moyenne N : Ω, au lieu des 4/2 du cas précédent.

3° Si, en acceptant le noyau central mixte qui précède, le mortier voit son adhérence cesser, il n'y aura pas encore grand danger car l'effort unitaire de la fibre intérieure n'augmentera, au plus, que de 1/15 de la valeur qu'il possédait avant la cessation de l'adhérence.

461. Résistances de sécurité des maçonneries.

(*a*) **Résistance à la compression.** — On évalue ordinairement la résistance de sécurité d'une pierre, à la compression ou à l'extension, au dixième de la charge qui en amène la rupture par compression ou par extension dans un temps très court.

On se tient généralement très au-dessous de cette limite, mais on peut la dépasser dans des ouvrages très soignés et aller jusqu'au cinquième.

On donne souvent des moyennes de ces résistances, s'appliquant aux différentes sortes de pierres; mais il est toujours préférable, lorsqu'on veut construire un ouvrage important, de ne pas se fier à ces moyennes et de faire des essais sur les matériaux mêmes qu'on devra employer.

Nous donnons ci-dessous d'après M. **Résal** (Ponts en maçonnerie) un tableau de ces moyennes.

D'après des expériences de M. **Tourtay**, Ingénieur des Ponts et Chaussées, faites sur des maçonneries constituées avec du calcaire dur, du calcaire moyennement dur ou du calcaire tendre, le mortier employé étant du mortier de ciment à prise lente, dit *ciment Portland*, du mortier de chaux hydraulique, ou un coulis de ciment à prise lente, il résulte les conclusions suivantes :

1° L'écrasement du mortier dans les maçonneries a lieu sous des pressions très supérieures à la résistance du mortier seul, mais très-inférieures à celles de la pierre seule.

2° Toutes choses égales, la pression qui produit l'écrasement du mortier est en raison inverse de l'épaisseur du joint.

Il semble donc qu'il y aurait intérêt à réduire autant que possible l'épaisseur des joints.

POIDS ET RÉSISTANCES DES MAÇONNERIES

	DÉSIGNATION DES MATÉRIAUX	POIDS du mètre cube en kilogr.	CHARGE de rupture à la compression par cent. carr. en kilog.	CHARGE de rupture à la traction par cent. carré en kilogr.
Pierres Calcaires	Pierres marbres. .	de 2500 à 2700	de 650 à 1050	40
	Durs compactes . .	2100 à 2600	150 à 800	20
	Durs grossiers et coquilliers . . .	1800 à 2450	80 à 500	14
	Demi-durs	1650 à 2000	60 à 160	8
	Tendres	1380 à 1750	25 à 80	4
	Crayeux	1300 à 1600	18 à 35	»
P. Silicieuses	Meulières.	1200 à 1550	20 à 80	»
	Grès	2100 à 2300	280 à 700	22
Roches éruptives	Basalte d'Auvergne	2950	2000	80
	Laves	2000 à 2600	230 à 600	40
	Porphyres et granits à grains fins.	2600 à 2900	800 à 1500	60
	Granits à gros grains .	2500 à 2800	400 à 1000	40
Mat. artificiels	Briques de Bourgogne bien cuites .	2000	150	21
	Briques rouges de Paris.	1700	90	14
	Briques mal cuites.	1650	40	6

Néanmoins il faut remarquer que le mortier interposé entre deux pierres a surtout comme fonction de garnir les vides irréguliers, ou *flaches*, qui restent entre elles et de former comme une sorte de matelas plastique répartissant les pressions aussi également que possible. Réduire, par trop, l'épaisseur de ce matelas serait lui enlever la faculté de jouer ce rôle.

3° Les pierres superposées, sans interposition de mortier, donnent des résistances notablement inférieures à celle de la pierre, et supérieures à celle de la maçonnerie avec joint de mortier si les faces des pierres sont parfaitement dressées et aplanies de manière que le contact soit aussi parfait que possible. C'est ainsi qu'a été construit le Parthénon.

Il faut remarquer que la réalisation de ces conditions ne serait possible, dans des travaux de quelque importance, qu'au prix d'une très grande dépense de main-d'œuvre.

4° Les pierres réunies par un simple coulis de ciment aussi mince que possible, les bulles d'air étant bien chassées, paraissent travailler comme des monolithes et donnent des résistances supérieures à celles des maçonneries avec joints.

Si une maçonnerie à joints de mortier est mal exécutée, avec des joints irréguliers et mal remplis, sa résistance sera inférieure même à celle du mortier.

Dans une maçonnerie à joints épais, bien exécutée, la résistance à l'écrasement peut être prise égale à celle du mortier.

Enfin si les joints sont minces, la maçonnerie étant construite par assises bien réglées, et de hauteur uniforme, la résistance est supérieure à celle du mortier, et on peut adopter une résistance de sécurité égale à 1/5e ou 1/6e de la charge de rupture du mortier seul.

Les résistances *de sécurité* adoptées en général pour des maçonneries bien exécutées sont les suivantes :

Béton avec mortier de chaux hydraulique 4 à 5 k. par cent.
Maçonnerie de briques avec mortier ordre 6 k.
» » » de ciment 8 à 10 k.
» de moellons ou de pierres tendres 6 à 15 k.
» de pierre dure avec mortier de chaux hydraulique . . . . . 20 à 30 k.

Ces chiffres ne sont que des moyennes, de même que le poids de 2400 k. admis souvent pour le mètre cube de maçonnerie. Ils sont essentiellenent variables suivant les matériaux employés et, surtout, suivant le soin avec lequel les maçonneries sont exécutées.

(*b*) **Résistance à la traction.** — On ne doit pas compter, en général, sur la résistance à la traction d'une maçonnerie car elle est très faible.

La résistance de sécurité à la traction ne doit jamais dépasser le vingtième de la charge de rupture du mortier à la compression.

Cette résistance ne dépend, en effet, que de l'adhérence du mortier sur la pierre ; elle n'atteint une valeur appréciable que lorsque le mortier est complètement durci, ce qui exige parfois un temps fort long.

C'est un fait d'expérience qu'une maçonnerie exécutée depuis moins d'une année, même avec d'excellent mortier, est facile à démolir, tandis que dans de très vieilles maçonneries, même peu soignées d'exécution, l'arrachage des moellons est devenu presque impossible. En résumé, il ne faut compter sur la résistance de la maçonnerie à la traction que si les efforts de traction ne doivent y être développés que longtemps après son exécution, si elle a été construite avec beaucoup de soin, et avec d'excellent mortier de ciment.

(*e*) **Résistance à l'effort tranchant et au glissement.** — L'effort tranchant développé dans la masse d'un voussoir ne sera jamais à craindre et il y aura toujours assez de matière pour y résister.

S'il est développé sur un plan de lit il tend à produire un glissement relatif des deux voussoirs en contact.

Le glissement ne se produira pas si la résultante des pressions agissant sur le joint fait avec la normale un angle inférieur à l'angle de frottement.

Si le mortier est frais, cet angle est de 27° environ ; mais avec des pierres compactes, lisses et bien taillées, il peut descendre à 20°.

Lorsque le mortier a fait prise, il s'élève à 35° et il atteint

45° lorsque le mortier est complètement durci. D'ailleurs, à ce moment, l'adhérence du mortier sur la pierre entre en jeu, et il est possible que des assises inclinées sous un angle de 60° ne glissent pas l'une sur l'autre.

Il résulte des travaux de M. **Choisy** (L'Art de bâtir chez les byzantins) que les voûtes byzantines étaient construites sans cintres en utilisant, pour les monter, l'adhérence des mortiers.

§ 2. — Avant-projet d'une voûte

462. **Données provisoires du problème.** — L'étude d'un projet de voûte se présente ordinairement de la manière suivante :

On se donne la courbe d'intrados; c'est *la donnée de figure* ou *donnée architecturale* de la question.

On se donne aussi la charge totale que doit supporter la voûte ; cette *donnée de charge* comprend :

1° Le poids propre des voussoirs (poids inconnu, puisque les dimensions des voussoirs seront le résultat de l'étude du projet) ;

2° Le poids des tympans, pleins ou évidés, et celui du tablier ;

3° La surcharge accidentelle, laquelle est remplacée, aux essais de réception, par une surcharge d'épreuve (couche de sable ou trains de chemin de fer).

Comme nous ne connaissons pas l'épaisseur de la voûte, ni par suite la position de sa fibre neutre, nous nous donnerons comme point de départ une fibre neutre *d'essai* déterminée de la manière suivante :

Des formules empiriques, que nous donnerons plus loin, permettent de connaître approximativement l'épaisseur d'une voûte à la clef, aux reins et aux naissances.

Ces épaisseurs étant *acceptées provisoirement* nous prendrons les milieux du joint de clef et du joint de naissance, et nous ferons passer par ces deux points une fibre neutre, également provisoire, s'écartant régulièrement de l'intrados ; nous mènerons ensuite des normales aux divers points de cette fibre neutre, nous les prolongerons d'une quantité égale au segment intercepté sur elles entre l'intrados et la fibre neutre, ce qui nous fournira l'extrados provisoire.

Nous essaierons alors de reconnaître, par les méthodes qui seront exposées plus loin, si la voûte est dans des conditions convenables de stabilité.

En résumé, ces données provisoires exigent :

1° la connaissance de l'intrados ; le projet architectural la fournit et, en général, définitivement ;

2° L'épaisseur à la clef ;

3° L'épaisseur aux naissances, ou l'épaisseur aux reins. Ce sont des formules empiriques qui vont nous fournir des indications pour ces deux dernières données.

463. **Formules empiriques donnant les épaisseurs.** — Ces données dépendront des éléments suivants :

1° L'ouverture de la voûte ;

2° Le profil de sa courbe d'intrados ;

3° La charge et les surcharges ;

4° La nature et la résistance des matériaux employés ;

5° Les conditions d'exécution et de décintrement de la voûte.

Une formule empirique ne saurait tenir compte de toutes ces conditions ; aussi les formules proposées par les différents ingénieurs qui se sont occupés de la question ne tiennent compte que des deux premières, l'ouverture et le profil de l'intrados.

Ces formules ne peuvent donc être employées qu'avec la plus grande réserve ; elles fournissent simplement un point de départ pour l'étude de la voûte projetée.

Dans ces formules, $2a$ désigne l'ouverture,

e l'épaisseur à la clef mesurée normalement à l'intrados,

R le rayon de courbure de l'intrados dans le cas de voûtes circulaires, et, dans le cas de voûtes elliptiques, le rayon de la voûte en arc de cercle qui aurait la même ouverture et la même montée.

(*a*) **Epaisseur à la clef** — Nous donnons ici les formules de **Croizette-Desnoyers**, Inspecteur général des ponts et chaussées, formules dans lesquelles il a essayé de tenir compte de l'influence des charges.

1° *Voûtes en plein-cintre.*

a. Ponts-routes $e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2R}$.

b. Ponts de chemins de fer $e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{2R}$.

2° *Voûtes en arc de cercle.*

a. Ponts-routes :

Surbaissement $\frac{1}{4}$ $e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2R}$,

» $\frac{1}{6}$ $e = 0{,}15 + 0{,}14\sqrt{2R}$,

» $\frac{1}{8}$ $e = 0{,}15 + 0{,}13\sqrt{2R}$,

» $\frac{1}{10}$ $e = 0{,}15 + 0{,}12\sqrt{2R}$,

» $\frac{1}{12}$ $e = 0{,}15 + 0{,}11\sqrt{2R}$.

b. Ponts de chemins de fer :

Surbaissement 1/4 $e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{2R}$,
» 1/6 $e = 0{,}20 + 0{,}16\sqrt{2R}$,
» 1/8 $e = 0{,}20 + 0{,}15\sqrt{2R}$,
» 1/10 $e = 0{,}20 + 0{,}14\sqrt{2R}$,
» 1/12 $e = 0{,}20 + 0{,}13\sqrt{2R}$.

3° *Voûtes elliptiques.*

a. Ponts-routes $e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{2R}$.
b. Ponts de chemins de fer $e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{2R}$.

4° *Voûtes surhaussées, ogivales ou elliptiques.*

M. **Résal** propose la formule

$$e = 0{,}15 + 0{,}20\,\frac{a}{\sqrt{b}},$$

b étant la montée de la voûte.

(*b*) **Epaisseur aux reins de la voûte.** — On convient d'appeler *rein* d'une voûte plein-cintre ou d'une voûte elliptique le joint qui coupe l'intrados au milieu de la montée. Dans une voûte surbaissée en arc de cercle, c'est le joint de naissance qu'il faudra considérer.

Croizette-Desnoyers indique entre l'épaisseur à la clef et l'épaisseur aux reins d'une voûte les rapports suivants:

Pleins-cintres		2
Arcs de cercle surbaissés au	1/4	1,80
»	1/6	1,40
»	1/8	1,25
»	1/10	1,15
»	1/12	1,10
Ellipses surbaissées au	1/3	1,80
»	1/4	1,60
»	1/5	1,40

Pour les voûtes surhaussées, il semble rationnel d'adopter le rapport indiqué pour les pleins-cintres.

(*c*) **Epaisseur des culées.** — Des formules empiriques ont été également données par divers auteurs pour la détermination de cette épaisseur ; nous donnerons plus loin une méthode permettant cette détermination d'une façon beaucoup plus rationnelle et presque aussi rapide que par l'emploi de ces formules ; nous n'en parlerons donc pas.

(*d*) **Application.** — Calculer les données provisoires de la voûte ci-dessous.

Elle doit servir pour un pont de chemin de fer.

Ouverture $2a = 24^m$, d'où $a = 12^m$.

En arc de cercle surbaissée à 1/6, d'où $b = 4^m$.

On en déduit $R = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{144}{4} + 4\right) = 20^m$.

Les formules empiriques de Croizette-Desnoyers donnent :

épaisseur à la clef $e = 0{,}20 + 0{,}16\sqrt{2R} = 1{,}21$.

épaisseur au rein $e' = 1{,}40\,e = 1{,}69$.

Et nous savons que, pour les voûtes surbaissées en arc de cercle, le rein se confond avec le joint de naissance. Dès lors (fig. 450),

1° On trace en AB l'intrados définitif, en arc de cercle ;

2° On prend à la clef $BB'' = 1^m{,}21$ et en B′ le milieu de BB″ ;

3° On prend à la naissance $AA'' = 1{,}79$ et en A′ le milieu de AA″ ;

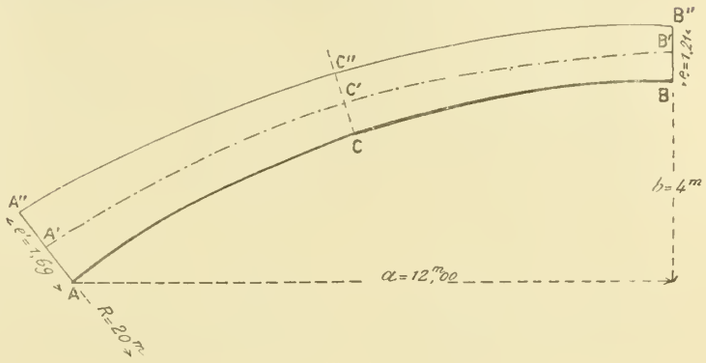


Fig. 450

4° On réunit B′ et A′ par une courbe s'écartant régulièrement de l'intrados ; cette courbe peut être un arc de cercle ;

5° On mène les normales telles que CC′ et, les prolongeant d'une longueur égale de C′ en C″, on en déduit les points d'extrados, tels que C″, en aussi grand nombre que l'on voudra.

Une fois cela fait on procède, comme nous allons le dire, à une première évaluation des charges et des surcharges.

464. **Charges et surcharges d'une voûte.** — (*a*) **Mode d'action de la surcharge.** — La voûte est soumise aux charges et aux surcharges suivantes :

1° Le poids des voussoirs, dont la valeur approximative est déterminée d'après les épaisseurs provisoires trouvées ci-dessus ;

2° Le poids des tympans et du tablier;

3° Les surcharges accidentelles ; ces deux charges agissent sur l'extrados de la voûte.

Si les tympans sont en maçonnerie, l'expérience a montré qu'une rupture de la voûte suivant un joint AB détermine, en général, une rupture à peu près verticale du tympan suivant AC (fig. 451-I).

On peut donc admettre que la portion de charge et de surcharge qui agit sur un voussoir ABA′B′ est limitée par les verticales AC et A′C′.

(*b*) **Détermination des forces verticales agissant sur la voûte.** — Nous commencerons par diviser la voûte en un certain nombre de voussoirs, et nous mènerons les verticales telles que AC et A′C′ limitant les portions de surcharge correspondant à chacun d'eux. Cela posé :

1re Méthode. — Soit AA'BB' un voussoir ; son centre de gravité est G, et nous devons appliquer en ce point une force f égale au poids de ce voussoir sur 1m de longueur (fig. 451-I). La portion de tympan, ou le remplissage situé au-dessus suivant ACC'A', a pour centre de gravité, G_1 et nous appliquons en ce point une force f_1 égale au poids du prisme ayant pour base le trapèze ACC'A' et 1m de longueur. De même pour la chaussée représentée par le rectangle CDD'C' et pour la surcharge représentée par une force f_3 appliquée au milieu G_3 de DD'.

En composant ces forces f, f_1, f_2, f_3, nous aurons la résultante telle que R des actions verticales sur le voussoir considéré. Cette méthode est longue ; on peut opérer autrement et presque aussi exactement comme suit.

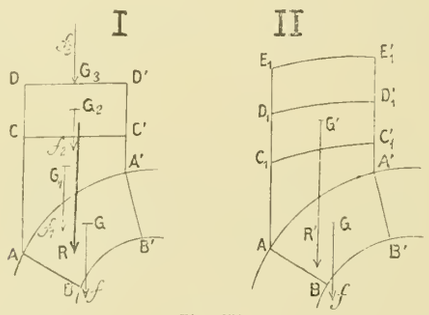


Fig. 451

2e Méthode. — Ramenons (fig. 451-II) toutes les surfaces de charges à la même densité que la maçonnerie qui constitue les voussoirs. Soit d la densité de cette maçonnerie, d' celle des tympans ; nous remplacerons le trapèze ACC'A', représentant la portion du tympan correspondant au voussoir, par un autre trapèze $AC_1C'_1A'$ dans lequel chaque ordonnée y' sera égale à l'ordonnée correspondante y du trapèze ACC'A' réduite, ou augmentée, dans le rapport de la densité d' à la densité d ; soit $y' = y(d' : d)$.

Opérons de même pour la chaussée, et pour la surcharge que nous représenterons par une surface de maçonnerie $D_1E_1E'_1D'_1$ de densité d.

Une fois cela fait, nous prendrons, en bloc, le centre de gravité G' du trapèze curviligne, homogène, $AE_1E'_1A'$ ainsi obtenu et nous appliquerons, en ce point, une force R' égale à la résultante trouvée précédemment des forces f_1, f_2 et f_3.

Cette force composée avec le poids f du voussoir donnera la résultante finale R et sa position sera très peu différente de celle qu'on aurait trouvée en opérant par la première manière.

Quant aux deux forces f et R', elles seront composées soit graphiquement, soit par la méthode des moments, en prenant directement sur l'épure, avec un double décimètre, les mesures nécessaires.

Supposons que ces opérations préliminaires soient faites : nous connaîtrons, dès lors, les forces (charges et surcharges) qui agissent directement sur chaque voussoir stéréotomique. Si l'on connaissait, en outre, les réactions que chacun d'eux subit de la part de ses voisins, on verrait s'il est, ou non, en équilibre statique et en équilibre moléculaire. Nous avons même vu au début (v. fig. n° 459), que si l'on connaissait en grandeur, direction et position la poussée que la clef reçoit de la demi-voûte, on en déduirait, de proche en proche, la ligne des pressions et, comme conséquence, les réactions successives des voussoirs les uns sur les autres. Cette étude va faire l'objet du paragraphe suivant.

465. **Les trois conditions de stabilité.** — Une voûte ne peut s'effondrer que si certains de ses voussoirs sont dérangés de leur position ou bien s'ils sont détruits.

Les voussoirs peuvent être déplacés :

1° Par rotation autour d'une de leurs arêtes, soit d'intrados, soit d'extrados ;

2° Par glissement les uns sur les autres suivant les surfaces de lit. Enfin :

3° Les voussoirs peuvent être d'abord déformés et ensuite détruits par écrasement de la pierre qui les constitue.

Aucun de ces effets ne doit pouvoir se produire si l'on veut que la voûte soit stable et durable.

(*a*) **Condition d'équilibre.** — Pour qu'il n'y ait pas rotation des voussoirs autour des arêtes d'intrados ou d'extrados, il faut que ces voussoirs soient en équilibre statique. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que la courbe des centres de pression soit toute entière comprise entre les surfaces d'intrados et d'extrados.

C'est la condition d'équilibre statique.

(*b*) **Condition de frottement.** — Pour qu'il n'y ait pas glissement d'un voussoir sur un autre, il faut que ce glissement soit empêché par le frottement et, pour cela, il est nécessaire et suffisant que la résultante des forces agissant sur chaque lit fasse avec la normale au plan de lit un angle inférieur à l'angle de frottement, angle que l'on peut évaluer à 35° lorsqu'il y a du mortier interposé entre les voussoirs et que ce mortier a fait prise ; on ne décintre jamais, en effet, une voûte avant ce moment.

C'est la condition de frottement.

(*c*) **Condition de résistance.** — Enfin, pour que les voussoirs ne s'écrasent pas, il faut qu'en aucun point la pression par unité de surface qu'ils supportent ne dépasse pas la résistance de sécurité qui peut être attribuée aux matériaux dont ils sont composés.

C'est la condition de non-écrasement ou de résistance.

Nous avons vu au paragraphe précédent quelles étaient

les valeurs des efforts unitaires sur les fibres les plus fatiguées suivant la position qu'occupe le centre de pression sur chaque joint. Nous avons vu aussi qu'on sera dans les conditions les plus favorables si la courbe des centres de pression ne sort pas du noyau central vrai, si on ne compte pas sur l'adhérence des mortiers ou du noyau central mixte, si on croit pouvoir compter sur cette adhérence.

466. **Les trois méthodes de vérification :**

1° La plus ancienne est la *méthode des courbes de pression hypothétiques*, *dite méthode de* **Méry**. Nous avons vu n° 378*b*, que si l'on connaît la poussée et son point d'application, ou, ce qui revient au même, le point d'application de la poussée et un point de la courbe des pressions, cette courbe est entièrement déterminée.

Méry, se basant sur des expériences de **Boistard**, se donne, *à priori*, ces deux points ; et en étudiant la courbe de pression obtenue dans cette hypothèse, il cherche si elle correspond à une solution d'équilibre. Il semble ainsi admettre que c'est cette courbe qui prendra naissance dans la voûte ; il y a donc là une pétition de principe analogue au principe de l'*horreur du vide* dont les anciens physiciens faisaient la base de la théorie des fluides.

L'influence de la résistance des matériaux n'est pas mise suffisamment en évidence dans cette méthode, et les parties faibles de la voûte ne sont pas nettement indiquées ;

2° **A. Durand-Claye**, partant du principe que la courbe des pressions doit être compatible non seulement avec les conditions d'équilibre statique, mais encore avec les conditions de résistance des matériaux, a généralisé la méthode précédente par l'emploi des *aires de stabilité*. Ces aires permettent de trouver toutes les poussées compatibles avec la stabilité de la voûte, et de reconnaître tous les points réellement faibles de cette voûte, en même temps qu'elles donnent, en quelque sorte, une mesure de la stabilité de la construction. Le général **Peaucellier** a donné une méthode basée sur les mêmes principes ;

3° Enfin, des considérations que nous développerons plus loin, permettent d'assimiler la voûte à un arc élastique encastré sur ses deux sommiers, à la condition que nulle part le centre de pression ne tombe en dehors du noyau central, c'est-à-dire que les matériaux ne résistent partout qu'à des efforts de compression. C'est la méthode des *déformations élastiques*.

Nous allons exposer chacune de ces trois méthodes.

§ 3. — Méthode des courbes de pression hypothétiques, dite méthode de Méry

467. **Principe de la méthode.** — La voûte ayant ses dimensions établies provisoirement au moyen des formules empiriques ci-dessus, nous la décomposerons en voussoirs, et nous chercherons les charges appliquées à chacun d'eux, comme il a été dit plus haut ; nous construirons ensuite une ligne des pressions mais en nous donnant deux points de cette ligne, savoir :

1° Le point de départ sur la clef, qui sera pris au tiers supérieur du joint de clef ;

2° Le point sur le joint de rupture, point situé au tiers inférieur de ce joint.

Nous dirons tout à l'heure ce qu'il faut entendre par *joint de rupture* (V. n° 468) et comment on le détermine.

La distance de la courbe des centres de pressions à l'intrados présentera donc un maximum à la clef, et un minimum au joint de rupture.

Il en résulte que sur ce joint, aussi bien que sur la clef, la tangente à la courbe des centres de pressions sera parallèle à la tangente à l'intrados. C'est ce qui va servir à le déterminer.

M. Méry a déduit cette méthode d'expériences faites par Boistard sur la stabilité des voûtes en maçonnerie. Boistard a constaté, en effet, qu'une voûte circulaire, d'une massivité insuffisante, s'ouvre à la clef du côté de l'intrados et au joint dit de rupture C, du côté de l'extrados. Donc, la courbe des centres de pressions doit être plus rapprochée de l'extrados à la clef, et plus rapprochée de l'intrados au joint de rupture. Or, comme il ne faut pas que les joints s'ouvrent, la courbe ne doit pas sortir du noyau central, ce qui veut dire que les points où elle rencontre les joints de clef et de rupture ne peuvent dépasser, pour la clef, le tiers de la largeur du joint, du côté de l'extrados, et pour le joint de rupture, le tiers du côté de l'intrados.

Si nous prenons les limites du noyau central de chaque section et si nous joignons ces limites par deux courbes continues, elles comprennent entre elles une surface annulaire que nous nommerons le *canal central*.

Ce sera le *canal central vrai* si nous prenons les limites du noyau central vrai, et le *canal central mixte*, si nous prenons les limites du noyau central mixte.

La première chose à faire est donc de déterminer le joint de rupture, c'est ce que nous faisons plus loin. On tracera ensuite la ligne des pressions, après avoir déterminé la grandeur de la poussée. La courbe des pressions étant tracée, on s'assurera qu'elle reste partout assez éloignée de l'intrados et de l'extrados de manière à ce qu'en aucun point la charge de sécurité des matériaux ne soit dépassée. Si cette condition n'est pas remplie, on modifiera légère-

ment le tracé de l'extrados de manière qu'elle puisse être satisfaite.

Cette méthode est encore très usitée à cause de sa simplicité ; elle donne des résultats suffisamment exacts pour les voûtes dont l'intrados se rapproche très sensiblement de la forme circulaire entre la clef et le joint de rupture (plein-cintre, arc de cercle, ellipse), à la condition que les charges soient réparties comme elles le sont ordinairement dans les ponts en maçonnerie. Lorsque l'intrados de la voûte diffère notablement du profil circulaire, ou que la surcharge est répartie d'une manière anormale, cette méthode conduit à des résultats peu exacts et qui ne satisfont pas l'esprit.

468. **Détermination du joint de rupture.** — Soit AB (fig. 452) le joint de rupture supposé connu, et P le poids de la portion de voûte située au-dessus; soit T la poussée supposée appliquée au point J, tiers supérieur de la clef : cette poussée T coupe la force P en un point K. La droite menée par le point I, tiers inférieur du joint de rupture, parallèlement à la tangente en B à l'intrados, doit, si AB est bien le joint de rupture, passer au point K, puisque cette droite doit donner en position la résultante des forces T et P. Tel serait en AB le vrai joint de rupture.

Mais il est peu probable que l'on trouve ainsi, du premier coup, le véritable joint de rupture AB. On le déterminera comme suit, par une courbe d'erreur K'KK''.

Faisons la même construction pour un joint A'B' que l'on aura lieu de croire situé près du véritable joint de rupture; nous trouverons que la parallèle I'K' menée par le point de tiers I', à la tangente en B' à l'intrados, rencontre la force P' au point K' situé, je suppose, *au-dessous* de JT.

Pour un autre joint A''B'', situé de l'autre côté du joint AB, nous trouverons de même un joint K'' situé *au-dessus* de JT.

Le lieu des points K' et K'' sera une courbe d'erreur que l'on tracera et qui rencontrera au point K la droite JT.

Par le point K menons une parallèle à la tangente en B' à l'intrados ; elle rencontre en M' le joint A'B'. Traçons de même une droite KM'' parallèle à la tangente en B'' à l'intrados, et rencontrant en M'' le joint A''B'' ; le lieu des points M'M'' est une seconde courbe qui passe au point I du joint de rupture, et ce point I doit être en même temps sur la limite du canal central, située du côté de l'intrados ; le joint de rupture AB sera donc ainsi déterminé.

Remarques. — Pour les voûtes en plein-cintre, le joint de rupture fait avec l'horizontale un angle variant de 25 à 35°, et s'écarte ordinairement peu de la valeur moyenne 30°.

Pour les ellipses surbaissées et les anses de panier, il est placé dans le voisinage du milieu de la montée.

Enfin pour les voûtes en arc de cercle on prend ce joint aux naissances ; mais alors, la tangente à la courbe des centres de pressions n'est plus, au droit de ce joint, forcément parallèle à la tangente à l'intrados.

469. **Construction des courbes de pression.**

(*a*) **Courbe des pressions répondant à une poussée quelconque.** — Nous avons dit qu'en prenant une poussée d'essai *t* appliquée en un point de la clef, on pouvait construire une courbe des pressions. Appliquons cette poussée au tiers supérieur de la clef, et construisons un funiculaire des charges verticales, avec une distance polaire *graphiquement égale* à *t* (fig. 453).

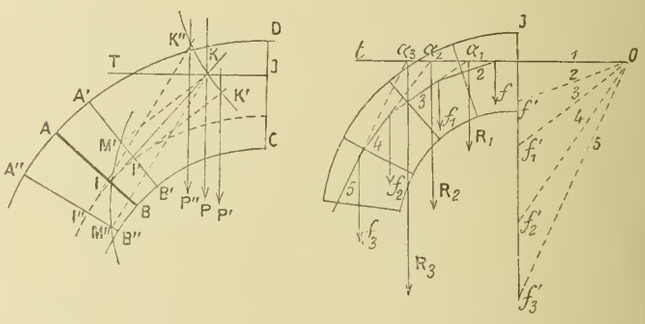


Fig. 452 Fig 453

Nous prendrons les forces verticales dans leur ordre successif en allant de la clef au sommier, et nous prendrons le premier rayon polaire horizontal ; le funiculaire ainsi construit sera la ligne des pressions correspondant à la poussée *t*. Ce tracé nous permettra, en outre, de trouver en $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, par les recoupements successifs des côtés du funiculaire avec son côté initial, qui est la poussée J*t*, les positions des résultantes partielles R_1, R_2, etc., qui représentent le poids de 2, 3, etc. voussoirs en partant de la clef.

La dernière de ces résultantes sera la résultante totale R.

Une courbe des pressions étant tracée avec la poussée d'essai *t*, je dis que nous pourrons en déduire la courbe de pression passant par un premier point donné à la clef et par un second point donné sur le joint de rupture.

Résolvons d'abord le problème préliminaire suivant :

(*b*) **Problème préliminaire.** — On donne une courbe (fig. 454) et trois points M, N, P sur cette courbe ; sur les verticales de ces trois points, on prend respectivement trois autres points *m*, *n*, *p* :

1° Faire passer par ces trois points une courbe dont les ordonnées, telles que *pp'*, soient une réduction, ou une amplification, des ordonnées telles que PP', de la première ;

2° Déterminer le rapport de réduction.

Menons les droites MN, *mn* (fig. 454) et les verticales PP' et *pp'* ; la nouvelle courbe s'obtiendra en prenant comme axes des *x* les droites MN et *mn* et réduisant les ordonnées de la première dans le rapport de *pp'* à PP'. Le rapport de réduction sera donc égal à *pp'* : PP'.

Cas particulier. — Si la première courbe est symétrique par rapport à la verticale du point P, les droites MN et *mn* sont horizontales, et il suffit d'opérer sur la moitié de la courbe. Les deux points M et P d'une part, *m* et *p* d'autre part suffisent à déterminer le problème.

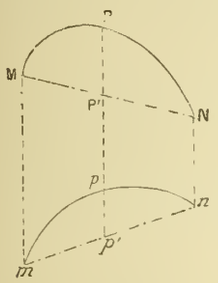


Fig. 454

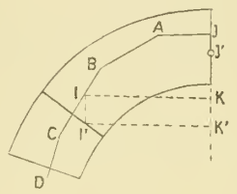


Fig. 455

(*c*) **Application au tracé des courbes de pression d'une voûte** (fig. 455). — Supposons déterminé, comme nous l'avons indiqué plus haut, le joint de rupture MN ; nous avons tracé, comme il vient d'être dit, avec une poussée d'essai t, appliquée en un point quelconque J, une courbe des pressions JABCD ; nous voulons en déduire la courbe des pressions qui passerait au point J' du joint de clef et au point I' du joint de rupture ; pour cela :

Menons la verticale I'I jusqu'à sa rencontre en I avec le côté BC de la ligne des pressions ; menons les horizontales IK, I'K' ; la nouvelle courbe des pressions, partant du point J' pour aboutir en I' sera obtenue en réduisant dans le rapport J'K' : JK les ordonnées de la courbe JABCD.

La poussée correspondante, qui est la distance polaire du nouveau funiculaire, aura pour valeur

$$T = t \times \frac{JK}{J'K'}.$$

Il sera donc facile de tracer une courbe des pressions quelconque et d'en déduire la poussée correspondante.

Dans le cas d'une voûte surhaussée, la rupture tend à se produire au contraire par l'ouverture de l'extrados à la clef, et par celle de l'intrados au joint de rupture ; il faudra donc déterminer le joint de rupture d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les voûtes circulaires, et employer une courbe de pressions passant au tiers *inférieur* du joint de clef, et au tiers *supérieur* du joint de rupture.

470. Vérification des conditions de frottement et de résistance. — Si la courbe de pression donne des centres de pression placés tous dans le noyau central, on s'en sert pour vérifier dans chaque section la condition de frottement et la condition de résistance des matériaux.

A cet effet, on construit le dynamique correspondant, comme dans le cas des arcs ; on sait que chacun des rayons polaires représente la résultante des actions sur un joint correspondant de la voûte ; on décompose alors chacun de ces rayons en deux forces, l'une normale au joint, l'autre parallèle. La première N est la pression normale ; elle servira à vérifier la condition de résistance par la formule

$$p = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)$$

dans laquelle, nous le rappelons, Ω est la surface du joint, α la demi-largeur du noyau central, x la distance du centre de pression au centre de gravité de la section. p ne devra pas dépasser la résistance de sécurité admise pour les matériaux dont se compose la voûte.

La condition de frottement sera satisfaite si le rayon polaire ne fait pas avec la normale du joint un angle supérieur à l'angle de frottement.

Si ces conditions (surtout la première) ne sont pas remplies, on augmentera l'épaisseur de la voûte aux joints où cela sera nécessaire, et on fera avec ces nouvelles données une nouvelle épure de Méry.

§ 3. — Méthode des indicatrices, ou méthode des aires de stabilité

471. Principe de la méthode. — Une poussée T étant appliquée en un point C de la clef, représentons cette poussée par une perpendiculaire au joint de clef, élevée par ce point C. Si nous opérons de même pour toutes les poussées compatibles avec l'équilibre de la voûte, le lieu géométrique de leurs extrémités sera une aire limitée par une courbe que nous nommerons *l'indicatrice des conditions d'équilibre*.

En cherchant toutes les poussées compatibles avec la condition de frottement, nous aurons une seconde aire limitée par *l'indicatrice des conditions de frottement*.

Enfin toutes les poussées compatibles avec les conditions de résistance des matériaux, donneront une aire limitée par *l'indicatrice des conditions de résistance*.

La superposition des trois aires ainsi obtenues fournira *l'aire de stabilité* définitive de la voûte, laquelle sera l'aire commune aux trois précédentes.

Toutes les poussées dont l'extrémité tombera dans *l'aire de stabilité* de la voûte, donneront des courbes de pressions remplissant les trois conditions d'équilibre, de frottement et de résistance.

S'il n'existe pas d'aire commune aux trois aires partielles, la voûte n'admet aucune solution d'équilibre.

Si cette aire commune se réduit à un point, il n'y a qu'une seule solution d'équilibre, ce qui est strictement suffisant.

Si l'aire commune est très considérable, on peut en conclure que l'ouvrage présente un excès de stabilité, et modifier ses dimensions pour se rapprocher, dans une juste mesure, du cas où il n'y a qu'une seule solution d'équilibre.

*

Cette méthode, malgré sa supériorité manifeste sur la méthode de Méry, où les hypothèses jouent un rôle prépondérant, n'a pas été jusqu'à ce jour très employée dans la pratique. Cela tient à sa complication et au grand nombre de constructions qu'elle exige. Expliquons-la néanmoins.

472. **Indicatrice des conditions d'équilibre.** — 1° *Indicatrice sur la clef.* — Considérons une portion de voûte comprise entre la clef C_0D_0 et un joint quelconque CD (fig. 456).

En faisant abstraction des conditions de résistance propre des matériaux, et en supposant, d'abord, cette résistance illimitée, nous pourrons trouver les poussées compatibles avec l'équilibre de la portion de voûte considérée.

Pour que cette portion de voûte soit en équilibre, il faut que la résultante de son poids P et de la poussée ait son point d'application entre les extrémités C et D du joint CD. Toutes les poussées satisfaisant à cette condition fourniront sur le joint CD des pressions normales compatibles aussi avec l'équilibre, c'est-à-dire ne produisant pas la rotation autour de l'arête C ni de l'arête D.

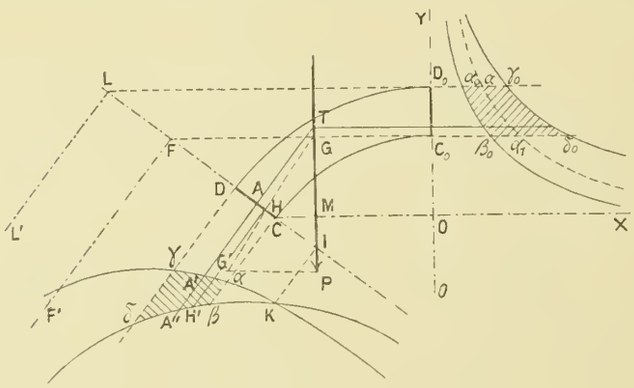


Fig. 456.

Or, considérons un point A sur le joint CD, et supposons que la résultante des pressions agissant sur ce point soit appliquée en ce point A; cette résultante provient de la composition du poids P de la portion de voûte CDC_0D_0 avec une poussée appliquée en tel ou tel point de la clef.

En faisant varier entre C_0 et D_0 le point d'application de cette poussée inconnue, nous obtiendrons, pour chacun de ces points, les valeurs qui font que la résultante d'elle et de P est assujettie à passer au point A.

Nous obtiendrons, en joignant les extrémités des droites représentatives de ces poussées, une courbe telle que $\alpha\alpha_1$, qui, ainsi que nous le démontrerons plus loin, sera une hyperbole.

Faisons varier de C en D la position du point A; à chacune de ces positions correspondra une hyperbole analogue à la courbe $\alpha\alpha_1$; les hyperboles extrêmes, $\alpha_0\beta_0$ et $\gamma_0\delta_0$, correspondront respectivement aux extrémités C et D du joint.

L'aire $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ ainsi limitée par les hyperboles extrêmes sera, *sur la clef*, l'indicatrice d'équilibre de la portion de voûte C_0D_0CD. Cela voudra dire que toute poussée qui ne produira pas le renversement par rotation autour de C ou de D (ou encore que toute poussée dont la courbe de pression correspondante rencontrera le joint entre C et D) doit avoir l'extrémité de sa représentative contenue dans l'intérieur de cette aire.

2° *Indicatrice sur le joint.* — Si nous considérons, sur le joint CD, les pressions normales qui correspondent aux diverses poussées ainsi définies, nous pourrons représenter ces pressions normales par les droites perpendiculaires au joint CD, comme nous l'avons fait à la clef pour les poussées.

Nous obtiendrons ainsi une aire $\alpha\beta\gamma\delta$ dans laquelle seront comprises les extrémités de toutes ces composantes normales. Aux poussées qui ont leurs extrémités sur la courbe $\alpha\alpha_1$, correspondent des pressions normales ayant leurs extrémités sur la droite A'A''; de sorte que les droites $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ sont réciproques des courbes $\alpha_0\beta_0$ et $\gamma_0\delta_0$, tandis que les courbes $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont réciproques des droites $\alpha_0\gamma_0$ et $\beta_0\delta_0$.

Je dis que les courbes $\alpha_0\beta_0$ et $\gamma_0\delta_0$ tracées à la clef sont des arcs d'hyperbole. Prenons, en effet, les moments des forces agissant sur la portion de voûte; leur somme doit être nulle, puisque cette portion de voûte est en équilibre.

Considérons la courbe $\alpha_0\beta_0$, qui correspond à la position C du point d'application de la résultante sur le joint CD; prenons, par rapport au point C, les moments de la poussée T, du poids P et de la réaction égale et contraire à la résultante appliquée au point C. Cette dernière, passant au point C, donne un moment nul; nous aurons donc, en ne considérant que la poussée T et le poids P,

$$T \times MT = P \times CM.$$

Le produit $T \times MT$ est donc constant, et en posant $T = x$, $MT = y$, on voit que la courbe $\alpha_0\beta_0$ est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites C_0D_0 qui est la clef, et CM qui est l'horizontale du point C.

Je dis que, sur le joint, les courbes $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont aussi des hyperboles. Considérons, en effet, la courbe $\beta\delta$ donnée par les poussées appliquées au point C_0 à l'intrados. Soit une poussée $C_0\alpha_1$ qui, composée avec le poids P de la portion de voûte C_0D_0CD, donnerait la résultante GH. Prolongeons la poussée $C_0\alpha_1$ jusqu'à sa rencontre en F avec le joint CD. La réaction de la partie de voûte située au-dessous du joint CD est égale et de signe contraire à la résultante appliquée au point H; décomposons cette réaction en deux forces, l'une normale au joint, égale et de signe contraire à la pression normale $N = HH'$ sur ce joint, l'autre dirigée suivant le joint.

La portion de voûte C_0D_0, CD étant en équilibre, la somme des moments, prise par rapport à un point du plan, des forces qui agissent sur elle est nulle. Prenons les moments

par rapport au point F, ce qui élimine la poussée CB qui, prolongée, passe par F. Il ne reste plus à considérer que N et P et nous aurons :

$$N \times FH = P \times FG = \text{Constante}.$$

Si nous posons HH′ ou $N = y$ et $FH = x$, nous voyons que le lieu de l'extrémité H′ de la composante normale N c'est-à-dire la courbe $\beta\delta$ est une hyperbole équilatère ayant pour première asymptote le joint CD et pour seconde asymptote la perpendiculaire FF′ à ce joint, menée par le point où il est rencontré par la poussée appliquée au point C_0.

De même la courbe $\alpha\gamma$ est une hyperbole ayant pour asymptotes le joint et la perpendiculaire à ce joint au point L où il est rencontré par la poussée appliquée en D_0.

Ces deux courbes se coupent au point K, sur la perpendiculaire élevée au joint CD, au point où il est rencontré par le poids P de la portion de voûte CDC_0D_0.

473. Indicatrices des conditions de frottement.

(*a*) **Principes.**—Nous avons dit que, pour que le glissement de la portion de voûte CDC_0D_0 sur la partie inférieure ne puisse pas se produire, il fallait que la résultante d'une poussée T et du poids P de cette portion de voûte ne fasse pas, avec la normale au joint CD, un angle supérieur à l'angle de frottement que nous avons admis être égal à 35°.

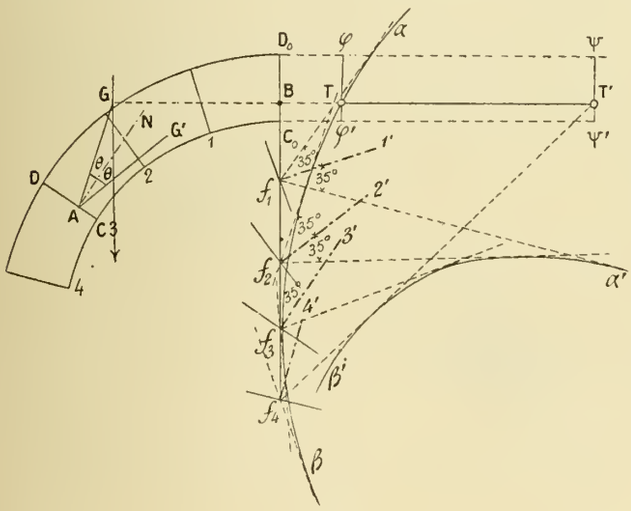


Fig. 457.

La valeur de la poussée correspondante à cette valeur limite est indépendante du point d'application B de cette poussée et elle est constante pour un même joint CD. La résultante peut faire l'angle de 35° avec la normale. Si elle est située au-dessus de cette normale, en AG par exemple, le glissement sera *descendant*, c'est-à-dire tendra à se produire de D vers C. Si la résultante est située au-dessous de la normale, en AG′ par exemple, le glissement sera *montant*, c'est-à-dire tendra à se produire de C vers D. Il en résultera pour la poussée correspondante deux valeurs BT et BT′, que nous allons apprendre à déterminer, et qui donneront, comme indicatrices de frottement pour le joint CD, les deux droites $\varphi\varphi'$ et $\psi\psi'$. Ce sont ces droites qui limitent *l'aire de frottement* pour le joint CD (fig. 457).

(*b*) **Détermination des indicatrices partielles.** — Pour déterminer les droites telles que $\varphi\varphi'$ et $\psi\psi'$ relatives à chaque joint, portons sur la verticale de clef, à partir d'un point B, pris quelconque d'ailleurs sur cette verticale, les forces f_1, f_2, f_3, appliquées à chaque voussoir et qui ne sont autre chose que les poids de voussoir et de tympan qui répondent à chaque joint déterminés, comme l'indique la figure 451 (v. n° 464). Par les points ainsi obtenus, menons des parallèles aux droites qui font avec la normale à chaque joint, et *au-dessus*, un angle égal à l'angle de frottement, que nous avons admis être égal à 35° ; les points d'intersection de ces droites avec l'horizontale du point B déterminent sur cette horizontale des longueurs égales aux poussées, pour lesquelles commencerait à se produire un glissement descendant des voussoirs : ce seront les *poussées limites* de *glissements descendants*, ou encore les poussées limites minima, ainsi nommées parce que toute poussée plus petite laisserait glisser du côté de l'intrados au moins un des voussoirs.

(*c*) **Indicatrice limite.** — Il nous faut maintenant chercher la plus grande de ces poussées. A cet effet traçons en $\alpha\beta$ la courbe enveloppe de ces droites ; elle coupe l'horizontale du point B, en un point T ; la poussée BT est la plus grande des poussées capables de produire le glissement d'un voussoir de l'extrados vers l'intrados. On voit que si cet effet tend à se produire, ce sera au voisinage de la clef.

Si nous menions en T la tangente à la courbe enveloppe, elle recouperait le dynamique entre le point f_1 et f_2, ce qui indique que le joint dangereux, au glissement descendant, est situé aux environs du joint n° 1.

Pour obtenir les indicatrices de *glissement montant* menons, de même, les parallèles aux droites qui font l'angle de 35° avec la normale à chaque joint, mais cette fois au-dessous, de ces normales ; traçons en $\alpha'\beta'$ la courbe enveloppe de ces droites. Il faut prendre ici la plus petite des poussées capables de produire le glissement montant ; cette poussée sera donnée en T′ par l'intersection, avec l'horizontale du point B, de la tangente à l'enveloppe menée par l'extrémité inférieure f_4 du dynamique.

La construction montre que ce glissement montant tend à se produire vers les naissances; et même, dans les voûtes en arc de cercle, ce glissement tendra surtout à se produire sur le premier joint horizontal du piédroit ; c'est pourquoi il sera bon, dans ce cas, de considérer la première assise du piédroit comme faisant partie de la voûte et d'ajouter au dynamique $f_1f_2f_3f_4$ la force verticale qui est appliquée à cette assise.

474. **Indicatrice des conditions de résistance.** — Rappelons ici, en l'appliquant à un joint quelconque CD d'une voûte, ce qui a été dit au n° 331, relativement à la transmission des pressions entre deux surfaces planes et à la résistance de sécurité sur l'arête.

Considérons (fig. 458) un joint quelconque CD ; la résistance de sécurité admise pour les matériaux qui composent la voûte est R.

Lorsqu'une force N, normale au joint, agit sur lui, la compression maxima a lieu sur l'arête d'intrados C ou sur l'arête d'extrados D, suivant que la force N est appliquée sur la partie OC, ou sur la partie OD du joint. Supposons que sur les arêtes C ou D la compression par unité de surface ait atteint la résistance de sécurité R; nous avons la formule

$$R = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{N}{b}\left(1 + \frac{6x}{b}\right)$$

dans laquelle x est la distance du centre de pression au centre de gravité et $\alpha = 1/6\,b$ est la limite du noyau central. Cette formule est applicable tant que le centre de pression est dans le noyau central c'est-à-dire dans le tiers central du joint; si on y pose $N = y$, elle représente le lieu des pressions normales compatibles avec la résistance quand on fait varier x de 0 à α.

Ce lieu est l'hyperbole équilatère ωMF, ayant pour asymptotes : 1° la droite CD et 2° la droite $m'M'$ passant par l'extrémité m' du noyau central.

Lorsque le centre de pression tombe dans le tiers extérieur du joint, c'est la formule

$$R = \frac{2}{3}\,\frac{N}{\left(\frac{b}{2} - x\right)},$$

qu'il faut appliquer ; en y faisant $N = y$ elle représente une ligne droite, MC, tangente en M à l'hyperbole précédente.

La même chose a lieu pour les deux moitiés du joint, de sorte que l'indicatrice ainsi obtenue est symétrique par rapport à la normale au centre de gravité du joint.

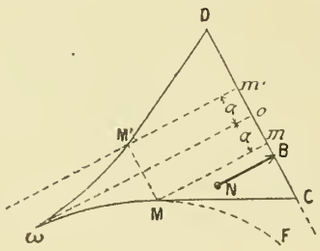


Fig. 458.

En résumé, le contour de sécurité CMωM'D, est la représentative des pressions normales compatibles avec la résistance de sécurité sur l'arête C ou sur l'arête D. Rappelons en deux mots comment on trace ce contour.

1° Ω étant la surface du joint, et R la résistance de sécurité, on porte au milieu, $\overline{O\omega} = \Omega \times R$, ce qui donne le point ω.

2° Aux points trisecteurs m et m', on porte

$$\overline{mM} = \overline{m'M'} = 1/2\ \overline{O\omega},$$

et l'on trace les arcs d'hyperboles équilatères ωM et ω'M'.

3° On mène les droites MC et M'D, lesquelles doivent être tangentes aux hyperboles précédentes.

Cela fait : pour qu'une pression normale BN, ne fasse pas travailler l'arête, située de son côté, au-delà de la résistance de sécurité, il faut que l'extrémité N de sa représentative tombe dans l'intérieur du **contour de sécurité à l'écrasement** CMωM'D.

Ce contour s'allonge d'autant plus que R est plus grand.

Chaque joint, et en particulier la clef C_0D_0, possédera son contour de sécurité à l'écrasement $C_0\omega_0D_0$.

475. **Aire définitive de stabilité d'une voûte.** — (*a*) **Aire de stabilité pour un joint.** — Laissons de côté tout d'abord les indicatrices de frottement, qu'il suffira de rapporter en dernier lieu sur l'aire définitive trouvée au moyen des deux autres conditions.

Cherchons à déterminer les poussées compatibles avec les conditions d'équilibre et avec celles de résistance des matériaux.

Considérons toujours (fig 459) une portion de voûte C_0D_0CD et traçons sur le joint CD l'aire $\alpha\beta\gamma\delta$ qui limite les pressions normales compatibles avec l'équilibre. Toutes celles

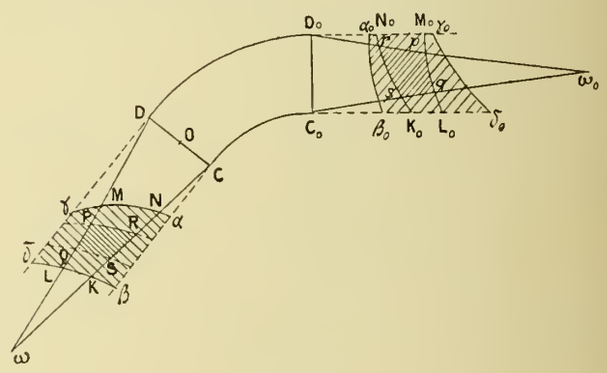


Fig. 459

dont les extrémités aboutiront en dehors de l'indicatrice de résistance CωD sont à rejeter ; il reste donc seulement celles qui ont leurs extrémités dans l'aire KLMN.

Mais l'élimination d'une partie des pressions normales sur le joint CD entraîne l'élimination des poussées correspondantes ainsi que nous allons le montrer. En effet :

Traçons, à la clef, les courbes M_0L_0, réciproque de ML, et N_0K_0, réciproque de NK du joint CD; les poussées admissibles sont celles qui ont leurs extrémités dans l'aire $K_0L_0M_0N_0$. Pour tenir compte de la condition de résistance à la clef,

nous devons éliminer toutes les poussées terminées en dehors de l'indicatrice de résistance $C_0\omega_0D_0$.

C'est donc en définitive dans l'*aire résidu*, *pqrs*, que devront aboutir les extrémités des poussées compatibles avec les conditions d'équilibre et de résistance réalisées à la fois sur la clef et sur le joint CD.

Traçons les courbes PR et QS réciproques, sur le joint CD, des courbes *pr* et *qs* à la clef ; l'aire PQRS renfermera les extrémités de toutes les composantes normales qui, sur le joint CD, résultent des poussées reconnues possibles comme étant contenues dans l'aire *pqrs*.

Toutes les poussées et pressions normales compatibles avec la stabilité de la portion de voûte CDC_0D_0 sont donc ainsi parfaitement déterminées.

(*b*) **Remarques**. — Les deux contours PQRS et *pqrs* étant réciproques l'un de l'autre.

1° Toute poussée dont l'extrémité sera située sur les lignes *rs* et *pq*, fait travailler l'une des arêtes du joint CD à la résistance de sécurité R, tandis que celles de la clef travaillent moins ;

2° Toute poussée limitée aux courbes *rp* ou *sq* fait travailler une des arêtes de la clef à la résistance R, tandis que celle du joint CD travaillent moins.

3° Les poussées terminées en l'un des quatre sommets *p*, *q*, *r* et *s* produiront simultanément la pression de sécurité R sur les deux joints ;

4° Si l'on adopte une résistance de sécurité différente, les indicatrices d'équilibre $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ resteront les mêmes ; les contours de sécurité à l'écrasement $C\omega D$, $C_0\omega_0D_0$ seront seuls modifiés, ce qui changera évidemment la forme de l'aire partielle de stabilité *pqrs*.

(*c*) **Aire définitive de stabilité**. — Considérons maintenant une demi-voûte ; si nous répétons la même construction pour différents joints C_1D_1, C_2D_2, etc., jusqu'au joint de naissance, nous obtiendrons des aires $p_1q_1r_1s_1$, $p_2q_2r_2s_2$ (non représentées sur la figure 459) correspondant à chacun d'eux.

Nous prendrons la partie commune à toutes ces aires et toute poussée compatible avec l'équilibre et la résistance des matériaux aura son extrémité dans cette partie commune qui sera alors *l'aire définitive de stabilité* de la voûte, après qu'on en aura retranché les parties situées en dehors des indicatrices de frottement.

Nous déterminerons ainsi toutes les solutions possibles d'équilibre de la voûte.

764. **Courbes de pression limites.** — Nous pourrions tracer toutes les courbes de pression possibles correspondant aux poussées dont l'extrémité se trouve dans l'aire définitive de stabilité. Si l'extrémité de la poussée est à l'intérieur de cette aire, nulle part les matériaux ne seront soumis à un effort supérieur à R.

Si elle aboutit sur un côté du contour, l'effort limite R sera produit soit sur un joint, soit à la clef.

Lorsque l'aire *pqrs* sera tout entière comprise dans l'intérieur des indicatrices de frottement, la condition de frottement n'interviendra pas, c'est-à-dire qu'en aucun joint de la voûte, le glissement ne tendra pas à se produire.

Etudions les conditions de stabilité répondant aux différentes formes de l'aire de stabilité. Trois cas peuvent alors se présenter :

1er *cas*. — L'aire aura la forme d'un quadrilatère (fig. 460-I), alors une poussée définie par un sommet *r* donne l'effort limite R à l'extrados à la clef et à l'intrados sur le joint de même numéro ; par exemple si le sommet est noté r_4, c'est sur le joint C_4D_4 que se produira l'effort R.

Une poussée définie par un sommet *p* donne l'effort limite R à l'extrados à la clef et à l'extrados sur le joint de même numéro.

Une poussée définie par un sommet *q* donne l'effort R à l'intrados, à la clef, et à l'extrados sur le joint de même nu-

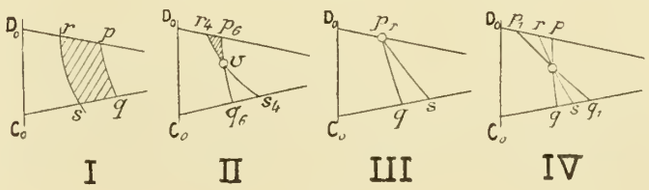


Fig. 460

méro. Une poussée définie par un sommet *s* donne l'effort R à l'intrados à la clef et à l'intrados sur le joint de même numéro.

2e *cas*. — L'aire a la forme triangulaire (fig 460-II) ; elle est alors limitée par deux courbes *rs* et *pq* qui se coupent en un point *v*. La poussée correspondant à ce point *v* donne l'effort limite R à la fois sur les deux joints auxquels correspondent les deux courbes *rs* et *pq*.

Par exemple, si les deux courbes sont r_4s_4 et p_6q_6, les deux joints sur lesquels cette poussée développe l'effort R sont C_4D_4 et C_6D_6. L'aire hachée répond seule à la stabilité.

3e *cas*. — Si l'aire limite se réduit à un point p_r (fig. III), la poussée correspondante donne une solution de stabilité de la voûte ; et il n'y a que cette solution possible ; la pression limite R est obtenue à la fois sur la clef et sur deux joints définis par les numéros des courbes *rs* et *pq* dont le point d'intersection forme l'aire de stabilité de la voûte.

Si trois courbes *rs* et *pq* se coupent en un même point, qui forme l'aire de stabilité (fig. IV), la pression limite R est obtenue sur les trois joints de mêmes numéros que ces trois courbes.

4e *cas*. — Si l'on ne trouve pas d'aire limite, c'est que la

voûte n'admet aucune solution d'équilibre ; il faut alors en modifier le tracé.

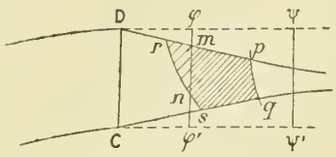


Fig. 461

Nota. — Si la courbe *pqrs* est coupée par l'une des indicatrices de frottement en deux points *m* et *n* (fig. 461), toute poussée ayant son extrémité sur *mn* sera sur le point de produire un glissement sur le joint correspondant ; ce joint sera situé vers la clef, si c'est la droite φφ' qui intervient ; ce joint serait, au contraire, aux naissances, si c'était la droite ψψ' qui coupe l'aire *pqrs* (v. n° 473-*b*).

Pour les poussées aboutissant en *m* et en *n*, la limite de glissement sera atteinte pour un certain joint, celui qui répond à φφ' ; tandis que pour le joint répondant à l'indicatrice partielle *rp* de résistance à l'écrasement l'effort limite R sera atteint.

477. **Divers modes de rupture des voûtes.** — La construction des courbes de pression limites n'est pas nécessaire, puisque la stabilité dépend uniquement de l'aire finale obtenue à la clef; leur tracé permettrait de mettre en évidence celles des parties de l'ouvrage qui présentent des points faibles.

Nous ne ferons pas ces épures, nous dirons seulement que les résultats auxquels ils conduisent concordent parfaitement avec ceux qu'ont donnés les expériences et la pratique; voici ces résultats :

1° Les voûtes en plein-cintre, en ellipse ou en anse de panier (fig. 462-I) tendent à se séparer en quatre parties, par l'ouverture de la clef à l'intrados en C et par l'ouverture, suivant l'extrados, d'un joint B qui a été appelé le *joint de rupture*.

Les deux tronçons supérieurs 1 et 1 tendent à tomber dans l'intérieur de la voûte, tandis que les deux parties adjacentes aux naissances 2 et 2 tendent à être rejetées vers l'extérieur.

2° Dans les voûtes très surbaissées (fig. II), la rupture se produit d'une manière analogue, mais il y a, en outre, tendance au glissement vers l'extérieur, sur les joints des naissances AA.

Il peut même arriver, dans une voûte très surbaissée et épaisse, qu'il y ait tendance au glissement des voussoirs de clef vers l'*intérieur* de la voûte, tandis que les voussoirs aux naissances tendraient à glisser vers l'*extérieur*.

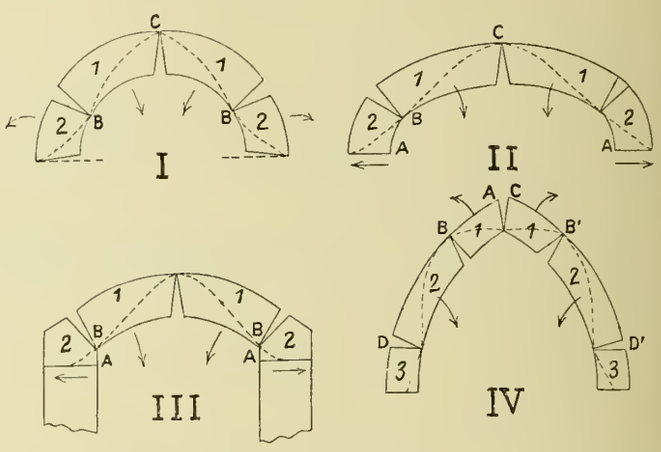


Fig. 462

3° Dans les voûtes en arc de cercle (fig. III), la tendance au glissement est considérable vers les naissances ; l'assise supérieure du piédroit tend à être chassée à l'extérieur et il sera nécessaire de la considérer, au point de vue de la construction des indicatrices de frottement, comme faisant partie de la voûte ; le joint de rupture BB est ici le joint des naissances.

4° Enfin, dans les voûtes ogivales ou surhaussées, la voûte tend à s'ouvrir à l'*extrados* à la clef en C et en deux points D et D', situés assez bas, tandis qu'elle tend à s'ouvrir à l'*intrados* en deux autres points B et B' situés entre la clef et les points précédents D et D'.

En somme, la voûte ogivale tend à se disloquer en six morceaux et sa clef a une tendance à sauter en l'air; c'est pourquoi, tandis qu'il peut être utile de charger les reins d'une voûte surbaissée, au contraire on devra charger avec mesure la clef d'une voûte en ogive.

Remarque. — Dans le cas de voûtes très simples, se présentant dans les conditions ordinaires, on peut ne faire les constructions précédentes que pour un petit nombre de joints et se borner au joint de clef, au joint de naissance et à un joint situé entre 25° et 35° au-dessus de l'horizontale, position ordinaire du joint de rupture.

Pour un arc de cercle, on prendra la clef, les naissances et la première assise du piédroit.

§ 4. — Méthode des défigurations élastiques

478. **Elasticité des maçonneries.** — (*a*) **Maçonneries seules.** — La défiguration d'un prisme en maçonnerie s'opère suivant les mêmes lois que celle des prismes en métal; mais la valeur du module d'élasticité E, très variable avec chaque genre de maçonnerie, n'a encore été déterminée expérimentalement dans aucun cas.

M. **Résal** (Ponts en maçonnerie) a calculé que pour une arche d'essai construite à la carrière de *Souppes,* avec de la pierre de *Château-Landon* et du mortier de ciment, le module d'élasticité de cette maçonnerie, déduit de la flèche prise au décintrement et rapporté au mètre carré, peut être considéré comme égal à 2.500 millions; la charge d'écrasement de la pierre de Château-Landon employée était de 350 k. par cent. carré, soit 3.500.000 k. par M^2.

Le module d'élasticité de cette pierre serait donc environ le huitième de celui du fer, alors que sa résistance de rupture à l'écrasement serait environ le dixième de celle du fer.

(*b*) **Maçonnerie et métaux.** — M. Résal fait remarquer, d'autre part, que dans les maisons importantes, où la façade est supportée en partie par des piles en maçonnerie et en partie par des colonnes en métal, placées immédiatement après la construction des murs du rez-de-chaussée, on ne constate pas que l'hétérogénéité de ces supports donne lieu à aucun mouvement dans la construction; il en conclut que le tassement des piles en maçonnerie, sous l'effort qu'elles supportent, doit être très sensiblement égal au raccourcissement des colonnes en métal, et que, par suite, les modules d'élasticité de la maçonnerie et du métal doivent être à peu près proportionnels aux efforts de compression qu'on est accoutumé à leur faire subir.

(*c*) **Mortiers.** — Pour les mortiers il semble que le module d'élasticité soit d'autant plus élevé que la proportion de matière inerte qu'ils renferment est plus grande, bien que leur résistance en soit considérablement diminuée.

479. **Action de la température sur les maçonneries.** — On ne se préoccupe ordinairement pas, dans l'étude d'un ouvrage en maçonnerie, des effets dus aux variations de la température, et l'expérience justifie dans la plupart des cas cette manière de faire.

Cependant, les coefficients de dilatation calorifique des maçonneries sont peu différents de ceux du fer et de l'acier; mais d'autre part :

1° Le module d'élasticité des maçonneries ordinaires étant certainement très inférieur à celui du métal, l'expansion ou le retrait dus aux variations de température développeront dans la construction des efforts bien moindres que dans les constructions métalliques et la maçonnerie pourra toujours y résister;

2° Le pouvoir conducteur des maçonneries étant beaucoup plus faible que celui du métal, et les épaisseurs de ces ouvrages étant incomparablement plus grandes que celles des ouvrages métalliques, la chaleur pénétrera très lentement dans la masse des constructions, et n'aura guère d'influence que sur les parties tout à fait superficielles: le reste de l'ouvrage ne se ressentira presque pas des changements de température.

Il ne faudra, par conséquent, se préoccuper de l'action de la température que dans le cas d'ouvrages de peu d'épaisseur, susceptibles d'être soumis à des variations assez considérables de température. Tels sont par exemple les aqueducs.

480. **Principe de la méthode des défigurations élastiques.** — Nous avons vu qu'une voûte en maçonnerie résiste dans de bonnes conditions :

1° Lorsqu'aucune de ses parties n'est soumise à des efforts d'extension ;

2° Lorsque l'effort de compression sur la fibre la plus fatiguée ne dépasse pas la résistance de sécurité ;

3° Lorsqu'en aucun point il n'y a tendance au glissement d'un voussoir sur les voussoirs voisins.

Nous avons vu que, en vertu de la première condition, la courbe des centres de pression ne devait pas sortir du canal central. Nous pourrons donc, dans ce cas, assimiler la voûte à un arc élastique encastré sur ses deux sommiers et lui appliquer la même méthode de calcul.

Si nous voulons calculer la valeur des flèches, il y aura une indétermination résultant de ce que le module d'élasticité des maçonneries est très difficile à connaître. Mais on sait que les moments d'encastrement aux sommiers sont indépendants du module d'élasticité pour une construction homogène ; leur valeur sera donc bien déterminée et avec elle la courbe des pressions qui en est une conséquence.

En appliquant cette méthode, les dimensions de la voûte étant déterminées d'abord au moyen des formules empiriques, deux cas peuvent se présenter :

1er *Cas.* — La courbe des centres de pression trouvée, comme conséquence du calcul, tombe tout entière dans le

canal central. Nous pourrons alors la considérer comme exacte et en déduire les efforts sur chaque joint, comme dans la méthode de Méry.

Nous pourrons être amenés, si les pressions unitaires sur certains joints sont trop inférieures à la résistance de sécurité, à réduire l'épaisseur de la voûte en ces points.

Il en résultera alors une voûte admettant une nouvelle fibre neutre, et sur laquelle nous reprendrons une seconde fois la même étude.

2e *Cas.* — La courbe des centres de pression sort du canal central.

Le résultat ne présente plus la même certitude, car la répartition des pressions sur les joints ne s'opère plus comme nous l'avons supposé au début. Cependant, si la courbe des centres de pressions ne sort du canal central que sur une faible longueur, et si elle s'en éloigne peu, les efforts d'extension sur les fibres extrêmes peuvent être assez faibles pour ne pas rompre l'adhérence du mortier et nous sommes encore dans des conditions acceptables.

Si la courbe des centres de pression s'écarte notablement du canal central, la méthode est en défaut, puisque les hypothèses qui lui servent de point de départ ne sont plus satisfaites.

La courbe trouvée nous indiquera cependant les points faibles de la voûte, les joints sur lesquels se produiront des efforts d'extension et suivant lesquels la voûte aurait une tendance à s'ouvrir au décintrement. Nous pourrons, en modifiant les épaisseurs de ces joints, obtenir une nouvelle voûte qui servira de point de départ à une deuxième étude.

Si, malgré des modifications convenables, on ne peut arriver à obtenir une courbe des centres de pression restant dans le canal central, ce fait indiquera qu'il faut modifier non seulement l'épaisseur de la voûte, mais encore son profil.

C'est, par exemple ce qui arriverait dans l'étude d'une voûte plein-cintre dans laquelle des charges considérables seraient appliquées à la clef ; on serait amené à transformer le profil et à adopter une voûte surhaussée.

481. **Rappel de la méthode pour un arc encastré.** — L'intrados de la voûte étant donné, nous calculerons provisoirement les épaisseurs à la clef et au joint de rupture, en nous servant des formules empiriques, comme il a été dit au n° 463 ; nous en déduirons une fibre neutre d'essai et un extrados d'essai. La voûte sera ensuite divisée en un certain nombre de voussoirs théoriques ; nous chercherons les charges verticales appliquées à chacun d'eux (v. n° 464), et nous construirons, avec une distance polaire qui sera la *poussée d'essai*, un funiculaire de ces charges.

En opérant alors, comme il a été dit pour un arc encastré, nous déterminerons les constantes de charges, de poussée et d'encastrement ; nous en déduirons les moments d'encastrement et la poussée vraie.

Nous construirons alors la courbe des pressions, qui nous fournira le centre de pression sur chaque joint. Nous verrons si tous les centres de pression tombent dans le canal central et la *condition de canalisation* sera vérifiée.

En construisant alors un dynamique ayant pour distance polaire la *poussée vraie*, qui vient d'être trouvée, nous en déduirons les pressions normales sur chaque joint, et nous vérifierons, en outre, la *condition de frottement*.

Nous pourrons enfin, comme il sera dit plus loin, calculer l'épaisseur à donner à chaque joint et, par suite, trouver, si cela est nécessaire, les données d'une nouvelle voûte servant de point de départ à une deuxième étude.

Nota. — Remarquons que la condition de frottement serait toujours satisfaite si l'on exécutait les voussoirs avec joints normaux à la courbe des centres de pressions. Il n'en est pas ainsi, et les joints sont normaux à l'intrados ; en général, cette disposition n'aura, au point de vue de la condition de frottement, aucun inconvénient. Cependant, il pourrait arriver que cette condition ne fût pas satisfaite ; on pourrait alors remplacer les surfaces planes des joints par des surfaces cylindriques normales à la fois à l'intrados et à la courbe des centres de pression.

482. **Calcul de l'épaisseur définitive des joints.**

(*a*) **Formules.** — La pression unitaire sur la fibre la plus fatiguée d'un joint est donnée par la formule connue

$$p = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$

dans laquelle M est le moment fléchissant, et N l'effort normal au joint; nous y ferons

$$\Omega = b \qquad \text{avec} \qquad \frac{I}{v} = \frac{b^2}{6},$$

puisque nous avons dit qu'on opérait sur une tranche de $1^m,00$ d'épaisseur.

En faisant $p = R$ résistance de sécurité, nous aurons

$$R = \frac{Nb + 6M}{b^2} \qquad \text{d'où} \qquad Rb^2 - Nb - 6M = 0 \qquad \text{et}$$

$$b = \frac{N \pm \sqrt{N^2 + 24RM}}{2R}.$$

La valeur positive est seule admissible, et donne l'épaisseur de la voûte qui satisfera à la condition de résistance.

Si la courbe des centres de pression est tout entière dans le canal central, les valeurs de b seront déterminées uniquement par la condition de résistance.

Si, dans une partie de la voûte, la courbe des centres de pressions sort du canal central, il faudra, pour l'y ramener, augmenter l'épaisseur du joint de manière que la distance x du centre de gravité au centre de pression représente un

sixième de la largeur du joint, dans le cas du noyau central vrai, et un quart dans le cas du noyau central mixte.

Comme $x = M : N$ nous aurons suivant les cas

$$b = 6\frac{M}{N} \qquad \text{ou} \qquad b = 4\frac{M}{N}.$$

On trouvera ainsi une largeur de joint qui sera généralement différente de celle qu'aura fourni le calcul quand on prenait pour base la seule condition de résistance ; on prendra la plus grande de ces deux valeurs.

Comme l'intrados est une courbe dont le profil ne peut être modifié, on portera les épaisseurs trouvées sur des normales à cet intrados. On obtiendra ainsi un extrados plus ou moins sinueux que l'on ne pourra pas conserver. On le remplacera par un extrados régulier, le serrant d'aussi près que possible, tout en lui restant extérieur ; il en résultera une nouvelle fibre neutre, laquelle servira de point de départ pour une deuxième étude.

(*b*) **Tableau de calcul.** — Posons $\frac{M}{2R} = m$, $\frac{N}{2R} = n$, la formule qui donne l'épaisseur de la voûte devient :

$$b = n + \sqrt{n^2 + 12m},$$

et la valeur de x devient $x = \frac{m}{n}$.

Nous pouvons alors grouper le calcul dans le tableau suivant :

TABLEAU DE CALCUL POUR UNE VOUTE

DÉSIGNATION DES JOINTS	RÉSULTATS DE L'ÉPURE					CONDITION de CANALISATION		CONDITION DE RÉSISTANCE				Valeurs définitives de b
	MOMENTS FLÉCHISSANTS distance polaire $d =$		Composantes normales N	$m = \frac{M}{2R}$	$n = \frac{N}{2R}$	$\frac{m}{n}$	$b' = 6\frac{m}{n}$ ou $b' = 4\frac{m}{n}$ b'	n^2	$12m$	$\sqrt{n^2 + 12m}$	$b'' = n + \sqrt{n^2 + 12m}$ b''	
	Valeurs, à l'échelle des forces, des ordonnées du funiculaire	Valeurs des moments, en kilog M M										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Les moments M, à porter dans la colonne 3, s'obtiennent en multipliant les forces (en kilos), de la colonne 2 par la distance polaire d évaluée en mètres.

La valeur de b à porter dans la 13e colonne est la plus grande des deux valeurs b' ou b'' qui se trouvent dans les colonnes 8 et 12.

CHAPITRE II

LES POUSSÉES

483. **But de la présente étude.** — Le but final que nous poursuivons dans ce qui va suivre est de calculer les dimensions à donner aux murs suivant les fonctions qu'ils ont à remplir. Un mur peut être destiné :

1° A former simplement clôture, et, alors, il doit se porter lui-même et résister à l'action ou *poussée du vent* ;

2° A former les parois d'une habitation, et, alors, il doit se porter lui-même et porter aussi tout ce qui est placé au-dessus de lui dans la construction, en même temps qu'il doit résister à l'action du vent. Cette dernière n'est à prévoir que pendant la construction, lorsque le mur est isolé, car une fois l'édifice achevé, les différents murs se soutiennent les uns les autres et leur renversement, par le fait du vent, n'est presque jamais à craindre ;

3° A soutenir des terres ou de l'eau, à la poussée desquelles il doit résister.

Nous allons, dans le présent chapitre, étudier la poussée des terres, celle de l'eau et celle du vent.

§ 1. — Frottement et cohésion des terres

484. **Talus naturel des terres. — Coefficient de frottement.** — Lorsqu'on exécute un *remblai*, en disposant les terres en *cavaliers* ou *massifs*, les talus formés prennent, avec le temps, une certaine inclinaison variable avec la nature des terres, mais constante pour une même terre.

De même, les talus d'un *déblai*, taillés d'abord à pic ou sous une pente très raide, s'éboulent peu à peu sous l'influence des agents atmosphériques et finissent par prendre peu à peu une position d'équilibre définitif.

On nomme *angle du talus naturel* l'angle formé par la ligne de plus grande pente du talus définitivement pris par les terres. Nous désignerons cet angle par la lettre φ. Il est égal à l'angle de frottement des terres sur elles-mêmes, car il est vraisemblable que le talus garde une pente invariable lorsqu'une particule a, placée à sa surface, ne peut plus glisser sur cette surface sous l'influence de son poids propre ; et nous avons démontré que la pente du plan était alors égale au *coefficient de frottement*.

Cette remarque permet donc de déterminer, expérimentalement, l'angle de frottement d'une terre sur elle-même. Le tableau ci-dessous donne pour quelques terres, d'après des expériences faites, en 1846, par le capitaine du génie **Blondeau**, la valeur de l'angle φ ; nous y avons ajouté le poids approximatif du mètre cube de terre de ces mêmes terres :

Coefficients et angles de frottement des terres.

NATURE DES TERRES	Coefficient de frottement f.	Angle de frottement φ.	Poids du mètre cube
Marnes sèches à l'état naturel . . .	0,78	38°	1600 à 1700
Marnes ameublies et damées . . .	0,70	35°	»
Marnes naturelles saturées d'eau, sans être en bouillie	0,56	29°	»
Terres végétales sèches naturelles .	0,79	38°	1200 à 1500
Arènes sèches, état naturel	0,70	35°	1300 à 1500
Arènes ameublies, puis damées . .	0,65	33°	»
Arènes naturelles saturées d'eau sans être en bouillie.	0,62	31°	»
Arènes ameublies, saturées d'eau et damées	0,61	27°	»

On peut admettre, en moyenne, 35° comme angle de frottement et, par suite, comme angle de talus naturel des terres

ordinaires sèches ou peu mouillées, et 1800 k. comme poids moyen du mètre cube.

Les terres argileuses, au contact de l'eau qui s'introduit dans les remblais par des fissures, se délaient et perdent toute consistance ; le remblai peut arriver à pousser le mur comme le ferait un liquide dont le poids spécifique serait de 1800 k. environ.

On se met à l'abri de cette cause d'accident en pilonnant fortement le remblai pour éviter la formation des fissures, et en recueillant, par un drainage extérieur, les eaux qui pourraient tendre à pénétrer la masse.

485. **Cohésion des terres.** — La cohésion des terres est la propriété que possèdent les terres vierges, ou celles qui ont été laissées longtemps en place, de former un tout compact sans solution de continuité.

C'est en vertu de la cohésion qu'un bloc de terre tenu par la partie supérieure peut conserver sa forme sans se briser. C'est pour la même raison, aussi, qu'on peut creuser dans une terre vierge, ou rassise, des excavations avec des talus à pic ou, du moins, beaucoup plus raides que le talus naturel.

La force de cohésion s'ajoute à celle du frottement pour empêcher le mouvement ; elle paraît ne dépendre que de l'étendue des surfaces en contact ; elle est très variable, non seulement avec la nature des terres, mais encore avec les conditions climatériques qui peuvent la faire disparaître. C'est pourquoi on a l'habitude de ne pas en tenir compte dans les calculs, ce qui donne un surcroît de sécurité.

On peut quelquefois tenir compte de la cohésion lorsqu'on opère sur des terres vierges ; il en résulte une légère diminution de l'épaisseur des murs ; mais il faut alors prendre les plus grandes précautions pour empêcher les eaux d'infiltration d'atteindre le terrain vierge, et être bien sûr que ces précautions ne seront pas illusoires.

§ 2. — Poussée des terres

486. **Préliminaires.** — (*a*) **La Poussée.** — Lorsqu'on veut maintenir d'une façon définitive un massif de terre sous une inclinaison plus raide que celle du talus naturel de ces terres, on est obligé de soutenir le massif par un revêtement qui pourrait être une charpente, mais qui, le plus ordinairement, est un mur, dénommé *mur de soutènement*.

Le massif de terre, lequel tend toujours à reprendre son talus naturel, exerce contre ce revêtement, charpente ou mur, une certaine *poussée*, dont nous allons déterminer la *direction*, l'*intensité* et le *point d'application*.

Nous chercherons ensuite, dans le chapitre III, le profil à donner au mur pour qu'il puisse résister à cette poussée.

(*b*) **Hypothèses et conventions.** — Nous supposerons :

1° Que le massif de terres à soutenir est sans cohésion ;

2° (fig. 463) Que si l'on considère la portion de parement intérieur du mur comprise au-dessus d'un point *b*, la poussée s'exerce sur toute la hauteur *b*H, le point H étant le point de rencontre du parement intérieur du mur, supposé prolongé, avec le talus extérieur du massif, talus ordinairement incliné à l'angle naturel φ des terres ;

3° Que la séparation entre les terres qui poussent sur le mur et celles qui ne poussent pas se fait suivant une surface plane *b*X que l'on nomme *plan de séparation* ou *plan séparatif*. En réalité, la séparation semble se faire suivant une surface courbe analogue à *b*D dont la pente est beaucoup plus raide à la partie supérieure D qu'à la base *b* ;

4° Que toutes les particules de terre comprises dans le prisme H*b*XE, nommé *prisme* ou *coin de poussée*, sont invariablement liées les unes aux autres et forment une sorte de *coin* solide entre le parement intérieur *b*H du mur et le plan de séparation *b*X ;

5° Enfin, comme le profil du terrassement est constant sur une certaine longueur, nous opérerons sur une tranche d'une profondeur égale à l'unité, c'est-à-dire à 1 mètre, de

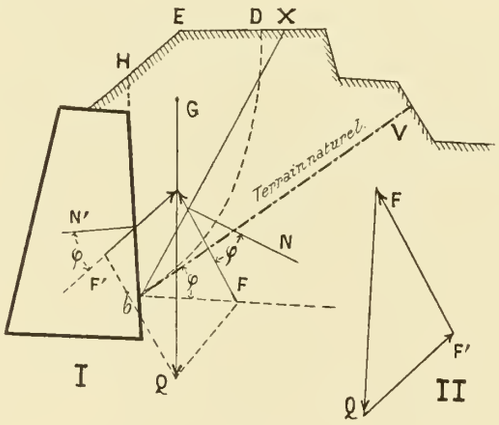


Fig. 463

sorte que les volumes des terres et du mur seront représentés par les mêmes nombres que les surfaces correspondantes du profil. De même, les poids seront obtenus en multipliant ces surfaces par les poids spécifiques des terres ou des maçonneries.

487. **Direction et intensité d'une poussée quelconque.** — Imaginons que la séparation des terres se fasse suivant un plan de séparation quelconque *b*X (fig. 463). H*b*XE sera le coin de poussée ; soit Q son poids, appliqué au centre de gra-

vité G de ce coin; il exerce une certaine pression sur les plans bH (parement intérieur du mur) et bX (plan séparatif), et inversement ces plans exercent sur lui des réactions qui, s'il n'y avait pas de frottement, seraient dirigées suivant N et N′ et seraient respectivement normales à ces mêmes plans bH et bX.

A cause du frottement, au moment où le mouvement de glissement se produit, ou tend à se produire, les réactions F et F′ sont déviées de la normale et font avec cette dernière, du côté opposé à celui vers lequel le mouvement tend à se produire, un angle égal à l'angle de frottement. Cet angle est égal à φ pour le frottement de terre sur terre; supposons qu'il soit en φ' pour le frottement des terres sur la maçonnerie du mur (v. plus loin à *Nota*).

Puisque le coin de poussée est en équilibre, c'est que les trois forces Q, F et F′ sont en équilibre ; par suite, elles se rencontrent en un même point, et l'on doit pouvoir former avec elles un triangle dynamique fermé (fig. 463-II).

La poussée sur le mur est égale et de signe contraire à la force F′; elle fait avec la normale au parement, et au-dessus de cette normale, un angle φ' égal à l'angle de frottement des terres sur les maçonneries.

Nota. — L'angle φ' de frottement des terres sur les maçonneries est en général très peu différent de l'angle φ de frottement des terres sur elles-mêmes; d'ailleurs si le parement intérieur du mur n'est pas enduit, le frottement a lieu sur une couche de terre adhérente à la maçonnerie, et par suite, dans les applications, on peut prendre $\varphi' = \varphi$.

Il résulte de ce qui précède, que si nous connaissons la position du plan de séparation bX, la poussée sera déterminée en direction et en intensité ; en effet, dans le triangle dynamique (fig. II), nous connaîtrons alors le côté Q et les directions des deux autres côtés. Le problème revient donc à trouver le plan de séparation bX, auquel répondrait la poussée maxima. Si le plan de séparation coïncidait avec le parement intérieur bH du mur, il est évident que la poussée serait nulle, car le prisme de poussée aurait un volume nul. Il en serait de même s'il coïncidait avec le plan bV du talus naturel, car alors la force Q ferait avec la normale au plan bV précisément l'angle φ, et la force F serait égale et contraire à Q et équilibrerait le poids du prisme. On peut encore comprendre ce fait en se rappelant qu'un corps (ici le coin de poussée) posé sur un plan (ici le plan bV) ne glisse pas sur ce plan si ce dernier est incliné à l'angle de frottement.

On conçoit qu'entre ces deux positions extrêmes, bH et bV, il y en aura une pour laquelle la poussée sera maxima; c'est cette position que nous allons déterminer; nous en déduirons, ensuite, la grandeur de la poussée maxima.

488. **Grandeur de la poussée maxima.** — (*a*) **Le profil du terrain est quelconque.** — Prenons (fig. 464) le cas tout à fait général où le mur A a son parement intérieur plan, mais incliné sous un angle quelconque bO, et où le cavalier en terre a un profil courbe quelconque OMT.

Par le pied b du mur, menons la droite bT, inclinée à l'angle φ du talus naturel des terres ; divisons le secteur de terre ObT, compris entre le mur et le talus naturel, en secteurs plus petits par des plans 1, 2, 3, ..., 8 divergeant du point b, et cherchons (fig. II) les poussées qui répondraient à chacun de ces plans de séparation. Nous conseillons de prendre les angles formés par ces plans d'essai égaux entre eux, ce qui se fera en traçant l'arc de cercle OS, que nous nommerons le *cercle rapporteur*, et en le divissant en parties égales. Raisonnons pour le plan 4.

On a calculé les surfaces et, par conséquent, les poids $p_1p_2...p_4$ de chacun des secteurs partiels, et (fig. II) sur un dynamique on a porté ces poids de b' en p_4 bout à bout, ce qui a donné en $b'p_4$ le poids total du secteur Ob4. Ce poids doit être équilibré par deux réactions, savoir :

1° La réaction du mur, laquelle est parallèle à WW′ (fig. I) et fait avec la normale au mur l'angle φ' ; c'est pourquoi sur le dynamique (fig. II) nous commençons par mener p_4f_4 parallèle à WW′.

2° La réaction du plan de terre b4, laquelle aurait une direction faisant, avec la normale à ce plan, l'angle φ de frottement de terre sur terre. C'est pourquoi, sur le dynamique (fig. II), nous menons $b'4'$ parallèle à cette direction. (Nous dirons plus loin, à *nota*, comment cette direction est trouvée.)

Nous obtenons ainsi en $b'p_4f_4$ le dynamique qui établit l'équilibre du secteur de terre considéré, et p_4f_4 est la grandeur de la poussée correspondante.

On opère de même pour tous les autres secteurs et l'on obtient en $f_1f_2...f_7$ les extrémités des poussées correspondantes. On joint ces points par une courbe qui sera la *courbe des poussées;* on mène à cette courbe une tangente verticale M′ et la poussée correspondante à M′ est la poussée maxima. Elle répond à un poids de secteur P et à une réaction du plan séparatif mesurée par b'M′.

Nota. — On obtient comme suit (fig. II) les directions des réactions des plans séparatifs.

Remarquons d'abord que, pour le dernier plan séparatif bT, incliné au talus naturel des terres, la réaction serait verticale et que, sur le dynamique, elle serait représentée en grandeur et direction par b'T′. Lorsque nous passons du plan bT aux plans 7, 6, 5, ..., faisant entre eux des angles mesurés par les arcs du cercle rapporteur OS, la réaction suit ces plans dans leur mouvement de rotation ; par conséquent, décrivons (fig. II) le même cercle rapporteur S′O′, reportons sur lui, en 7′, 6′, 5′, ..., les mêmes arcs que sur le premier et nous aurons en $b'7'$ — $b'6'$, etc... les réactions successives. Inversement du point M, qui répond au ma-

ximum de la poussée, on déduit (fig. II) la réaction $b'M'$ et le plan séparatif correspondant bM (fig. I).

(*b*) **Le profil du terrain est polygonal** (fig. 465-1). — Si, comme cela se rencontre dans les fortifications, le profil du

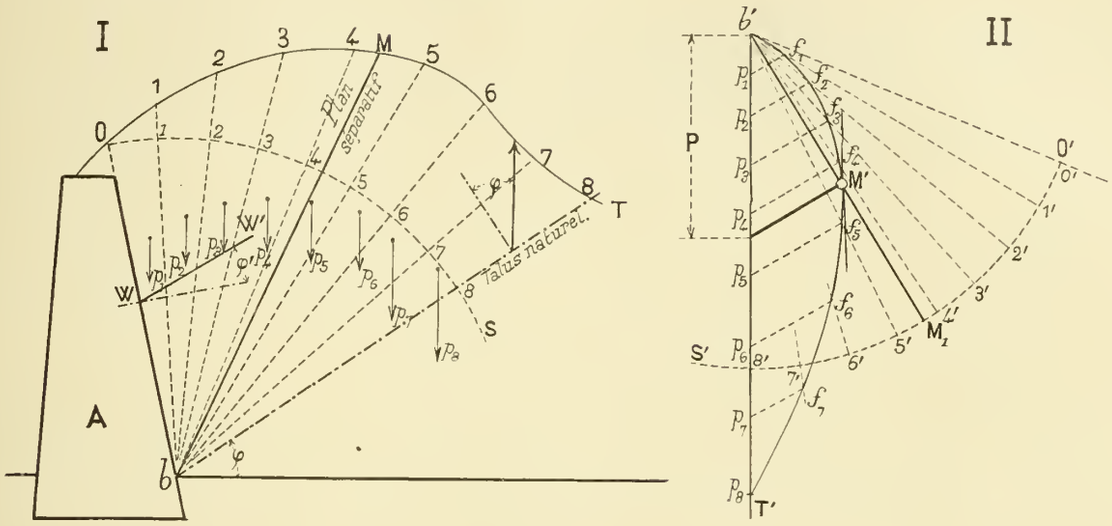


Fig. 464

terrain OABCD est polygonal, il vaut mieux diviser en parties égales les côtés du polygone plutôt que de diviser le cercle rapporteur. On décompose ainsi le secteur OJD, compris entre le mur et le talus naturel JD, en quatre séries de triangles égaux dont on évalue les surfaces. Par exemple (fig. 465), les trois triangles répondant à OA ont pour hauteur $h = 9^m,10$ et pour base $1^m,32$, leur surface est donc égale à $9,10 \times 1,32 = 12^{m2},01$.

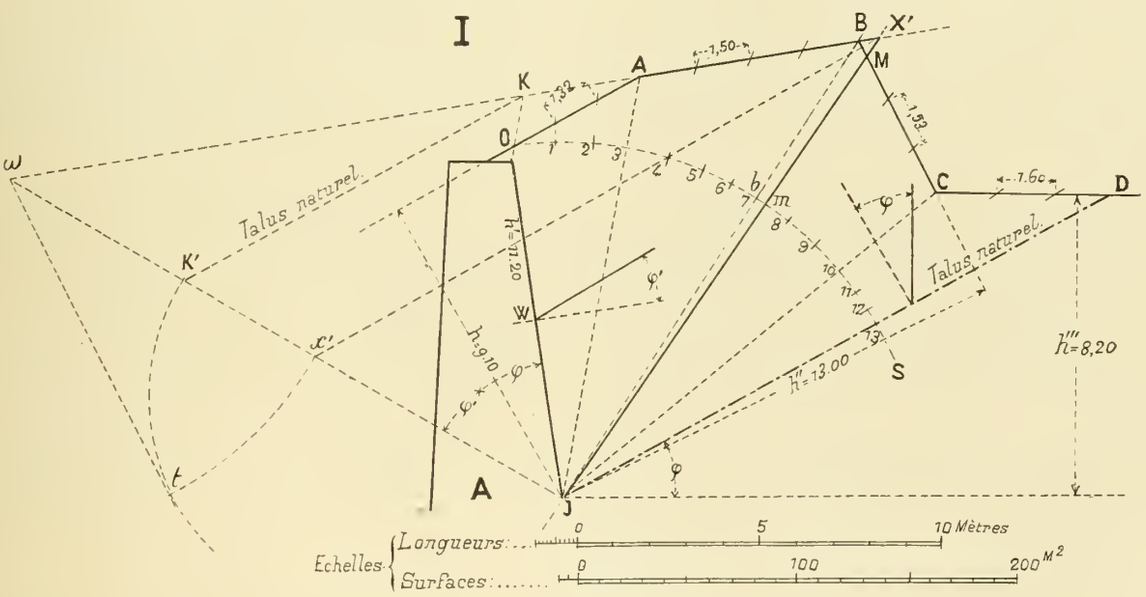


Fig. 465

On verra de même que AB comporte 4 triangles de chacun $16^{m2},80$; que BC correspond à 3 triangles de $19^{m2},89$, et que CD comprend 3 triangles de $13^{m2},12$. Aux divisions égales des côtés du polygone correspondent des divisions inégales 1, 2, 3, ..., 13 sur le cercle rapporteur. (Voir fig. II, page suivante).

L'épure s'achève comme dans le cas général, et donne en JM le plan séparatif de poussée maxima, et (fig. II) en $m'M'$ la valeur de la poussée correspondante, évaluée en mètres carrés.

Pour l'avoir en poids, on multipliera par le poids de 1 m. cube de terre, soit 1800 k.

Exemple. — On trouve $m'M' = 46^{m2}$, donc on a pour la poussée maxima $F' = 46 \times 1800 = 82800$ k.

Telle est la poussée maxima exercée sur une tranche de mur de 1 mètre de largeur et répondant à la hauteur de mur OJ.

(*c*) **Tracé de Poncelet.** (Voir, pour sa démonstration, la note à la fin du chapitre.) — 1° On mène la droite OK parallèle à JA et on prend en K son intersection avec le profil BA prolongé. (V. fig. 1, page précédente).

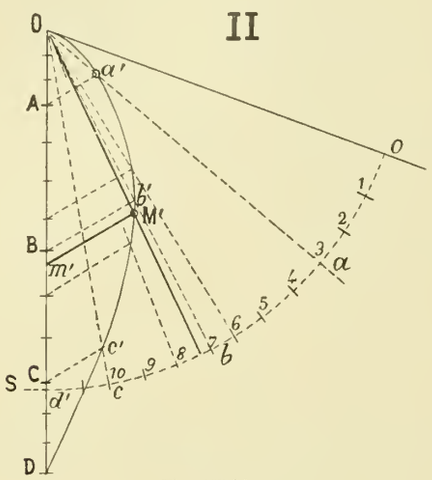


Fig 465 bis

2° Par le point J, on mène la droite Jω, faisant avec le parement intérieur du mur un angle égal à $\varphi + \varphi'$, et on prend en ω son intersection avec la même droite BA prolongée.

3° Par le point K on mène une parallèle au talus naturel des terres et on prend en K′ son intersection avec la droite Jω précédente.

4° Sur JK′, comme diamètre, on trace une demi-circonférence et, du point ω, on lui mène une tangente ω*t*.

5° On rabat cette tangente de ω*t* en ω*x*′ sur la droite ωJ et par le point *x*′ on mène une parallèle *x*′X′ au talus naturel, jusqu'à la rencontre en X′ avec le côté AB du profil ; enfin :

6° Le plan séparatif de poussée maxima est le plan JX′.

(*d*) **Remarques.** — 1° Nous ne devons pas trouver ainsi tout à fait la même droite JM′ que par le tracé de la courbe de poussée ; cela tient à ce que le point X′ donné par la méthode de Poncelet tombe en dehors de la partie utile du profil AB. (Voir la note *c*.)

2° Si l'on emploie la méthode de la courbe des poussées, il suffira de tracer cette courbe aux environs du maximum M′ et l'on remarquera que la section correspondante JM′ est toujours aux environs de la bissectrice de l'angle DJO, plutôt au-dessous qu'au-dessus de cette bissectrice.

3° Les arcs O*a*′, *a*′*b*′, *b*′*c*′, — *c*′D (fig. 11) de la courbe de poussée, qui répondent aux côtés rectilignes OA, AB — BC — CD du profil, sont des arcs d'hyperbole. On le démontrera par la géométrie analytique.

489. **Point d'application de la poussée maxima.** — (*a*) **Le terre-plein est un plan unique.** — Soit BH (fig. 466) le parement intérieur d'un mur soutenant un massif de terre dont le terre-plein est un plan unique affleurant la partie supérieure H du mur ; soit BX le plan séparatif de poussée maxima correspondant à la hauteur BH. Il est évident 1° que les plans séparatifs correspondant à des hauteurs *b*′H et *b*″H, seront *b*′X′ et *b*″X″, parallèles entre eux et parallèles à BX et 2° que les poussées de chacun des triangles partiels seront proportionnelles à leurs surfaces, c'est-à-dire aux poids de terre qu'ils représentent. Elles auront toutes la même direction F′ faisant avec la normale au parement du mur l'angle φ' de frottement des terres sur la maçonnerie.

Il en résulte que si on considère la tranche infiniment mince *b*′X′X″*b*″, qui est la différence entre deux triangles successifs de poussée H*b*′X′ et H*b*″X″, elle donnera pour son compte une poussée élémentaire dont le point d'application sera situé entre les points *b*′ et *b*″ et dont la direction sera celle de F′ ; la grandeur de cette poussée élémentaire sera proportionnelle à la différence des surfaces des triangles de poussée, c'est-à-dire proportionnelle à la surface du trapèze infiniment mince *b*′X′X″*b*″ ; en admettant que la longueur élémentaire *b*′*b*″ soit la même pour tous les trapèzes élémentaires analogues, les surfaces sont proportionnelles aux bases moyennes parallèles à *b*′X′.

Soit b_1B′ la valeur de cette poussée élémentaire ; toutes les tranches analogues donneront des poussées élémentaires représentées par les ordonnées obliques, telles que b_1′B′,

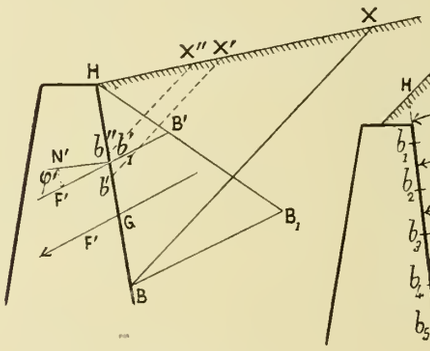


Fig. 466

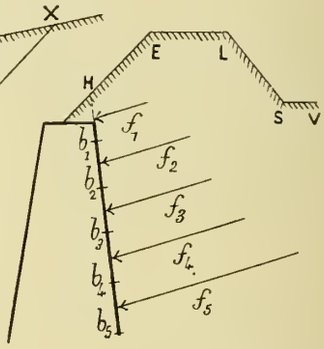


Fig. 467

d'un triangle HBB$_1$. Le mur sera donc soumis à une série de forces parallèles à BB$_1$ agissant en ses divers points et égales respectivement aux ordonnées obliques successives du triangle. La résultante de toutes ses forces, qui est la poussée, passera par le centre de gravité du triangle, et par suite viendra rencontrer le mur au *point* G *situé au tiers du parement à partir de la base* ; ce point est le *point d'application de la poussée.*

(*b*) **Le profil est quelconque** (fig. 467). — Supposons déterminées les poussées F_1, F_2, F_3, etc., sur les hauteurs de parement b_1H, b_2H, b_3H, etc. Si les divisions b_1b_2, b_2b_3, etc. sont suffisamment petites, la poussée élémentaire f_2 sur l'élément b_1b_2, par exemple, est égale à la différence $F_2 - F_1$; de même la poussée élémentaire sur l'élément b_2b_3 est égale à la différence $F_3 - F_2$, et ainsi de suite.

On peut considérer chacune de ces poussées élémentaires comme ayant son point d'application au centre de figure de l'élément de mur correspondant. La poussée totale s'obtiendra en composant, par un funiculaire, les poussées élémentaires appliquées aux différents éléments du mur. Cette méthode exige des constructions assez longues et pénibles, et il n'est pas, en général, nécessaire de l'employer dans les applications.

Le général **Poncelet** a démontré que la poussée, pour les profils ordinaires employés dans la fortification, n'est jamais appliquée plus haut que les 0,35 de la hauteur à partir de la base du parement ; et qu'on se mettra toujours dans les conditions les plus défavorables en la supposant appliquée aux 0,366 de la hauteur.

Dans les applications ordinaires, nous la supposerons toujours appliquée au tiers de la hauteur du mur à partir de la base, ce qui répondra aux 0,333 de la hauteur.

490. **Le terrassement supporte une surcharge.** — (*a*) **La surcharge est uniformément répartie.** — Soit BH le parement intérieur du mur, le terrassement étant terminé par un terre-plein horizontal HL (fig. 468).

Représentons la surcharge, uniformément répartie, par un massif de terre de même densité que le terrassement et

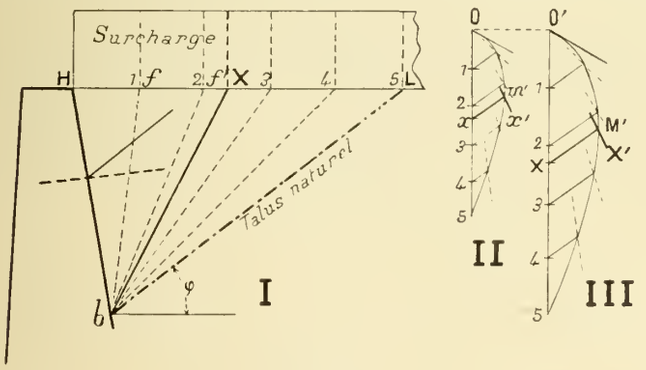


Fig. 468.

limité, à sa partie supérieure, par un plan horizontal MN ; nous admettrons que la rupture, dans cette surcharge, se produit suivant une verticale.

Nous chercherons le plan séparatif *b*X de poussée maxima en faisant l'épure de la courbe des poussées comme il a été dit (v. n. 488). A cet effet, après avoir divisé HL en parties égales nous évaluerons le poids des secteurs ainsi déterminés.

Si la surcharge n'existait pas, ces poids seraient ceux des triangles tels que *fbf'* et ils seraient égaux entre eux. Si la surcharge existe, il faudra les augmenter des poids des rectangles qui les surmontent ; ils seront plus grands que dans le premier cas mais encore égaux entre eux. La courbe de poussée obtenue dans le second cas (fig. III) sera donc une dilatation en hauteur et en largeur de celle qui répond au premier cas (fig. II). Elle lui sera homothétique par rapport au point de départ supérieur O ou O' et la tangente verticale qui donne le maximum donnera, comme conséquence, le même plan séparatif *b*X' (fig. I) de poussée maxima.

(*b*) **La surcharge est inégalement répartie** (fig. 469). — Représentons cette surcharge par un massif de terre de même densité que le terrassement, mais ne s'étendant que sur une partie du terre-plein, et dont le profil aura la forme d'un rectangle AA'BB', voire même d'un trapèze ou d'une figure quelconque (fig. 469) ; admettons que la rupture dans cette surcharge se fasse encore suivant une verticale.

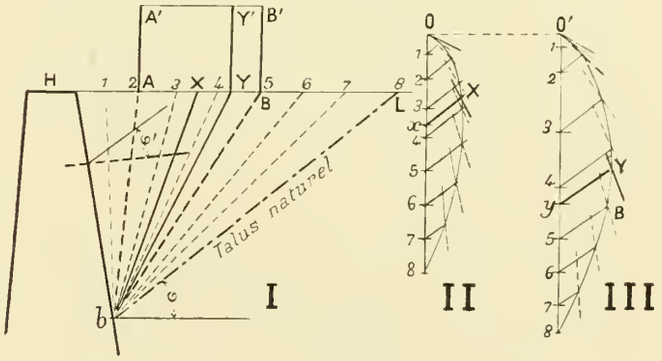


Fig. 469

Si la surcharge n'existait pas, nous diviserions l'intervalle HL en parties égales et inégales, nous diviserions le secteur total en secteurs plus élémentaires 1, 2, 3, ... 8 et nous en déduirions, par une courbe des poussées à laquelle (fig. II) nous mènerons une tangente verticale X, le plan séparatif de poussée maxima *b*X (fig. I). Il tombe entre les rayons 3 et 4.

Si la surcharge existe, nous tracerons, de même (fig. III), une courbe des poussées à laquelle nous mènerons une tangente verticale Y nous faisant connaître le plan séparatif de poussée maxima *b*YY'.

Il n'est pas le même que tout à l'heure. En effet, la courbe de la figure III n'est pas du tout semblable à la courbe de la figure I, puisque tandis que, sur chacune d'elles, les rayons issus de O et de O' sont parallèles, de même que les ordonnées obliques, les abscisses ne sont pas proportionnelles. Sur ces deux figures entre 0 et 2, de même qu'entre 5 et 8, c'est-à-dire hors de la charge, elles sont égales ; tandis qu'entre 2 et 5, c'est-à-dire sous la charge, elles sont plus grandes dans la figure III que dans la figure II.

Remarque. — Dans les deux cas où les terrassements supportent des surcharges, le point d'application de la poussée n'est plus au tiers de la hauteur du parement ; on devra le déterminer par la méthode indiquée au n° 489-*b*.

§ 3. — Poussée de l'eau. — Poussée du vent

491. **Poussée de l'eau.** — (*a*) **Sur une surface plane.** — On sait, d'après les lois de l'hydrostatique, que la pression de l'eau sur un élément de surface plane est toujours normale à cette surface et égale au poids d'une colonne liquide qui aurait pour hauteur la distance du centre de gravité de l'élément de surface à la surface de l'eau. Raisonnons encore sur une tranche de liquide de 1 mètre de longueur.

Soit (fig. 470) *b*H le parement du mur, HB′ le niveau de l'eau. Si au point *b* nous menons à la droite *b*H une perpendiculaire *b*B′ égale à la hauteur verticale *b*B, nous aurons, en joignant le point B′ au point H, le triangle représentatif des poussées élémentaires exercées en chaque point de parement du mur. La résultante de toutes ces poussées élémentaires sera appliquée en G, au tiers de la droite *b*H à partir du pied *b* du mur ; elle sera normale au parement et aura pour valeur $1/2(a \times h)$, a désignant la longueur *b*H du parement mouillé, et h la distance verticale *b*B du pied *b* de ce parement au niveau de l'eau.

(*b*) **Sur un parement courbe.** — Si le parement intérieur du mur est courbe (fig. 471), nous le diviserons en un certain nombre de parties égales assez petites pour qu'on puisse les considérer comme rectilignes. Considérons en *de* un de ces éléments plans ; la pression de l'eau sur cet élément est représentée par le poids d'un prisme d'eau dont

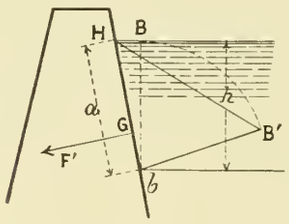


Fig. 452

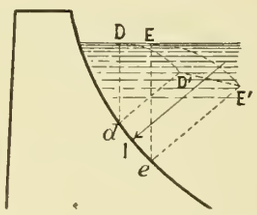


Fig 453

la section droite est le trapèze E′*ed*D′, dans lequel *d*D′ et *e*E′ sont les distances verticales respectives des points *d* et *e* au niveau de l'eau, ces droites *d*D′, *e*E′ étant normales à l'élément *ed*.

Cette pression est normale à l'élément *de* et passe au centre de gravité du trapèze *de*E′D′ ; elle est appliquée en un point I de *de*, tel que l'on ait

$$\frac{dI}{Ie} = \frac{dD' + 2E'e}{E'e + 2dD'}. \quad \text{(V. C}^{t}\text{. n° 122-}c\text{)}.$$

En composant les pressions élémentaires appliquées à chacun des éléments du parement tels que *de*, nous obtiendrons la poussée en grandeur, direction et position ; cette opération se fera par un funiculaire.

492. **Poussée du vent.** — (*a*) **Sur une surface plane.** — Certains ouvrages doivent résister principalement à l'action du vent ; tels sont les murs de clôture, les cheminées d'usines, les phares.

Nous avons indiqué au n° 344, p. 280, tout ce qui a rapport à l'action du vent sur les ouvrages.

Rappelons que si v est la vitesse du vent, la *puissance du vent*, c'est-à-dire la pression par unité de surface qu'il exerce sur une surface normale à sa direction, est donnée par la formule

$$P = 0{,}125v^2.$$

L'action normale du vent par unité de surface sur un plan oblique dont la normale fait avec sa direction l'angle α est donnée par la formule

$$P' = 0{,}125v^2 \cos^2 \alpha.$$

Nous avons dit que le vent souffle ordinairement en faisant un angle de 10° avec l'horizontale, et nous avons donné, au n° 344, le tableau des puissances unitaires du vent en fonction des vitesses, ainsi que la construction graphique de l'action normale du vent sur un plan. Nous avons indiqué également l'action du vent sur les différentes surfaces.

La poussée du vent sur une surface plane est toujours normale à la surface et appliquée à son centre de gravité. Dans nos climats, on peut admettre comme vitesse maxima d'un vent, soufflant d'une manière continue, 31 ou 32^{m}, correspondant à une puissance unitaire de 125^{k} par mètre carré ; on s'impose alors de ne pas faire travailler les matériaux au-delà de la résistance de sécurité.

(*b*) **Sur une surface courbe.** — Nous avons indiqué à l'occasion des fermes en arc (v. n° 450) comment cette question pouvait se résoudre graphiquement.

(*c*) **Poussées exceptionnelles.** — Pour les grands ouvrages, et en particulier pour les ouvrages à la mer, une commission d'ingénieurs a fixé, à la suite de l'accident du pont de la Tay, la puissance du vent à admettre à 273^{k} ; ce qui correspond à des coups de vent de durée ordinairement restreinte.

Nous montrerons plus loin, en étudiant les murs soumis à l'action du vent, que si un ouvrage a été calculé pour que

les matériaux ne travaillent pas au-delà de la résistance de sécurité avec une puissance du vent de 125^k, on pourra admettre qu'il puisse subir pendant un temps assez court des coups de vent dont la puissance atteindra 273^k.

NOTE. — Méthode de Poncelet pour déterminer la poussée maxima des terres

Cette méthode est celle qui est enseignée à l'Ecole d'application de l'artillerie et du génie de Fontainebleau.

(*a*) **Cas général.** — Soit bX la trace, supposée connue, du plan séparatif du coin de poussée (fig. 472) ; prolongeons le parement intérieur du mur jusqu'à sa rencontre en H avec le talus extérieur du cavalier ; le coin de poussée a pour section droite le contour bHEX. Nous allons d'abord le simplifier sans changer sa surface ; à cet effet :

Joignons bE et, par le point H, menons la droite HK parallèle à bE jusqu'à sa rencontre en K avec EL prolongée ; le triangle bKX, si l'on traçait la ligne bK, ce qui est inutile, serait équivalent au quadrilatère bHEX et sa surface est $\frac{1}{2}$ (KX $\times$ bT), bT étant perpendiculaire à EL.

Le poids Q du coin de poussée, si p est le poids du mètre cube de terre, est alors

$$Q = \frac{1}{2}\, p \times KX \times bT.$$

Construisons le dynamique abc des trois forces Q, F et F′, cette dernière étant égale et de signe contraire à la poussée ; la force F′ est déterminée en intensité et direction et nous allons, pour trouver son maximum, l'évaluer en fonction des données de la figure et du poids Q du coin de poussée. Pour cela, menons d'abord les verticales bZ et H′ et, cela fait :

Menons par le point b une droite bO faisant avec le parement intérieur du mur, et du côté opposé au cavalier de terre, un angle égal à la somme $\varphi + \varphi'$ des angles de frottement de terre sur terre et de terre sur pierre ; menons Xx parallèle à la direction bM du talus naturel des terres. Je dis que les triangles bXx et adc (triangle dynamique) sont semblables comme ayant les angles égaux chacun à chacun.

En effet : l'angle xXb est égal à l'angle XbM comme alternes-internes, et celui-ci est égal à $90° - (\varphi + Zb\text{X})$. L'angle dac est égal à l'angle FH′, car la droite H′ est verticale, et par suite cet angle est égal à $90° - (\varphi + Zb\text{X})$. Il en résulte que les angles xXb et dac sont égaux.

De même l'angle xbX est égal à $\varphi + \varphi' + \text{H}b\text{X}$; l'angle acd est égal à l'angle JIF formé par la droite IJ parallèle à F′, avec F ; par suite

$$acd = \text{JIF} = \varphi + \varphi' + \text{N}''\text{IN}$$

car IN″ est une parallèle à la normale N′ au parement bH ; et comme les angles N″IN et HbX sont égaux, comme étant tous deux aigus et ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, il en résulte que $acd = \varphi + \varphi' + \text{H}b\text{X}$ et enfin $acd = xb\text{X}$.

Les triangles semblables bXx et adc nous donnent

$$\frac{F'}{Q} = \frac{bx}{Xx}, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad F' = Q \times \frac{bx}{Xx} = \frac{1}{2}\, p \times KX \times \frac{bx}{Xx}.$$

Menons par le point K les droites Ky et KK′ respectivement parallèles aux droites bX et Xx ; les triangles OxX et OKK′ sont semblables et donnent

$$\frac{OX}{Xx} = \frac{OK}{KK'}.$$

De même les triangles semblables OKy et ObX donnent

$$\frac{KX}{OX} = \frac{by}{Ob}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{KX}{Xx} = \frac{OK \times by}{KK' \times Ob},$$

et en portant la valeur de ce rapport dans la formule 1, nous avons pour la poussée

$$F' = \frac{1}{2}\, p \times \frac{OK \times by \times bx \times bT}{KK' \times Ob}.$$

Remarquons que $OK \times bT = Ob \times KK'$ sin KK′b, car ces deux expressions représentant le double de la surface du triangle ObK, il en résulte

$$F' = \frac{1}{2}\, p \times bx \times by \times \sin KK'B.$$

L'angle KK′b est constant et égal, comme il est facile de le voir, à $90° - (\varphi' + \varepsilon)$; ε étant l'angle que le parement intérieur du mur fait avec la verticale ; la valeur de F′ ne dépend donc que du produit $bx \times by$ et elle sera maxima en même temps que ce produit. Or :

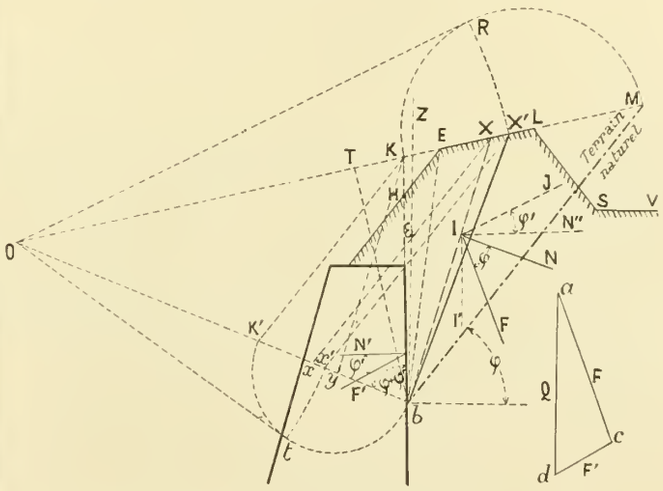


Fig. 472

Les triangles semblables OxX et ObM donnent

$$\frac{bx}{Ob} = \frac{MX}{MO}.$$

De même les triangles semblables ObX, OKy, donnent

$$\frac{by}{Ob} = \frac{KX}{OX}.$$

Multipliant membre à membre, il vient :

$$bx \times by = Ob^2 \times \frac{MX \times KX}{MO \times OX}.$$

Comme Ob est constant, le maximum du produit ne dépend que du maximum de la fraction $\frac{MX \times KX}{MO \times OX}$ qui peut s'écrire $\frac{(OM - OX)(OX - OK)}{MO \times OX}$

ou $$\frac{(OM + OK)OX - OM \times OK - OX^2}{MO \times OX}$$

ou encore $$\frac{MO + OK}{MO} - \left(\frac{OX}{OM} + \frac{OK}{OX}\right).$$

Cette quantité se compose de deux parties ; la première étant constante, le maximum aura lieu quand la quantité soustractive entre parenthèses sera minima.

Or les deux termes $\frac{OX}{OM}$ et $\frac{OK}{OX}$ de cette somme ont un produit constant, qui est OK : OM ; le minimum de la somme aura donc lieu lorsque les deux termes seront égaux ; nous aurons alors

$$\frac{OX}{OM} = \frac{OK}{OX},$$

d'où $$OX^2 = OM \times OK.$$

Dès lors, décrivons sur MK comme diamètre une demi-circonférence ; menons-lui par le point O une tangente OR et rabattons la longueur OR en OX sur OM ; la droite bX′ est la trace du plan séparatif du coin de poussée donnant sur le mur la poussée maxima.

(*b*) **Autre tracé.** — Menons la droite X′*x*′ parallèle à *b*M; le point *x* pourra être obtenu directement en menant par le point O une tangente O*t* à la demi-circonférence décrite sur *b*K′ comme diamètre et rabattant la longueur O*t* en O*x*′, sur O*b*. En effet :

De l'égalité
$$\frac{OX}{OM} = \frac{OK}{OX},$$
on tire
$$\frac{OM - OX}{OM} = \frac{OX - OK}{OX},$$
ou
$$\frac{MX}{OM} = \frac{KX}{OX}.$$

Il en résulte que $bx = by$; donc pour la position du plan de séparation correspondant à la poussée maxima, le point x et le point y sont confondus au point x'.

L'expression de la poussée devient alors
$$F' = \frac{1}{2}\, p \times \overline{bx'}^2 \sin KK'B,$$
et comme $KK'B = 90° - (\varphi' + \varepsilon)$, il vient
$$F' = \frac{1}{2}\, p \times bx'^2 \times \cos(\varphi' + \varepsilon).$$

(*c*) **Autre cas possible.** — Nous avons supposé que le point X′ tombait sur EL. Si, en faisant la construction, on trouve un point en dehors de cette droite, c'est que la trace du plan séparatif rencontre un autre côté LS ou SV du profil ; elle ne rencontrera jamais le côté HE dont la pente est ordinairement celle du talus naturel.

Pour appliquer la construction à un autre côté du profil, SV par exemple, il faut commencer par déterminer le point K situé sur le prolongement de SV, de telle sorte que le triangle *b*KX soit équivalent au polygone *b*HELSX. Nous y arriverons en transformant le polygone *b*HELS en un triangle équivalent ayant VS prolongé comme base (fig. 473). A cet effet :

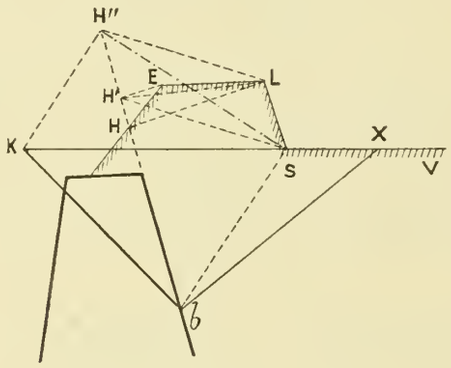


Fig. 473

Menons EH′ parallèle à LH et joignons les points L et H′ ; le quadrilatère *b*H′LS est équivalent au pentagone *b*HELS.

Menons LH″ parallèle à H′S et nous aurons le triangle *b*H″S équivalent au quadrilatère *b*H′LS ; enfin déplaçons le sommet H″ de ce triangle parallèlement au côté *b*S et amenons-le en K, sur la ligne VS prolongée, le triangle *b*KS est équivalent au précédent.

Le point K étant ainsi déterminé, la construction s'achèvera comme précédemment.

(*d*) **Cas particuliers.** — 1° *On néglige le frottement des terres sur le mur.* — Nous venons d'admettre qu'on tenait compte du frottement des terres sur le parement intérieur du mur ; ce frottement est favorable à la stabilité ; mais il n'est efficace que si l'on a pris les précautions suffisantes pour éviter les infiltrations d'eau.

On se placera dans les conditions les plus défavorables et, par suite, on aura un surcroît de sécurité en supposant que l'angle de frottement φ' des terres sur le mur est nul. La poussée est alors normale au parement intérieur ; la construction précédente s'applique à ce cas.

2° *Le terre-plein est horizontal.* — La construction est encore la même ; mais si de plus on néglige le frottement des terres sur le mur, elle se simplifie, et le plan séparatif a pour trace la bissectrice de l'angle que fait le parement intérieur du mur avec la ligne du talus naturel menée par son pied (fig. 474). En effet :

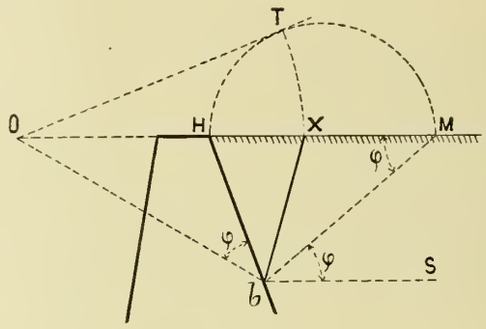


Fig. 474

Soit *b*H le parement intérieur du mur, *b*M la ligne du talus naturel, *b*X la trace du plan séparatif, nous devons mener au point *b* la droite *b*O faisant avec *b*H l'angle φ et mener par le point O où elle rencontre le terre-plein MH, une tangente à la demi-circonférence décrite sur HM comme diamètre ; la longueur OT est rabattue en OX, et nous avons :
$$OX^2 = OH \times OM.$$
Les triangles semblables OH*b*, OM*b* donnent
$$\frac{OH}{Ob} = \frac{Ob}{OM},$$
d'où $Ob^2 = OH \times OM$ et $Ob = OX$.

Le triangle O*b*X est isocèle, et les angles O*b*X et OX*b* sont égaux ; mais, de plus, les angles OX*b* et X*b*S sont égaux comme alternes internes ; il en résulte $ObX = XbS$, et en retranchant le même angle φ de ces deux angles, il reste $HbX = XbM$.

La droite *b*X est donc bien la bissectrice de l'angle H*b*M. C. q. f. d.

3° *Le plan séparatif est déterminé par la nature du terrain.* — Lorsqu'on construit des murs de soutènement à flanc de coteau, sur des pentes rocheuses et assez raides, le prisme de poussée se compose de tout le remblai

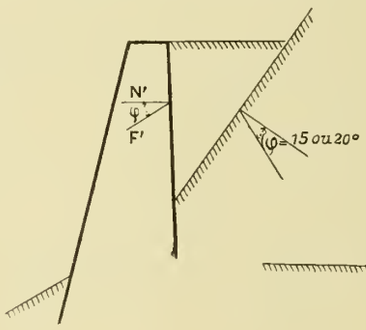


Fig. 475

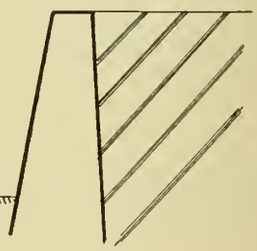


Fig. 476

rapporté entre le mur et la pente rocheuse du coteau, qui forme alors le plan séparatif ; on donne à l'angle de frottement φ la valeur correspondant au frottement de terre sur maçonnerie, et comme les infiltrations sont à craindre, il est même prudent d'abaisser à 15° ou 20° la valeur de cet angle (fig. 475).

Il en est de même dans le cas d'un mur destiné à soutenir un massif rocheux à stratification inclinée ; le glissement pouvant se faire suivant un lit de stratification, surtout s'il y a des bancs de marne ou d'argile interposés, c'est cette direction qu'il faut considérer comme plan séparatif (fig. 476).

CHAPITRE III

LES MURS

§ 1. — Murs soutenant des terres ou de l'eau

494. **Stabilité d'un mur de soutènement.** — (*a*) **Courbe des centres de pression.** — Connaissant la poussée F′ en direction et intensité, ainsi que son point d'application G (fig. 477), nous allons chercher quelles dimensions il faut donner au mur de soutènement pour qu'il résiste à cette poussée. Nous ne considérerons d'abord que la partie du mur située au-dessus des fondations. Nous allons d'abord définir la courbe des centres de pression, et déduire du tracé de cette courbe les conditions de stabilité d'un mur de soutènement.

Supposons connue le profil ABA′B′ du mur et considérons ce qui se passe au-dessus d'une assise MM′. La partie ABM′M du mur est soumise à deux forces qui sont : 1° le poids

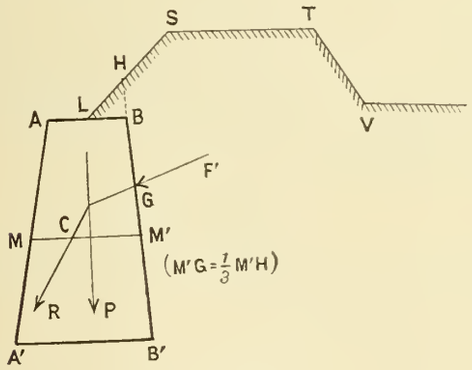


Fig. 477.

réuni P de la maçonnerie et du prisme de terre LBH situé au-dessus du mur ; 2° la poussée F′ appliquée en un point de M′H situé dans le voisinage du tiers de cette ligne à partir de M′, et que nous avons appris à déterminer. En composant les deux forces P et F′, nous avons une résultante R qui représente la pression exercée sur l'assise MM′ par la partie du mur située au-dessus de cette assise. Le point C, où cette résultante rencontre l'assise MM′, est le *centre de pression* sur cette assise.

Si nous considérons successivement toutes les assises comprises entre AB et la base A′B′, le lieu géométrique du centre de pression C sera la *courbe des centres de pression* (on la nomme quelquefois, *mais à tort*, la courbe des pression), cela posé :

Le mur peut être détruit de trois manières différentes :

1° Par le renversement d'une partie de ce mur ABMM par exemple, cette partie de mur pivotant autour de l'arête inférieure et extérieure M ; nous éviterons ce renversement du mur si la *condition d'équilibre* est remplie ;

2° Par glissement d'une portion ABMM′ du mur sur l'assise inférieure MM′ ; ce glissement sera évité si la *condition de frottement* est remplie ;

3° Enfin le mur peut être détruit par écrasement des matériaux suivant une arête, M par exemple, d'une assise, d'où la *condition de résistance*.

On voit que c'est exactement comme pour les voûtes ; du reste, l'analogie va se continuer.

(*b*) **Condition d'équilibre.** — La partie ABMM′ du mur sera en équilibre si le centre de pression C est à l'intérieur du joint MM′.

Le mur sera donc en équilibre si en aucun point la courbe des centres de pression ne sort du profil de ce mur.

Nous allons voir que cette condition n'est pas suffisante et doit être réunie aux deux autres.

(*c*) **Condition de frottement.** — La partie ABMM′ du mur ne pourra pas glisser sur le joint MM′ si la résultante R fait avec la normale à ce joint, au point C, un angle inférieur à l'angle de frottement des maçonneries l'une sur l'autre. Nous avons donné dans la théorie des voûtes (n° 461-*e*) la valeur à adopter pour cet angle. Il est en général de 35°.

(*d*) **Condition de résistance.** — L'arête la plus compri-

mée du joint MM′ est l'arête M ; si nous appliquons la formule

$$p = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)$$

la valeur de la pression p ne doit pas dépasser la résistance de sécurité admise pour les maçonneries dont se compose le mur.

Rappelons que dans cette formule, N est la composante, normale au joint MM′, de la résultante R ; Ω est la surface du joint ; x est la distance du centre de pression C au centre de gravité du joint et α la demi-largeur du noyau central. Si b est la largeur du joint, nous avons $\alpha = 1/6b$. Cette formule n'est applicable que si en aucun point du joint ne se produisent des efforts de traction ; nous avons déjà vu que, si on ne tient pas compte de l'adhérence du mortier, le centre de pression doit, pour satisfaire à cette condition, tomber dans le noyau central vrai $\alpha = \frac{b}{6}$.

La courbe des centres de pression devra donc rester dans le canal formé par les noyaux centraux vrais. C'est ce que nous nommerons la *canalisation parfaite*.

Si l'on peut compter sur l'adhérence de mortiers de bonne qualité, comme on les emploie aujourd'hui dans les constructions, nous avons montré dans la théorie des voûtes (n° 460) qu'en admettant une adhérence égale à 1/5 de la résistance à l'écrasement, on peut prendre un noyau central mixte de largeur égale à $1/4b$. Nous aurons alors la *canalisation mixte*.

On peut même permettre à la courbe des centres de pression d'atteindre l'arête extérieure du masif en un point, et alors il suffit qu'en aucun point elle ne sorte du profil du mur. C'est la *canalisation de masse*.

On devra, dans ce cas, prendre comme résistance de sécurité des maçonneries celle du mortier formant les joints, et ne compter, dans le calcul des efforts sur le joint, que les compressions, en négligeant les tensions qui se développent vers l'intérieur du joint, dans la partie où le décollement tend à se produire. Néanmoins cette convention est imprudente.

(*e*) **Remarque.** — La poussée des terres croît à peu près proportionnellement au carré de la hauteur du mur ; le poids de celui-ci ne croît qu'à peu près proportionnellement à sa hauteur ; par suite, l'angle de la résultante R avec la normale à chaque assise augmente à mesure qu'on s'approche de la base du mur. Si donc un glissement tend à se produire, ce sera sur une assise voisine de la base du mur ; c'est donc sur l'assise de base qu'il suffira, en général, de faire porter la vérification de frottement.

De même, le centre de pression se rapproche d'autant plus de l'arête extérieure de l'assise, que celle-ci est plus près de la base du mur, et c'est sur l'assise de base qu'il faudra, par suite, vérifier la condition de canalisation. Comme de plus, c'est aussi sur la base du mur que la pression par unité de surface est généralement la plus forte, c'est sur cette assise également qu'il faudra vérifier la condition de résistance.

495. **Calcul d'un mur de soutènement.**— (*a*) **Données du problème.** — Lorsqu'on cherche à déterminer les dimensions d'un mur de soutènement, on se donne en général les éléments du profil, sauf un seul ; c'est lui qui constitue l'inconnue.

1er Cas. — On se donne en général : 1° la position du parement extérieur et son inclinaison ; 2° la hauteur du mur ; 3° la largeur de la berne à laisser à sa partie supérieure ; 4° le profil du terrassement ; 5° l'inclinaison du parement intérieur.

Il reste à déterminer la position de ce parement, c'est-à-dire l'épaisseur du mur.

Il est bien évident que, suivant les cas, les données pourront être un peu différentes.

2e Cas. — On peut, par exemple, se donner l'épaisseur du mur à la partie supérieure et prendre comme inconnue l'inclinaison d'un des parements.

(*b*) **Dimensions provisoires. — Formules empiriques.** — Plaçons-nous dans le 1er cas. Soit AB (fig. 478) le parement extérieur du mur, EHH_2 le profil du terrassement, AE la largeur de la berne à réserver sur la crête du mur, et soit HB_1 la direction du parement intérieur ; la position de ce parement est ce qu'il faut trouver. Nous prendrons comme premier essai une épaisseur déduite d'une formule empirique.

On peut donner au mur, au milieu de sa hauteur, une épaisseur égale au tiers de la hauteur ; mais on a ainsi une épaisseur exagérée dans le cas de terres légères et de maçonneries lourdes.

Le général **Poncelet** a indiqué la formule

$$e = 0{,}286(h + h')$$

dans laquelle e est l'épaisseur au 1/9 de la hauteur à partir de la base, h la hauteur du mur et h' celle du terrassement au-dessus de la crête du mur.

Cette formule est applicable au cas où l'angle du talus naturel des terres est de 45°, et le poids du mètre cube de terre les 2/3 de celui du mètre cube de maçonnerie.

(*c*) **Condition de canalisation.** — Soit donc B_1 le pied du parement intérieur A_1B_1, résultant d'une épaisseur d'essai calculée empiriquement. Construisons géométriquement la poussée comme il a été dit aux nos 488 et 489 ; soit F_1' cette poussée appliquée au point D_1 du parement provisoire A_1B_1. Calculons : 1° le poids du prisme de terre EHA_1, situé au-dessus du mur, poids qui doit être appliqué au centre de gravité g_1 du triangle EHA_1 ; 2° le poids

du mur ABA_1B_1, qui sera appliqué au point g'_1 centre de gravité du trapèze ABA_1B_1; et 3° composons ces deux poids, nous aurons le poids total P_1 appliqué au point G_1. Cela fait : composons les forces F'_1 et P_1; leur résultante

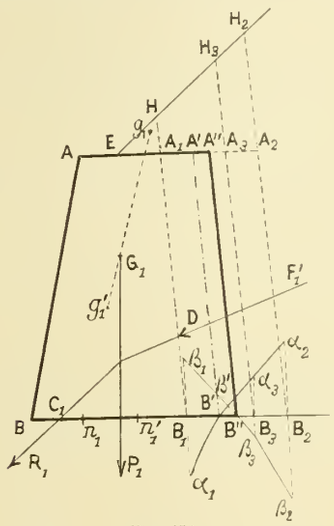


Fig. 478.

R_1 rencontre la base du mur au point C_1. Si ce point est au tiers de BB_1, la condition de canalisation parfaite est satisfaite et l'épaisseur d'essai est précisément l'épaisseur cherchée, à la condition que la pression sur l'arête B ne dépasse pas la résistance de sécurité et que la résultante R ne fasse pas avec la normale au joint BB_1 un angle supérieur à l'angle de frottement.

Si le point C_1 est, comme nous le supposons ici, dans le tiers extérieur n_1B du joint, l'épaisseur d'essai est trop faible et la quantité dont nous sortons du tiers central n_1n_1, c'est-à dire l'*erreur*, est n_1C_1.

Portons sur la verticale du point B_1 et au-dessous de l'horizontale une longueur $B_1\alpha_1$ égale ou proportionnelle à l'erreur C_1n_1; le point α_1 ainsi obtenu sera un point de ce que nous nommerons la *courbe d'erreur*.

Prenons pour un second essai une position A_2B_2 du parement intérieur et opérons de la même manière que pour le parement A_1B_1; nous trouverons (1) un centre de pression C_2 situé dans le tiers central n_2n_2' du joint BB_2, ce qui veut dire que l'épaisseur choisie est trop forte. Portons sur la verticale du point B_2 une longueur $B_2\alpha_2$ égale ou proportionnelle à cette seconde erreur C_2n_2, mais au-dessus de BB_2 et non plus au-dessous; le point α_2 est un autre point de la courbe d'erreur. Faisons un troisième essai intermédiaire A_3B_3, nous aurons de même un troisième point α_3 de la courbe d'erreur que nous tracerons en $\alpha_1\alpha_3\alpha_2$.

Cette courbe coupe la droite BB_1 au point B' qui est le pied du parement intérieur cherché, satisfaisant à la condition de canalisation parfaite.

(1) Pour simplifier l'épure, les points C_2, n_2, dont il va être question, n'y sont pas indiqués.

Nota. — On opérerait d'une manière analogue dans le cas où on accepterait la canalisation mixte ou la canalisation de masse.

Remarque. — Si les centres de pression C_1 et C_2, dans les deux premiers essais, étaient très voisins du tiers du joint, on pourrait se borner à ces deux essais, et l'on admettrait que la courbe d'erreur est une ligne droite entre les points α_1 et α_2.

(*d*) **Condition de résistance.** — Il faut vérifier que la pression unitaire au point B ne dépasse pas la résistance de sécurité admise pour les maçonneries qui composent le mur. Cette condition sera en général satisfaite si l'on a employé la canalisation parfaite.

Supposons que cette vérification nous montre que la pression p' au point B est trop forte, alors, R étant la résistance de sécurité, formons la différence $p' - R$; portons sur la verticale du point B' et au-dessus de BB' une longueur $B'\beta'$ proportionnelle à cette différence; nous aurons un premier point β' d'une autre courbe d'erreur.

Faisons le même calcul au moyen des résultats des essais B_2 et B_3; nous aurons deux autres points β_2 et β_3 de la même courbe d'erreur. Pour l'essai B_2 par exemple, nous aurons une pression p_2 inférieure à R, et nous devrons porter sur la verticale du point B_2 et au-dessous de BB_2 une longueur $B_2\beta_2$ proportionnelle à la différence $R - p_2$.

Le point B'' où la courbe d'erreur coupe la base du mur est le pied du parement intérieur tel que la condition de résistance soit satisfaite; ce point est à droite du point B' trouvé tout à l'heure, ce qui prouverait que dans le cas actuel la condition de résistance l'emporte sur celle de canalisation.

(*e*) **Condition de frottement.** — En cherchant la poussée correspondant à la position A''B'' du parement qui vient d'être trouvée, puis calculant, comme il a été dit, le poids du mur, et construisant ensuite la résultante de ces forces, nous verrons si cette résultante fait avec la normale à BB' un angle inférieur à l'angle de frottement des maçonneries.

Cette condition sera en général satisfaite; si elle ne l'était pas, on pourrait modifier légèrement l'inclinaison des dernières assises, sans changer l'épaisseur du mur, de manière à les rapprocher de la direction normale à la résultante.

496. **Calcul d'un mur de réservoir d'eau.** — Les constructions précédentes s'appliquent de la même manière, seulement la poussée est toujours normale au parement. En général, la partie supérieure du mur dépassera d'une certaine hauteur le niveau de l'eau, en formant un parapet, dont le poids s'ajoutera au poids du mur et contribuera à en assurer la stabilité.

497. **Profil d'un mur de soutènement d'égale résistance.** — (*a*) **Le parement extérieur du mur est donné.** — Nous aurons donc, comme nous l'avons fait précédemment, à chercher la position du parement intérieur; mais comme nous voulons que le mur soit d'égale résistance, nous opérerons de la manière suivante : divisons la hauteur du mur en un certain nombre de parties égales, quatre par exemple, par les assises $A_1A_2A_3$ (fig. 479); cela fait, considérons la portion de mur située au-dessus de la première assise A_1 et cherchons, comme il a été dit au numéro précédent, en supposant son parement intérieur vertical, ta position à donner à ce parement; nous trouverons la position BB_1.

Considérons ensuite la portion de mur située au-dessus de l'assise A_2, et en tenant toujours le parement intérieur vertical, cherchons la position $B_2B'_1H_1$ à donner au parement d'un mur ayant comme hauteur AA_2. Nous devrons, dans cette recherche, considérer le prisme de terre $HH_1B'_1B_1$ comme faisant corps avec le mur; son poids s'ajoutera donc à celui du mur pour contribuer à la stabilité.

Nous chercherons, de même, la position du parement $B_3B'_2H_2$ pour la portion de mur située au-dessus de l'assise A_3, et enfin celle du parement $B_4B'_3H_3$ pour le mur tout entier.

Nous obtiendrons ainsi un parement intérieur en gradins, se rapprochant d'autant plus du profil d'égale résistance que les gradins sont plus multipliés. On voit que le prisme dentelé de terre qui est limité par les verticales H et H_3, contribue à la stabilité du mur.

(*b*) **Le parement intérieur est donné.** — C'est alors le parement extérieur qu'il faut déterminer (fig. 480); nous ne pourrons ici, puisque ce parement est apparent, le tracer en gradins, et l'inclinaison du parement extérieur devra être modifiée à chaque assise.

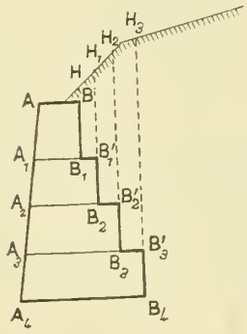


Fig. 479

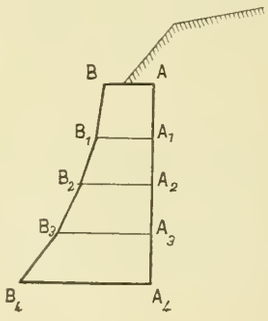


Fig. 480

Divisons encore la hauteur du mur en quatre parties égales (fig. 480); considérons la partie de mur située au-dessus de la première assise de A_1 en A, et déterminons la position du premier élément BB_1 de parement extérieur, dont nous pourrons nous donner l'inclinaison *a priori*.

Nous pourrions encore nous donner l'épaisseur AB de la crête du mur; dans ce dernier cas, l'inclinaison de BB_1 sera inconnue. Dans tous les cas, nous opérerons par la méthode des courbes d'erreur, en faisant trois essais, comme il a été dit au numéro précédent, pour la recherche du parement intérieur.

Nous passerons ensuite à la seconde assise et, le point B_1 étant fixé, nous chercherons de même l'inclinaison à donner à la portion de parement B_1B_2, en considérant le mur comme limité à la deuxième assise A_2B_2; et ainsi de suite jusqu'à la base du mur. Nous obtiendrons ainsi un profil de parement extérieur polygonal auquel, dans l'exécution, on pourra substituer un profil courbe tangent. Ce profil est surtout employé pour les murs de réservoirs ou de bassins d'alimentation.

498. **Divers profils de murs. — Leur comparaison.** — Les différents profils adoptés pour les murs de soutènement peuvent être ramenés aux types indiqués fig. 481.

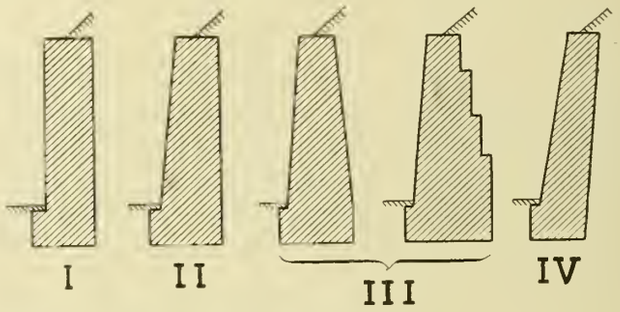


Fig. 481.

Le profil II à parement intérieur vertical et parement extérieur incliné est plus stable que le profil I à parements verticaux; la verticale du centre de gravité du mur étant rejetée vers l'intérieur, il exigera donc moins de maçonnerie.

Les deux types III, avec parement intérieur à gradins ou incliné, rapprochent de la verticale la direction de la poussée, et, par suite, ont moins de tendance au glissement que les deux précédents; seulement, les pressions développées sur l'arête extérieure du pied du mur sont plus fortes à égalité d'épaisseur que dans les précédents. Ces deux profils sont avantageux dans un terrain de fondation résistant et glissant.

Enfin le profil IV, qui emploie le moindre volume de maçonnerie, permet de bien répartir la pression sur la fondation, sans lui donner une trop grande largeur, mais il augmente la composante horizontale du glissement. Il est, par suite, avantageux dans les terrains compressibles et peu glissants. Remarquons qu'il sera prudent de ne pas trop incliner le parement du côté des terres, de manière que le centre de gravité du mur tombe toujours dans sa base.

499. **Divers systèmes de murs.** — (*a*) **Murs avec contreforts.** — *1er Cas. Les contreforts sont extérieurs* (fig. 482). — Ces contreforts, espacés généralement de 4 ou 5 mètres d'axe en axe, constituent des points fixes sur lesquels s'appuient les fractions de murs comprises entre eux.

Ces murs peuvent être construits en ligne droite et d'épaisseur constante, et alors ils résistent à la façon d'une plate-bande, grâce à la cohésion du mortier et à l'enchevêtrement des matériaux ; on peut aussi les faire en forme de voûtes à génératrices verticales (fig. 482 *bis*).

Dans le premier cas, leur épaisseur peut être prise égale au 1/6e environ de leur hauteur. Dans le second cas, on peut les traiter comme des voûtes.

On donne aux contreforts 1m à 1m,50 d'épaisseur et on détermine leur longueur, dans le sens perpendiculaire au mur, en considérant qu'ils supportent la poussée du massif de terre compris entre les axes A et B de deux intervalles voisins; mais on compose avec le poids du contrefort le poids des deux portions de murs adjacentes entre les points A et B.

2e Cas. Les contreforts sont intérieurs. — Cette disposition est moins bonne que la précédente, les contreforts ne pouvant plus servir d'appui au mur, qui souvent s'en détache sous l'influence de la poussée des terres ou d'inégalités dans le tassement des fondations.

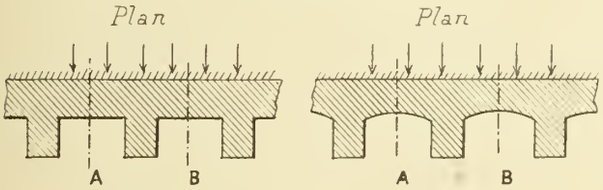


Fig. 482 Fig. 482 *bis*

Ces contreforts, s'ils sont assez rapprochés, diminuent la poussée par suite du frottement des terres sur leurs parements latéraux ; de plus, ils divisent le massif de terre et localisent ainsi l'action du prisme de poussée. Enfin, ils présentent par eux-mêmes une certaine résistance au renversement.

On évite quelquefois la séparation du mur et du contrefort en les reliant par des tirants en fer. On peut alors calculer l'épaisseur du mur, sans avoir égard aux contreforts, comme supportant lui seul la poussée du remblai. Pour la stabilité, on compose le poids de mur compris entre les axes de deux intervalles avec le poids du contrefort.

(*b*) **Murs avec voûtes de décharge** (fig. 483). — Un mur peut être construit avec voûtes de décharge avec tête supportant un mur d'attique AA', BB'. Les voûtes, à cause de l'inclinaison du talus des terres situées au-dessus, sont inégalement chargées ; il est alors à craindre qu'il se produise dans ces voûtes et dans leurs piédroits une fissure transversale telle que B'N, de telle sorte que le massif compris entre cette fissure et le parement extérieur du mur résistera seul à la poussée des terres qui s'exerce sur le parement BB' du mur d'attique.

Considérons ce qui se passe sur la portion de mur comprise entre les axes des clés de deux voûtes consécutives. On ne peut déterminer la position exacte de la fissure, mais

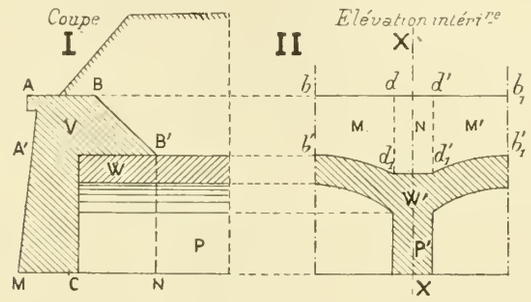


Fig. 483

on sera dans les conditions les plus défavorables en supposant qu'elle se produit au point B' de rencontre du parement BB' du mur d'attique avec l'extrados des voûtes. Et dès lors, on va vérifier la stabilité de la poussée ABB'NM de la construction.

Dans cette hypothèse, nous déterminerons la poussée des terres sur le parement $bb'b'_1b_1$ (fig. II). A cet effet, nous décomposerons ce parement en éléments verticaux qui seront M et M', égaux entre eux, et N; nous remplacerons les deux premiers par des rectangles ayant comme hauteur la demi-somme des droites $b'b$ et d_1d.

Une fois cette poussée trouvée, nous la composerons avec le poids du massif résistant, lequel comprend le mur V et l'ensemble W, W' des deux demi-voûtes, avec leur piédroit. La poussée et le poids du massif seront tous deux représentés par des forces situées dans le plan vertical passant par l'axe XX' de ce piédroit.

La résultante générale de toutes ces forces, (savoir, poussée des terres sur l'attique et poids total des maçonneries), coupe l'assise inférieure du piédroit en un certain centre de pression, C par exemple. Tout cela permet de calculer la pression au pied M du parement extérieur et de la comparer à la résistance de sécurité. Si elle est plus forte, ou plus faible, nous pouvons, comme nous l'avons indiqué précédemment, et en faisant varier l'inclinaison du parement intérieur BB' de l'attique, construire une courbe d'erreur qui nous donnera la position de ce parement.

On se donne ordinairement l'épaisseur AB de la partie supérieure de l'attique ; elle varie du tiers au cinquième de la hauteur du terrassement au-dessus d'elle. On incline beaucoup le parement BB' afin que la direction de la poussée des terres se rapproche de la verticale, ce qui éloigne le point C de l'arête extérieure M.

500. Murs dans des conditions diverses.

(*a*) **Remblai entre deux murs** (fig. 484). — Si un remblai M est maintenu entre deux murs, on peut admettre sans grande erreur que, pour chaque mur, le plan séparatif du prisme de poussée maxima est le même que si ce mur soutenait un massif de terre indéfini.

Dès lors ; soit *ad* le parement intérieur de l'un des murs, *ab* le plan séparatif ainsi défini, on prendra comme coin de poussée *abcd*, et on supposera la poussée appliquée au tiers de la hauteur du parement *ad* à partir de la base.

Les deux murs auront, naturellement, les mêmes dimensions. Il faudra prendre les plus grandes précautions pour éviter les infiltrations et surtout l'accumulation des eaux entre les deux murs.

Si le remblai doit supporter une chaussée, il faut tenir compte du passage des voitures en ajoutant au poids du coin de poussée une surcharge convenablement calculée (v. n° 490) ; il sera même bon, dans ce cas, de relier entre eux les deux murs par des tirants en fer.

(*b*) **Murs baignés par l'eau.** — Lorsqu'un mur est baigné par l'eau sur une de ses faces et que, ainsi qu'il arrive pour un mur de quai, l'eau peut s'accumuler ainsi derrière le mur, il faut, dans les calculs, si le niveau de l'eau est le même sur les deux faces, déduire du poids du mur la sous-pression de l'eau égale au poids du volume d'eau déplacé par la partie immergée.

Il faut, si l'on remblaie avec des terres un peu argileuses, prendre pour l'angle de frottement des terres une valeur très faible ne dépassant pas 15° à 20°. On aura une sécurité plus grande en faisant le remblai avec du gravier ou avec des débris de pierres dont l'angle de frottement est peu influencé par la présence de l'eau.

Si l'eau ne baigne que le parement extérieur, sa poussée sur ce parement contribue à la stabilité du mur.

Si le niveau de l'eau, en arrière du mur, est plus élevé qu'à l'extérieur, il faut ajouter à la poussée des terres celle qui provient de la différence du niveau de l'eau sur les deux parements.

Si, comme il arrive pour les écluses ou pour les murs de quais dans les mers à marée, le niveau de l'eau varie à l'extérieur, la condition la plus défavorable est celle où les eaux sont basses. On calculera le mur en conséquence et même, à cause des eaux d'infiltration laissées en arrière, du côté des terres, et qui n'auront pas eu le temps de s'épancher au dehors, ou bien on substituera à la poussée des terres la poussée de l'eau, ce qui sera très prudent, ou bien on admettra que l'angle de frottement des terres sur le mur est nul ; cette dernière hypothèse pourrait manquer de prudence.

§ 2. — Murs soumis a l'action du vent

501. Murs de clôture. — (*a*) **Condition de canalisation.** — Un mur de clôture n'est soumis en général qu'à la seule action du vent, qui exerce sur lui une poussée normale

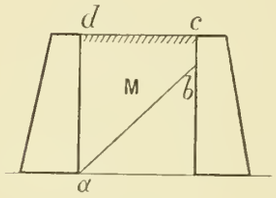


Fig. 484

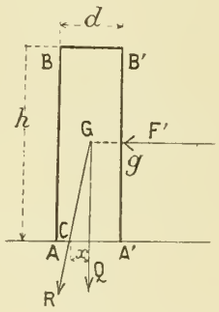


Fig. 485

au parement et appliquée au centre de gravité de ce parement (fig. 485).

Nous pourrions traiter la question par les courbes d'erreur comme nous l'avons fait pour les murs de soutènement ; mais il sera plus simple d'opérer algébriquement, la condition de canalisation étant ici prépondérante.

Nous considérerons un mur à parements verticaux, ce qui est le cas ordinaire des murs de clôture.

Soit F' la poussée du vent sur le mur, appliquée au centre de gravité *g* du parement, Q le poids du mur appliqué au centre de gravité G du rectangle ABA'B' qui donne le profil du mur.

Supposons que C soit le centre de pression sur la base, sa distance au centre de gravité de cette base étant x ; C sera le point où la résultante des forces P et Q rencontre la base. Le système de ces trois forces sera en équilibre si la somme des moments des trois forces, par rapport à un point quelconque du plan, est nulle.

Prenons les moments par rapport au point C. Remarquons d'abord que, P étant l'action normale du vent par mètre carré sur le mur, π le poids du mètre cube de maçonnerie, d l'épaisseur du mur et h sa hauteur, on aura $F' = Ph$ et $Q = \pi dh$; l'équation des moments s'écrira

$$Ph \times \frac{h}{2} - \pi dh \times x = 0, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad d = \frac{Ph}{2\pi x}.$$

Si nous voulons satisfaire à la condition de canalisation parfaite, il en résultera :

Canalisation parfaite $x = \frac{d}{6}$ d'où $d = \sqrt{\frac{3Ph}{\pi}}$.

Canalisation mixte $x = \frac{d}{4}$ d'où $d = \sqrt{\frac{2Ph}{\pi}}$.

Canalisation de masse $x = \frac{d}{2}$ d'où $d = \sqrt{\frac{Ph}{\pi}}$.

Pour fixer les idées, si nous admettons pour l'action du vent P = 125 k. par mètre carré, et pour le poids du mètre cube de maçonnerie $\pi = 2400$ k., nous aurons dans les trois cas les valeurs

$d = 0{,}395\sqrt{h}$, $d = 0{,}322\sqrt{h}$ et $d = 0{,}228\sqrt{h}$.

Telle serait l'épaisseur d que fournirait le calcul. En tout cas l'épaisseur du mur, quelle que soit sa hauteur, ne sera jamais inférieure à $0^m{,}50$, dimension imposée par les règlements.

(*b*) **Condition de résistance.** — L'épaisseur du mur étant ainsi établie, il reste à vérifier la pression sur l'arête la plus fatiguée A. Si nous ne comptons pas sur l'adhérence des mortiers, nous prendrons la formule

$$p = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)$$

qui est applicable pour les valeurs de x inférieures à α, c'est-à-dire à $1/6\,d$.

Si l'on a $x = \alpha$, alors $p = \frac{2N}{\Omega}$.

Si nous comptons sur l'adhérence des mortiers, nous pourrons l'appliquer jusqu'à $x = 1/4\,d$.

Si l'on a $x = \frac{d}{4}$, alors $p = 2{,}5\,\frac{N}{\Omega}$.

Si le centre de pression sort du noyau central vrai ($\alpha = 1/6\,d$), ou mixte ($\alpha' = 1/4\,d$), la formule n'est plus applicable ; nous rappelons que, dans ce cas, la surface Ω doit, puisqu'il y a décollement sur une portion de cette surface, être remplacée par une surface Ω' de largeur égale soit à $3\left(\frac{d}{2} - x\right)$ si l'on ne compte pas sur l'adhérence du mortier, soit à $4\left(\frac{d}{2} - x\right)$ si l'on compte sur cette adhérence.

La pression sur l'arête la plus fatiguée est alors égale à $2\,N : \Omega'$.

502. Murs d'édifices.

On calcule rarement les épaisseurs des murs d'un édifice, ces épaisseurs étant fixées soit par des considérations architecturales, soit par les règlements, soit par des formules empiriques que l'usage a fait connaître pour les constructions analogues.

Il peut être cependant nécessaire, dans certains cas, de vérifier la stabilité de murs placés dans des conditions exceptionnelles.

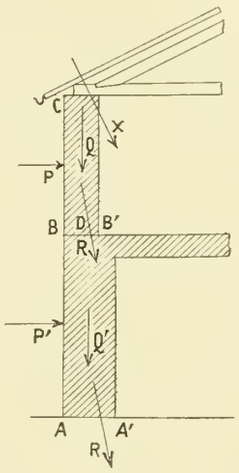


Fig. 486

Soit à vérifier la stabilité d'un mur d'édifice comprenant deux étages sous comble. Nous vérifierons d'abord les conditions de stabilité du mur de l'étage supérieur. Il suffira pour cela de composer l'action X du comble qui est oblique, si l'on tient compte de l'action du vent, avec le poids Q de la portion BC du mur et l'action normale P du vent.

La résultante R de ces trois forces rencontre la base BB' de cette portion de mur en un point D.

On peut se contenter ici de la canalisation de masse, les murs de refend et les liaisons du bâtiment ajoutant beaucoup à la stabilité ; il suffira donc que le point D soit à l'intérieur de la base BB' du mur.

On vérifiera ensuite la stabilité de la partie inférieure AB du mur en composant la résultante R avec le poids Q' de la portion AB de mur, le poids Q'' représentant la charge due au plancher et l'action P' du vent sur le parement AB ; on verra de même si la résultante R' tombe dans l'intérieur de l'assise AA'.

On vérifierait d'une manière analogue la stabilité d'une pile supportant à sa partie supérieure un tablier de pont ; nous avons traité cette question en parlant des piles métalliques.

§ 3. — Piles ou culées d'un arc ou d'une voute

503. **Piles.** — Une pile étant placée entre deux voûtes identiques, les poussées égales et opposées de ces voûtes se détruisent mutuellement, et la résultante des pressions transmises à la pile par le plan des naissances est une force verticale égale à la somme des poids des deux demi-voûtes adjacentes et appliquée au centre de l'assise des naissances. La résultante des pressions sur la base de la pile est égale à la somme des poids des deux demi-voûtes, augmentée du poids de la pile elle-même.

Le profil de la pile devra être établi de manière que la pression unitaire sur la base soit égale à la résistance de sécurité ; on trouvera facilement, au moyen d'une courbe d'erreur, la largeur à donner à la base pour que cette condition soit satisfaite.

Pour les ouvrages présentant un grand nombre d'arches, il est souvent utile de prévoir le cas où l'une d'elles sera détruite par un accident de guerre, ou par une inondation. Si les piles restées debout peuvent faire office de culées pour les arches s'appuyant sur elles, il y a de grandes chances pour que ces arches restent intactes ; dans le cas contraire, les voûtes s'abattront successivement à partir de la brèche, et l'ouvrage pourra être entièrement détruit.

Il est donc utile qu'un certain nombre de piles puissent résister comme culées; nous verrons plus loin comment on calculera leurs dimensions ; on les nomme des *piles-culées*.

Il peut arriver également que les deux voûtes s'appuyant sur une même pile aient des dimensions différentes ; les deux poussées ne seront plus alors égales, et la résultante des pressions transmises à la pile par les deux voûtes sera oblique ; la pile tendra à être inclinée du côté de la voûte la moins chargée, et on ne pourra obvier à cet inconvénient qu'en en faisant une sorte de pile-culée.

504. **Culées.** — (*a*) **Généralités.** — La culée d'une voûte doit être établie de manière qu'elle ne subisse pas de déformations ayant pour effet d'augmenter l'ouverture de la voûte par l'écartement des naissances ; la poussée de la voûte tend en effet à chasser la culée vers l'extérieur ; alors cette culée travaille comme un solide prismatique encastré à sa base et elle fléchit sous l'influence de cette poussée appliquée à sa partie supérieure.

C'est pourquoi on attribue en général aux culées des dimensions bien plus considérables que celles qui suffiraient à assurer leur stabilité si on les considérait isolément ; on recommande, pour la même raison, de donner aux culées d'un ouvrage le moins de hauteur possible, en reportant, dans le cas d'un viaduc, ces culées au sommet des coteaux qui encadrent la vallée.

(*b*) **Formules empiriques.** — On peut obtenir immédiatement l'épaisseur à donner à une culée par des formules empiriques établies d'après des ouvrages existants ; mais ces formules ne donnent que le point de départ de la question, et supposent l'épaisseur de la culée uniforme sur toute sa hauteur ; leur emploi ne dispensera, en aucun cas, de la vérification ultérieure ; voici quelques-unes de ces formules empiriques.

En désignant par $2a$ l'ouverture de la voûte, b sa montée ; e son épaisseur à la clef, h la hauteur de la culée depuis sa base jusqu'aux naissances, c l'épaisseur verticale du remblai au-dessus de la clef, H la hauteur totale de l'ouvrage, depuis la base de la culée jusqu'au sommet du remblai, H étant égal à $b+h+e+c$; les formules donnant provisoirement l'épaisseur x de la culée sont (fig. 473) :

1° Voûtes en plein cintre :

Formule de :

M. *Lesguillier*, $x = \sqrt{2a}(0{,}60 + 0{,}04h)$.

M. *Léveillé*, $$x = 0{,}30 + 0{,}324a\,\frac{\sqrt{\left(h+\frac{a}{2}\right)1{,}73a}}{\mathrm{H}\left(e+\frac{a}{2}\right)}.$$

Des ingénieurs russes et allemands,

$$x = 0{,}305 + \frac{5}{12}a + \frac{h}{6} + \frac{c}{12}.$$

2° Voûtes en arcs de cercle :

M. *Lesguillier*, $x = \sqrt{2a}\left[0{,}60 + 0{,}10\left(\frac{2a}{b} - 2\right) + 0{,}04h\right]$.

M. *Léveillé*, $x = 0{,}33 + 0{,}424a\sqrt{\frac{2ha}{\mathrm{H}(b+e)}}$.

Ingénieurs russes et allemands,

$$x = 0{,}305 + \frac{a}{4}\left(\frac{6a-b}{2a+b}\right) + \frac{h}{6} + \frac{c}{12}.$$

3° Voûtes surbaissées :

M. *Lesguillier*, $x = \sqrt{2a}\left[0{,}60 + 0{,}05\left(\frac{2a}{b} - 2\right) + 0{,}04h\right]$

M. *Léveillé*, $x = 0{,}33 + 0{,}424a\sqrt{\frac{2ha}{\mathrm{H}(b+c)}}$.

Ingénieurs russes et allemands,

$$x = 0{,}305 + \frac{a}{4}\left(\frac{6a-b}{2a+b}\right) + \frac{h}{6} + \frac{c}{12}.$$

(*c*) **Vérification de la stabilité d'une culée.** — La méthode rationnelle de vérification de la stabilité d'une culée consiste à la considérer comme le prolongement de la voûte, à la faire figurer dans les épures et calculs servant à déterminer la poussée de la voûte et à vérifier ainsi sa stabilité ;

les dimensions de la culée seront provisoirement établies au moyen des formules empiriques. La méthode ordinairement employée suppose que la culée possède des dimensions très grandes comparées à celles de la voûte, ce qui fait que l'on peut considérer comme absolument invariable la position

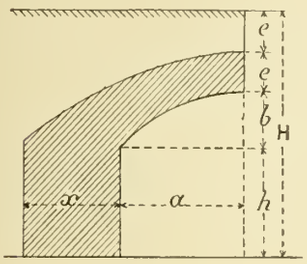


Fig. 487

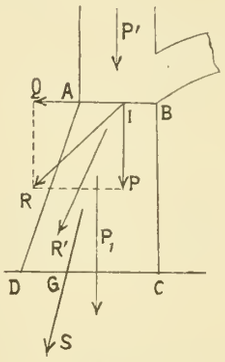


Fig. 488

du joint des naissances. Cela étant admis, et la poussée de la voûte ayant été déterminée, ainsi que son poids, nous calculerons de la manière suivante les dimensions à donner à la culée.

Soit ABCD (fig. 488) la culée que nous supposons à profil trapézoïdal ; l'inclinaison du parement extérieur est donnée ; l'épaisseur moyenne de la culée a été calculée par une des formules empiriques ci-dessus ; l'épaisseur au sommet de la culée dépend de l'épaisseur de la voûte aux naissances, et aussi de la courbe adoptée pour raccorder l'extrados de la voûte avec la culée.

Soit I le point où la courbe des pressions de la voûte rencontre le joint supérieur AB de la culée ; la pression oblique R transmise en ce point par la voûte à la culée peut être décomposée en une force verticale P, égale au poids de la demi-voûte, et en une force horizontale Q qui est la poussée de la voûte.

Soit P' le poids de tout le massif de maçonnerie qui peut exister au-dessus du joint AB de la culée ; enfin, soit P_1 le poids de la culée proprement dite ABCD.

Composons les forces P, Q et P', dont la valeur est indépendante des dimensions à la base de la culée, nous trouverons une résultante R'. Cette résultante R', composée avec le poids P_1 de la culée, donne une résultante S qui rencontre la base du massif au point G. Ce point doit être placé de telle sorte que les conditions de canalisation et de résistance soient satisfaites. En opérant comme dans le cas des murs de soutènement, au moyen de *courbes d'erreurs*, on trouvera la position, ou l'inclinaison, convenable à donner au parement AD.

Il reste à vérifier que la résultante S fait avec la normale à la base CD un angle inférieur à l'angle de frottement. Si cette condition n'est pas sastifaite, on sera conduit à incliner sur l'horizontale les assises de la culée pour les amener à couper sous un angle assez voisin de 90° la courbe des pressions. On peut alors établir ces lits suivant des surfaces cylindriques normales à la courbe des pressions dont le tracé aurait été continué dans la culée, et normales au parement extérieur BC de la culée.

(*d*) **Culée d'égale résistance** (fig. 489). — Divisons la hauteur de la culée en un certain nombre de parties égales, par les assises $A_1A_2A_3$, et appliquons la construction indiquée ci-dessus, d'abord au massif supérieur AA_1B_1B limité à l'assise A_1, de manière à satisfaire aux conditions de canalisation et de résistance ; nous déterminerons ainsi la position AA_1 de la première partie du parement. Nous opérerons ensuite sur la position de culée AA_2B_2B limitée à l'assise A_2, et ainsi de suite jusqu'à la base de la culée.

Le parement polygonal $AA_1A_2A_3D$, ainsi déterminé, se rapprochera d'autant plus du profil d'égale résistance qu'on aura divisé en un plus grand nombre de parties la hauteur de la culée. On pourra le remplacer par un profil courbe tangent aux différents côtés du polygone.

505. **Influence de la poussée du remblai sur une culée** (fig. 490). — Le remblai placé derrière la culée exerce sur elle une poussée qui vient agir en sens contraire de la poussée de la voûte et qui est, en général, favorable à la stabilité de la culée.

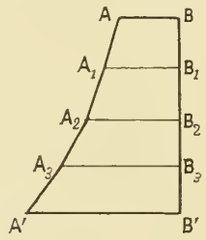


Fig. 489

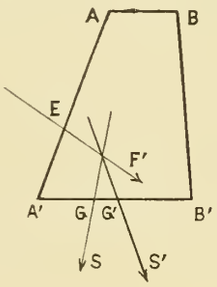


Fig. 490

On n'a pas tenu compte de cette poussée dans le calcul des dimensions de la culée, mais il est important de se rendre compte de l'influence qu'elle pourrait avoir sur les conditions de sa stabilité.

Soit F' cette poussée des terres, appliquée au point E du parement de la culée ; composons-la avec la résultante S trouvée précédemment ; nous aurons une résultante S' rencontrant en G' la base de la culée ; le nouveau centre de pression G' est ainsi ramené vers l'arête intérieure de la base de la culée. Ce déplacement sera favorable à la stabilité de la culée. Si le point G' reste dans le tiers central, on pourra donc en profiter pour diminuer l'épaisseur de la culée ; mais il pourra lui être défavorable si le point G' passe dans le tiers de la base situé du côté de l'arête inté-

rieure. Il sera bon de faire cette vérification pour des assises situées à différentes hauteurs.

Pour les grands ponts, la poussée des terres est généralement très faible, comparée à la poussée de la voûte ; il en est de même pour les viaducs dans lesquels on s'astreint à réduire autant que possible la hauteur de la culée.

Dans les ouvrages de faible ouverture, il n'en est plus de même ; la poussée des terres pourrait devenir prépondérante, et produire les effets suivants :

1° (fig. 491-I) La culée peut être déplacée vers la partie intérieure, par glissement tout le long de la surface de la base ; il en résulte une diminution de l'ouverture de la voûte, et les effets produits seraient les mêmes que ceux d'une dilatation due à une élévation de température. La courbe des pressions de la voûte se rapprocherait de l'intrados à la clef et de l'extrados aux naissances. Le joint de clef s'ouvrirait à l'extrados, tandis que le joint de naissance s'ouvrirait à l'intrados. Il faut alors charger la clef ou surbaisser la voûte, pour augmenter sa poussée. Cet effet peut être évité si l'on relie les pieds des culées par un radier qui maintient leur écartement.

2° (fig. 491-II) Si la culée est assez élevée, elle pourra être rompue en un point de sa hauteur, par ouverture de ses joints horizontaux du côté de l'intérieur. Il faut alors augmenter son épaisseur.

3° (fig. III) Les culées peuvent, si la poussée des terres vient à manquer, tourner vers l'extérieur.

4° (fig. IV) L'ouvrage peut être renversé d'un seul bloc par rotation autour d'une de ses arêtes de base M, lorsqu'on a exécuté le remblai sur un seul de ses côtés alors que l'autre ne supporte rien. Cet accident sera évité si l'on monte à la fois le remblai sur les deux côtés de l'ouvrage.

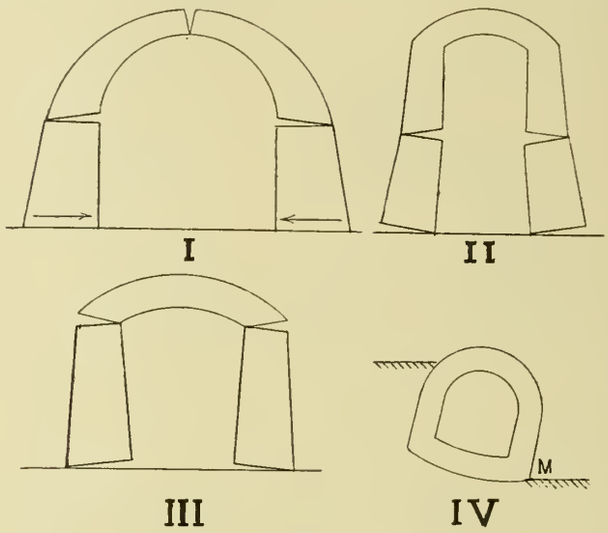


Fig. 491

On recommande également de pilonner les terres du remblai au voisinage de l'ouvrage, afin de leur donner, dès le début, une assiette définitive.

Lorsqu'on aura profité de la poussée des terres pour diminuer l'épaisseur de la culée, il faudra exécuter le remblai tout entier avant le décintrement des voûtes.

§ 4. — Fondations des murs ou des piédroits de voûtes

506. **Classification des terrains.** — Nous n'avons étudié jusqu'à présent les ouvrages que jusqu'au niveau de leurs fondations ; nous allons voir comment on pourra déterminer les dimensions à donner à ces fondations. Nous diviserons à cet effet les terrains en quatre classes :

1° Terrains *non-glissants* et *incompressibles* tels que le roc, les tufs, le gravier, le sable siliceux compact.

2° Terrains *non-glissants* mais *compressibles*, comme les argiles sablonneuses, les sables calcaires.

3° Terrains *glissants* et *incompressibles* tels que les calcaires marneux, les argiles compactes, lorsque l'humidité peut les atteindre.

4° Terrains *glissants* et *compressibles*, comme l'argile plastique, la marne.

507. **Butée des terres** (fig. 492). — (*a*) **Définition.** — Soit ABCD le massif de fondation d'un mur ; R étant la résultante des pressions sur la base AB du massif, peut être décomposée en deux forces, l'une normale P, l'autre tangentielle T qui tend à faire glisser le mur sur sa base, dans le sens de B vers A. Cela posé :

On nomme *Butée des terres* la résistance que le sol placé en avant de la fondation oppose à ce déplacement.

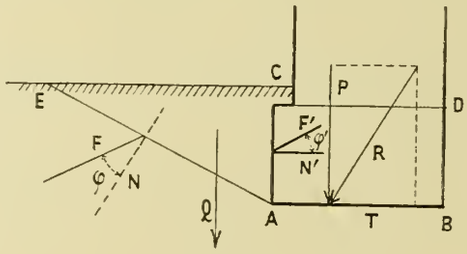


Fig. 492

(*b*) **Calcul de la butée des terres.** — Le général **Poncelet** a fait, pour détermier la butée des terres, l'hypothèse que le mur en avançant détacherait un prisme ACE (fig. 492) qui glisserait alors de bas en haut sur la face inclinée AE. L'inclinaison du plan AE est l'inconnue de la question. Ce

prisme, ou *coin de butée*, est en équilibre sous l'influence de son poids Q, de la réaction F de la face AE, laquelle réaction fait avec la normale à cette face, et en sens inverse du mouvement, l'angle φ de frottement des terres sur elles-mêmes, et de la force F′ réaction du parement AC du mur, laquelle fait avec la normale au parement l'angle φ' de frottement des terres sur la maçonnerie et est dirigée de haut en bas, c'est-à-dire, puisque le coin de butée tend à monter, dans le sens opposé au mouvement. La butée des terres doit être égale et directement opposée à la force F′.

Il faut chercher le plan séparatif AE pour lequel la butée des terres est *minima*. On opère d'une manière analogue à ce qui a été fait pour la poussée des terres et, par une courbe de butée, on arrive à trouver l'expression de la butée minima.

(*c*) **Remarque pratique.** — L'épure faite montrerait que la butée augmente beaucoup plus rapidement que la poussée des terres ; par suite il semblerait qu'en enfonçant les fondations à une certaine profondeur, on pourrait neutraliser par la butée seule la composante horizontale de la poussée. L'expérience ne confirme pas les résultats donnés par la théorie ; la terre n'est pas soulevée à la façon d'un coin ; les couches de terrains voisines du parement AC commencent d'abord à se comprimer, et avant que le coin ne se soit formé, le mur a déjà subi un mouvement assez considérable pour être disloqué.

Il est plus conforme aux résultats observés, de prendre la butée égale à la poussée qu'exercent les terres sur le parement AC.

508. **Calcul d'une fondation.** — (*a*) **Terrains non-glissants et incompressibles.** — Le niveau du sol étant AB (fig. 493), celui du bon terrain, CD, la fondation sera enracinée de $0^m,30$ à $0^m,50$ dans le bon terrain, et on lui donnera un empatement suffisant pour que la maçonnerie ne supporte pas une trop grande pression.

La résultante des pressions sur l'assise supérieure de la fondation étant R, cette force, combinée avec le poids P du massif de fondation, donnera une résultante R′ rencontrant au point G la base de ce massif. Pour que toute la surface de contact entre le massif et le sol soit comprimée, nous devrons satisfaire à la condition de canalisation parfaite, c'est-à-dire que le point G devra être dans le tiers central de l'assise de base du massif.

De plus l'arête N ne devra pas supporter une pression unitaire supérieure à la résistance de sécurité des maçonneries.

La méthode des courbes d'erreur nous permettra de déterminer la position à donner au parement MN de la fondation pour satisfaire à ces deux conditions.

Il faut ensuite vérifier qu'il ne peut pas se produire de glissement du massif sur sa base, et, dans le cas où ce danger serait à craindre, il suffirait d'incliner vers le parement intérieur la base de la fondation pour la ramener à être voisine de la normale à la résultante des pressions.

(*b*) **Terrains non-glissants et compressibles.** — Dans ce cas, lorsque l'on a déterminé la charge qui peut être imposée au terrain par unité de surface, on détermine l'empatement à donner à la fondation de manière que la pression sur la base du massif soit uniformément répartie et

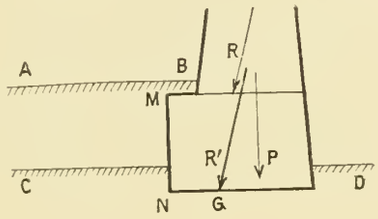


Fig. 493

inférieure à la charge de sécurité du terrain. S'il se produit un affaissement du terrain, on est assuré, de cette façon, que le mouvement de descente du massif sera vertical, ou à peu près.

Pour que la pression soit uniformément répartie, il faut que le centre de pression tombe au centre de la base du massif de fondation. On y arrivera de deux manières :

1er Cas. Si le niveau du fond de la fondation est imposé, il faudra chercher comme précédemment la position du parement MN ; on pourra alors être amené à avoir un massif débordant le mur d'une très grande quantité et susceptible, s'il est peu épais, de se rompre suivant une verticale *ab* (fig. 494). Il vaudra mieux alors descendre le niveau du fond de la fouille, et opérer comme dans le cas suivant (fig. 494 bis).

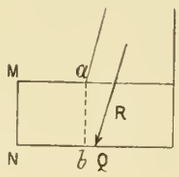


Fig. 494

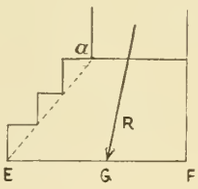


Fig. 494 bis

On admet qu'avec de bon mortier de chaux hydraulique, cette rupture n'est pas à craindre tant que la saillie *a*M de l'empatement n'est pas égale à l'épaisseur *ab* du massif.

2e Cas. Si l'on peut descendre à volonté le niveau de l'assise inférieure du massif, on mène par le pied, *a*, du mur une ligne à 45°, *a*E, et l'on cherche, au moyen des courbes d'erreur l'assise EF pour laquelle le centre de pression tombe au milieu de l'assise (fig. 494 bis).

On vérifie ensuite la pression unitaire sur cette assise ; si elle est supérieure à celle que peut supporter le terrain, il

faut donner au massif un empatement plus large, aussi bien du côté de l'intérieur du mur que de l'extérieur.

Dans le cas où un glissement serait à craindre, il faudrait opérer comme nous allons le dire pour les terrains glissants.

(*c*) **Terrains glissants et incompressibles.** — Dans les terrains glissants, l'angle de frottement peut descendre à 15° et même quelquefois au-dessous ; on devra donc prendre toutes les précautions nécessaires pour empêcher l'eau d'atteindre la base des fondations, ce qui n'empêchera pas d'opérer en adoptant l'angle de frottement de 15°, pour le cas où les précautions prises seraient insuffisantes et où l'eau atteindrait le sol des fondations. Si le terrain est incompressible, il suffit d'encastrer la fondation, calculée comme il a été dit plus haut, dans le bon terrain et d'incliner l'assise inférieure de manière qu'elle ne fasse pas avec la normale à la résultante des pressions un angle supérieur à 15°.

(*d*) **Terrains glissants et compressibles.** — Outre les précautions précédemment indiquées, on enfoncera la fondation de manière à équilibrer par la butée des terres la composante horizontale de la poussée. On sera souvent ainsi conduit à une grande dépense de fouilles et de maçonneries, et il pourra être plus avantageux de contrebuter le pied des murs par des procédés spéciaux.

(*e*) **Remarque.** — Toutes les fois qu'un mur est baigné par l'eau, il faut tenir compte, dans la détermination du centre de pression sur les fondations, de la sous-pression de l'eau. Cette sous-pression est égale au poids de l'eau que déplace le massif immergé, et elle est à appliquer au centre de gravité de ce massif.

SEPTIÈME PARTIE

LES ASSEMBLAGES EN FER

§ 1. — Rivets et rivures

509. **Généralités.** — (*a*) **Rivets.** — Un *rivet* est une tige de fer terminée à ses deux extrémités par deux parties renflées entre lesquelles sont serrées les pièces que le rivet est destiné à réunir (fig. 495).

Ces deux extrémités renflées sont : 1° *la tête* A, fabriquée à l'avance, et 2° *la rivure* B, qui provient de l'écrasement à chaud, fait sur place, de la tige du rivet, au moment de la pose. La rivure est obtenue, soit au marteau, soit à la bouterolle, soit à la machine.

Pendant ce travail, le rivet, qu'on avait porté à la température de 900° environ, se refroidit en échauffant par conductibilité la tôle environnante ; lorsque la rivure est achevée, la température de la tôle s'est élevée à 100° environ, tandis que celle du rivet s'est abaissée à 600° environ ; la température du rivet est donc, à la fin de l'opération, supérieure de 500° à celle de la tôle.

En se refroidissant, le rivet diminue de longueur, et il exerce sur les tôles un effort qui pourrait, si les tôles étaient en contact parfait, dépasser 120 k. par millimètre carré de sa section, c'est-à-dire beaucoup plus que la charge de rupture ; en réalité, l'effort exercé par le rivet est bien moindre et ne dépasse pas 20 ou 25 k. par millimètre carré de sa section. Le reste de l'effort développé par la contraction du rivet a pour effet d'amener le contact des tôles. (V. plus loin n° 511-*b*.)

(*b*) **Perçage des trous. — Leur diamètre.** — Les tôles qui doivent être réunies par des rivets sont percées soit au *poinçon*, soit au *foret ou mèche*, soit encore au *poinçon* avec *alésage* fait après coup, pour agrandir le trou fait par le poinçon, pour assainir la tôle environnante et pour rectifier l'ajustage. (V. plus loin n° 512.)

Lorsqu'une feuille de tôle est percée au poinçon, le diamètre du trou ne peut pas être inférieur à une certaine limite, qui est ordinairement le double de l'épaisseur de la tôle. Il faut, en effet, que la résistance au cisaillement de la tôle soit inférieure à la résistance à l'écrasement du poinçon qui sert à faire le trou. Voyons ce que cela entraîne.

Soit R′ la limite de rupture du poinçon à l'écrasement, et soit R la limite de rupture à la traction de la tôle à percer ; sa limite de rupture au cisaillement sera 0,8 R. Soit e l'épaisseur de la feuille de tôle et d le diamètre du trou à percer. Lorsque le poinçon pénétrera dans la tôle, il produira le cisaillement sur tout le pourtour du trou et, par conséquent, développera un effort tranchant

$$T = \pi d \times e \times 0{,}8\,R.$$

Le cylindre du poinçon supportera cet effort par la surface de sa base, ce qui par mm² donnera

$$\frac{T}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4e \times 0{,}8R}{d}.$$

Cet effort unitaire ne doit pas entraîner l'écrasement du poinçon ; il doit donc être plus petit que R′. En écrivant cette condition, on en déduit

$$d > 3{,}2\,\frac{R}{R'} \times e.$$

Pour l'acier trempé qui constituera le poinçon, la limite de rupture R′ varie entre 60 et 75 k. et même plus, tandis que celle R de la tôle à percer est de 45 k. ; par suite, on devrait donc avoir, en faisant la substitution,

pour R = 75 et R = 45... $d > 1{,}9\,e$,
pour R = 60 et R = 45... $d > 2{,}4\,e$.

En moyenne, le diamètre d'un trou poinçonné ne saurait être inférieur à deux fois l'épaisseur de la tôle ; le perçage de trous plus petits doit être fait au foret.

Comme dimension maxima, on ne donne jamais au diamètre du trou plus de trois fois l'épaisseur de la tôle ; on verra plus loin pourquoi. En résumé, d est généralement compris entre $2\,e$ et $3\,e$.

(*c*) **Formes des rivures.** — Les rivets doivent être faits en fer ou en acier doux, c'est-à-dire en métal très ductile ; nous en dirons la raison au n° 513. On donne à la tête faite sur place, c'est-à-dire à la *rivure*, les formes suivantes :

1° *Forme ordinaire, ou rivure conique* (fig. 495-I). — La tête A, faite avant la pose, est en *goutte de suif ;* la rivure (fig. II) est conique et faite à la main avec un marteau nommé *rivoir.*

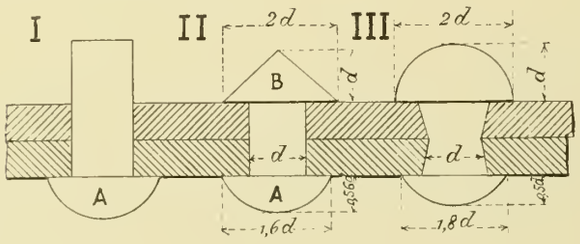


Fig. 495

2° *Rivure à tête sphérique* (fig. III). — Les tôles sont percées de trous coniques obtenus à l'aide d'un poinçon de diamètre plus petit que celui de la matrice (v. plus loin fig. 499-N). La rivure a la forme sphérique et elle est obtenue à la *bouterolle.* La bouterolle (v. plus loin B, fig. 496) est une masse en fer portant en creux le moule de la rivure. Un ouvrier la pose sur la tige cylindrique, sortante, du rivet tandis qu'un autre ouvrier, armé d'une très lourde masse, frappe sur la bouterolle.

3° *Rivure en goutte de suif, avec trous fraisés sur les bords* (fig. 495 *bis*-I). — La fraisure a pour effet d'augmenter l'adhérence du rivet et de rendre moins facile la disjonction des tôles sous l'influence des efforts alternés.

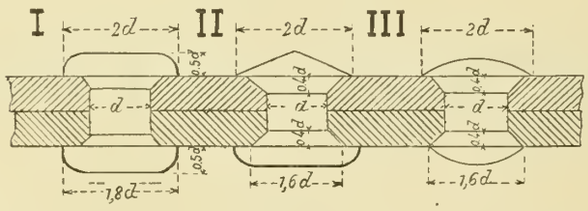


Fig. 495 bis

On a constaté que la rupture d'un rivet se produisait en général par décollement de la tête qui a été forgée sur place. L'angle rentrant, situé entre la face plane de la tête et le corps du rivet, constitue un changement brusque de section et, par suite, un point faible où une fissure pourra tendre à se manifester. (V. plus haut, n° 123-*c*.)

On augmente de 3 à 15 pour cent la résistance de la rivure en raccordant le corps du rivet avec les têtes par un collet de forme conique ou par un congé ; il faut alors fraiser l'entrée du trou pour en abattre l'arête.

4° *Trous à fraisures renforcées* (fig. 495 *bis*-II et III). — La tête et la rivure n'ont pas alors besoin d'être aussi épaisses ; on peut même, dans certains cas, les supprimer presque entièrement, ainsi que cela se fait pour les bordages de navires.

(*d*) **Pose des rivets.** — Les tôles étant rapprochées et se correspondant bien, trou à trou, les rivets chauffés au rouge sont mis en place ; puis, la portion de tige qui dépasse la tôle et qui doit former la rivure est écrasée soit :

1° Au marteau ou *rivoir* pesant trois à quatre kilos, suivant la grosseur du rivet ; la rivure est alors conique ;

2° A la *bouterolle* frappée à la main au moyen d'une masse de huit à dix kilos ;

3° A la *bouterolle à la machine*, au moyen de riveuses ; les meilleures sont les riveuses hydrauliques. On fait usage aussi de riveuses électriques.

Une bonne équipe de riveurs peut poser à la main de 20 à 40 rivets à l'heure ; elle peut en poser, dans le même temps, de 75 à 180 en employant une bonne machine à river.

Ces nombres sont très variables ; ils dépendent de la grosseur des rivets et des facilités d'accès. Ainsi, pour les pièces verticales, on ne pose que les trois quarts des rivets que l'on placerait dans le même temps sur des pièces horizontales.

Nous verrons plus loin comment on calcule les dimensions d'un rivetage ; mais, d'une manière générale, l'écartement d'axe en axe de deux rivets devra toujours être compris entre trois fois et cinq fois leur diamètre, sans dépasser jamais $0^{m},100$, afin d'éviter que les tôles bâillent.

(*e*) **Dimensions des rivets.** — Le diamètre d'un rivet doit être, dans une certaine mesure, proportionné à l'épaisseur *totale* des tôles qu'il relie ; il en est de même de l'écartement d'axe en axe. Nous donnons ci-dessous, d'après le traité de *Construction des Ponts*, de M. **Morandière**, le tableau des dimensions courantes ordinairement adoptées.

On a observé que si la longueur d'une tige de rivet atteint ou dépasse $0^{m},150$, la tête se détache souvent au refroidissement ; il faudrait dans ce cas refroidir la tige en la mouillant, avant de placer le rivet ; mais ce serait mauvais, car un rivet posé trop froid donne un métal qui est écroui et par suite cassant ; il est préférable d'éviter l'emploi d'épaisseurs totales de tôles aussi grandes.

DIAMÈTRES en MILLIMÈTRES	ÉPAISSEURS totales à river, en MILLIMÈTRES	DISTANCES d'axe en axe, en MILLIMÈTRES
8	6 à 10	50 à 60
10	10 à 12	60 à 70
12	12 à 14	70 à 80
14	14 à 16	80 à 90
16	16 à 20	90 à 100
18	20 à 25	100 à 120
20	25 à 35	
22	35 à 50	
25	50 à 70	

Le tableau ci-dessus donne des dimensions moyennes dans lesquelles il faut, autant que possible, se tenir; mais ces dimensions peuvent être modifiées suivant les exigences de la construction. Ainsi, par exemple, pour les semelles d'épaisseur variable des grandes poutres composites, on garde pour toute la longueur de la poutre le même diamètre de rivet, et ce diamètre est basé sur la plus grande épaisseur. De même, lorsque les semelles sont larges et que les rivets d'assemblage avec les cornières sont trop éloignés des bords, on place une ligne de rivets en bordure de la semelle, pour empêcher les tôles de bâiller. Ces rivets ont un écartement, d'axe en axe, double de celui des rivets d'assemblage.

510. **Défauts des rivures.** — Les rivets relient ordinairement des tôles qui tendraient à se séparer en glissant l'une sur l'autre, parallèlement à leurs faces de contact. Le métal du rivet est soumis à trois sortes d'efforts qui sont :

1° *Effort d'extension* produit par le refroidissement de la tige; cet effort produisant, d'ailleurs, l'adhérence des tôles.

2° *Effort de cisaillement.* — L'effort tangentiel, tendant à faire glisser les tôles l'une sur l'autre, est transmis à la tige du rivet par le contact des parois des trous avec la tige du rivet. Il peut être équilibré par l'adhérence des têtes.

3° *Effort de flexion.* — Le rivet tiré par les deux tôles dans deux sens opposés, perpendiculairement à son axe, est ainsi soumis à l'action d'un couple qui développe un moment de flexion d'autant plus considérable que le rivet remplit moins bien son trou ; d'où la nécessité de n'admettre qu'un jeu très faible du rivet dans son trou, jeu ne dépassant pas 5 % du diamètre du rivet.

Une rivure, mal faite, pourra présenter les défauts suivants (fig. 496) :

1° *Défaut d'ajustage des tôles* (fig. I). — Les trous ne sont pas exactement en regard l'un de l'autre, de sorte qu'on est obligé d'employer un rivet de diamètre trop petit ; la tige

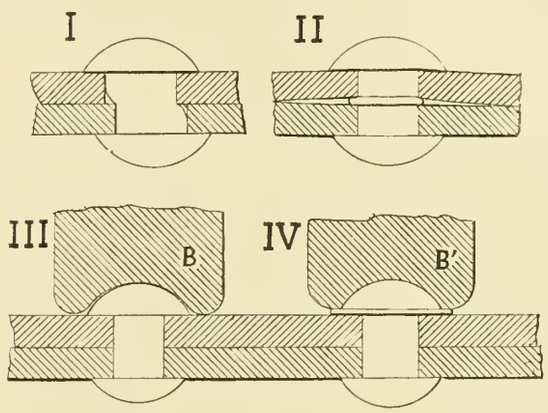


Fig. 496

du rivet se trouve déviée et dans de mauvaises conditions de résistance. L'alésage, après coup, des deux trous réunis permet de corriger ce défaut.

2° *Manque de contact des tôles* (fig. II). — Si le contact est mauvais, il se formera, pendant la confection de la rivure, un bourrelet entre les tôles, et le joint obtenu ne sera pas étanche. Cela aura surtout des inconvénients pour les chaudières.

3° *La tige du rivet est trop courte* (fig. III). — La rivure manquera d'épaisseur ou, si elle est faite à la bouterolle, elle sera mal formée ; l'adhérence sera faible.

4° *La tige du rivet est trop longue* (fig. IV). — Alors la tête se formera bien, si l'on opère à la bouterolle, mais une collerette se produira tout autour ; cette collerette sera plus ou moins désagrégée par les derniers coups de marteau, et on devra l'enlever ensuite au burin. Ce défaut a moins d'inconvénients que le précédent.

On voit que les mêmes effets seraient obtenus si on emploie une bouterolle trop creuse B ou manquant de profondeur B'.

5° *Le rivet est posé trop froid.* — Alors le serrage est insuffisant et, de plus, le métal de la tête risque d'être écroui au-delà de la limite de rupture. Ce rivet se rompra ou se relâchera complètement au bout de peu de temps.

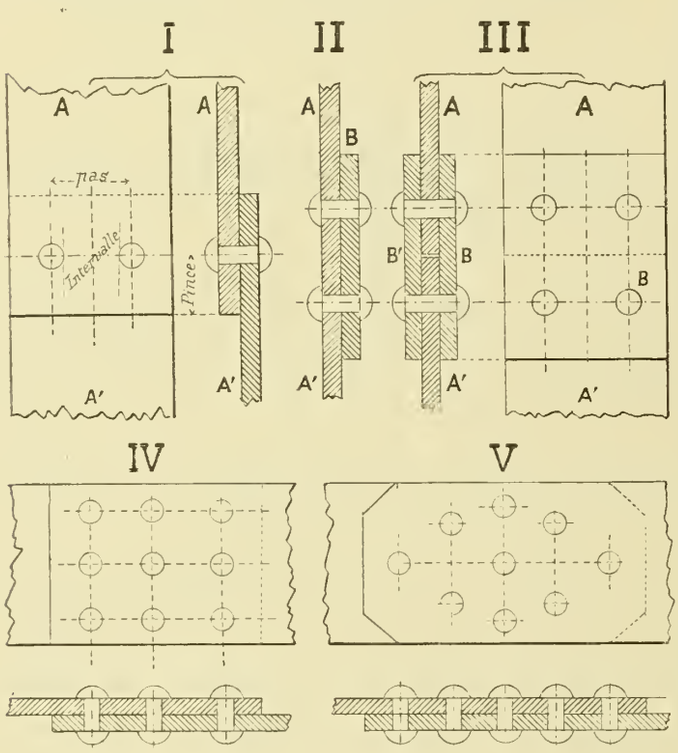
§ 2. — Résistance d'un rivetage

511. Analyse d'un rivetage. — (*a*) **Définitions.** — Un rivetage est l'ensemble formé par les tôles à réunir et par les rivets qui réalisent cette réunion. On classe les rivetages 1° d'après la disposition des tôles, et 2° d'après celle des rivets.

(*a*) **Disposition des tôles** (fig. 497). — Nous avons :

1° *Le rivetage à recouvrement* (fig. I), lorsque les rives des tôles A et A′ sont placées à côté l'une de l'autre ;

2° *Le rivetage à plat joint* (fig. II), lorsque les tôles A et A′ étant placées bout à bout, dans le prolongement l'une de l'autre, une tôle latérale B est placée en *couvre-joint* à côté de chacune d'elles pour faire la jonction ;



Fgi. 497

3° *Le rivetage à chaîne* dit encore à *double couvre-joint* (fig. III), lorsque les deux tôles A et A′ placées bout à bout sont réunies par deux pièces latérales B et B′.

(*b*) **Disposition des rivets** (même figure). — Nous avons :

1° *Le rivetage parallèle* (fig. IV), dit encore *par files*. — Il est simple lorsqu'il n'y a qu'une file, il est double, triple.... lorsqu'il y a deux, trois.... files ;

2° *Le rivetage convergent* (fig. V), lorsque le nombre des rivets de chaque file commence par être l'unité et croît ensuite, en progression arithmétique, pour décroître de même. L'indice m d'un rivetage convergent est le nombre de rivets contenus dans la file centrale. Sur la figure V on a $m = 3$. Il est facile de voir que le nombre total des rivets, dans un rivetage convergent, est égal à m^2.

(*b*) **Eléments de résistance d'un rivetage.** — Cette résistance dépend : 1° des rivets ; 2° des tôles qu'ils réunissent. Et la rupture proviendra de l'insuffisance d'un quelconque de ces deux éléments.

1° *Adhérence des rivets sur les tôles.* — La théorie (v. n° 165) nous a indiqué qu'une tige de fer en se refroidissant de 1 degré pouvait développer sur ses extrémités, supposées fixes, une traction de $0^k,244$ par mm². Par conséquent, si l'épaisseur des tôles à réunir restait constante, l'abaissement de température de 500 degrés développerait dans le rivet un effort intérieur de traction égal à 122^k par mm², très supérieur à la limite de rupture ; pas un seul rivet ne tiendrait. Mais, en réalité, d'une part, les tôles se compriment sous la pression des têtes du rivet et, d'autre part, les tôles, au moment de la pose des rivets, ne sont jamais en contact parfait et la contraction de la tige a pour effet partiel d'amener ce contact.

Pour cette double raison, l'effort intérieur de traction est bien inférieur au chiffre précédent. L'expérience seule a pu le déterminer, indirectement il est vrai, en mesurant la résistance au frottement de tôle sur tôle qui en résulte.

D'après des expériences, faites lors de la construction des ponts Britannia, on a trouvé une résistance au frottement variant de 5^k à 7^k par mm² de section du rivet. Et comme le coefficient de frottement de fer sur tôle peut être estimé, au maximum, à un tiers, cela représente une tension longitudinale du rivet variant entre $3 \times 5 = 15^k$ et $3 \times 7 = 21^k$ par mm², ce qui est voisin et même supérieur à la limite d'élasticité du fer.

Cela prouve qu'un rivet qui développe toute son adhérence est, par ce fait même, dans d'assez mauvaises conditions moléculaires.

2° *Résistance des rivets au cisaillement.* — Supposons que le rivet joue le rôle de *broche*, c'est-à-dire que sa tête n'exerce aucune compression sur les tôles ; alors le mouvement latéral de ces dernières ne sera empêché que par la résistance du rivet au cisaillement. La résistance de sécurité au cisaillement est égale aux 4/5 (soit 0,8) de celle R à la traction, et si cette dernière est prise égale à 6^k, cela représente $4^k,8$ au cisaillement, c'est-à-dire un peu moins que la résistance au glissement produite par le frottement.

Sur laquelle de ces deux résistances faut-il compter ? Autrement dit : doit-on calculer un rivetage en se basant sur le frottement des rivets sur les tôles pour assurer la liaison de ces derniers ? Ou bien, doit-on le calculer en se basant uniquement sur la résistance au cisaillement ? Quelques ingénieurs, s'appuyant sur ce fait d'expérience qu'un rivetage dont les rivets n'ont plus d'adhérence est bien près de sa ruine, proposent d'accepter la première hypothèse. Mais, en général, on fait les calculs en ne tenant compte que du cisaillement. Il résulte de ce qui précède que les calculs faits sur cette base donneront des excès de force par rapport à ceux qui seraient faits en se basant sur l'adhérence.

3° *Rupture des tôles.* — Pour les tôles, la rupture sera le résultat soit :

(*a*) du défaut de résistance des *intervalles*, c'est-à-dire des parties comprises entre les rivets ; la rupture se fera alors par traction ou par compression simples ; il y aura *arrachement ou écrasement des intervalles* ;

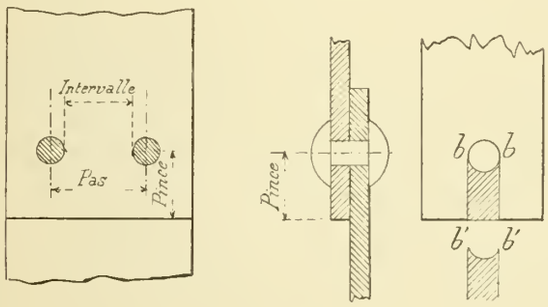


Fig. 498

(*b*) du défaut de résistance des *pinces* ; on nomme ainsi la partie *bb'* — *bb'* comprise en bordure entre l'axe des rivets et l'extrémité de la feuille de tôle ; la rupture aura lieu alors par *cisaillement des pinces* ;

(*c*) de l'écrasement de la paroi des trous sur laquelle appuient les rivets, ou de l'écrasement latéral des rivets eux-mêmes. Ce sera l'*écrasement des trous*.

Etudions séparément ces effets.

512. Résistance des tôles. — (*a*) **Effets du poinçonnage sur les intervalles.**

Pour percer, au poinçon, des trous dans une feuille de tôle, on place celle-ci sur une *selle* très massive et très résistante (fig. 498-I) dans laquelle est percée une *matrice* B un peu plus large que le poinçon A placé au-dessus. En exerçant sur le poinçon une pression suffisante, on lui fait traverser la tôle et il enlève dans cette dernière un disque d'un diamètre égal au sien.

Si la différence entre le diamètre du poinçon et celui de la matrice est très faible (fig. I), le trou percé dans la tôle est cylindrique ; mais si le diamètre de la matrice C dépasse de 20 à 25 °/₀ celui du poinçon (fig. IV), le trou percé est tronconique, avec sa petite base à la partie supérieure.

Après le poinçonnage le métal, aux environs du trou, est *écroui*, et si l'on détache autour de ce trou une bague de métal (fig. III), on reconnaît que ce métal n'est plus ductile et qu'il est devenu fragile, comme de l'acier trempé.

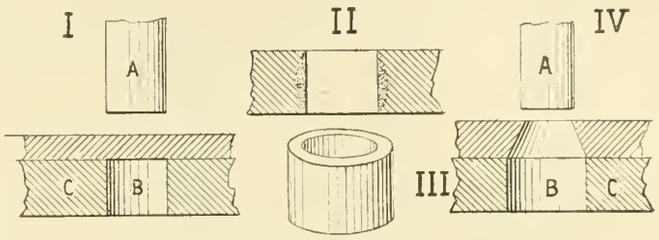


Fig. 499

Si le trou a été percé à la mèche, on n'observe rien de pareil ; les qualités primitives du métal n'ont pas été modifiées.

M. **Considère** a montré que cet écrouissage du métal aux environs de trous poinçonnés est défectueux ; on peut s'en rendre compte facilement. En effet, deux cas peuvent se présenter :

1er *Cas.* — *Les trous sont très rapprochés.* — Alors la *section nette* de la tôle (comptée déduction faite des vides), c'est-à-dire ce que nous avons nommé l'*intervalle*, est entièrement composée de métal écroui dont le module d'élasticité est plus élevé que celui du métal primitif ; la limite de rupture est aussi plus élevée, mais le métal est fort peu ductile. Dès lors, sa résistance à la rupture par traction simple, par millimètre carré de section nette, est augmentée.

Mais s'il y a flexion, pliure ou choc, la très faible ductilité du métal amènera facilement la rupture.

C'est ce qui se produira par exemple dans le cas d'un assemblage par *rivure simple à recouvrement* (fig. 500-I et II).

Une traction exercée sur chacune des deux tôles aura alors pour effet de produire une flexion aux environs de l'assemblage, les deux forces F et F' tendant à se placer en prolongement l'une de l'autre (fig. II).

Dans un assemblage à *double couvre-joint*, dit : *rivetage à chaîne*, au contraire (fig. 500-III), toute flexion sera évitée, et l'on serait dans de meilleures conditions de résistance, même avec des trous poinçonnés.

Remarquons qu'en général, dans un assemblage par rivets, les trous ne seront pas suffisamment rapprochés pour qu'on soit placé dans ce premier cas.

2e *Cas.* — *Les trous sont écartés les uns des autres.* — Alors les intervalles sont formés d'un métal non homogène, écroui au voisinage des trous, et plus ductile vers le milieu des intervalles. Si l'on soumet un pareil métal à un effort de traction, la partie écrouie, dont le module d'élasticité est plus grand, prend pour elle la presque totalité de l'effort transmis, comme le ferait un ressort énergique, soumis à

une traction en même temps que d'autres ressorts plus faibles. Il en résulte que la rupture se produira, d'abord, dans le métal écroui ; le métal ductile qui constitue le reste des intervalles devra alors résister seul à l'effort d'extension et il pourra arriver que la rupture devienne complète, s'il est soumis à un effort trop élevé.

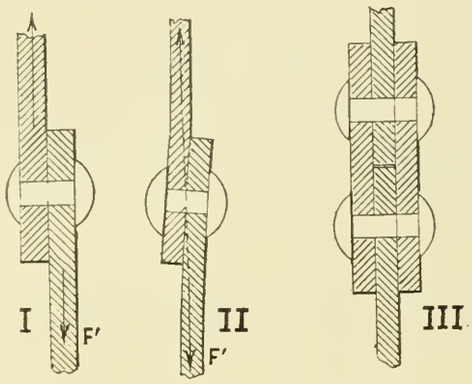


Fig. 500

Il n'en sera pas de même si les trous sont percés à la mèche, ou bien s'ils sont *alésés* après le poinçonnage de manière à enlever une bague dont l'épaisseur est de un cinquième environ de celle des tôles, mais sans descendre au-dessous de 1^{mm}.

Le recuit procure les mêmes avantages que l'alésage en rendant à la partie écrouie sa ductilité première.

Ces résultats ont été complètement vérifiés par les expériences de M. **Considère**.

(*a*) **Alésage et fraisage des trous.** — La conclusion de cette étude est donc :

1° que le poinçonnage diminue la résistance des sections nettes, d'autant plus que le métal est moins ductile et, dans une certaine mesure, d'autant plus que les trous sont plus espacés ;

2° qu'on rend au métal ses qualités par le recuit, ou par un alésage exécuté après coup, sur une épaisseur d'autant plus grande que la tôle est plus épaisse.

L'alésage occasionne une dépense supplémentaire qui varie de $0^f,60$ à $1^f,00$ par 100 kilogrammes de métal ; mais il procure une amélioration de 25 à 59 % de la résistance de la rivure. Pour tous les travaux soignés il faut donc aléser les trous de rivets. Si l'alésage se fait à la fois sur toutes les tôles préalablement réunies il a, en outre, pour avantage de donner des trous bien en prolongement et d'éviter le défaut indiqué figure 496-I.

On emploie quelquefois, pour régulariser l'ajustage des trous de rivets, le procédé du brochage, qui consiste à enfoncer violemment, dans les trous, des broches d'acier dur de diamètre un peu supérieur ; on voit que cette opération augmente encore l'écrouissage du métal, et par suite il ne faudra jamais l'employer.

513. **Résistance des rivets.** — (*a*) **Répartition égale des efforts entre les rivets.** — On admet que, quel que soit le système de rivetage, qu'il soit par file ou qu'il soit convergent, que les rivets travaillent par cisaillement ou qu'ils travaillent par adhérence, chacun d'eux prend une égale fraction de l'effort total, à la condition : 1° qu'ils aient tous les mêmes dimensions et qu'ils soient faits d'un métal bien identique ; 2° que ce métal soit plus ductile que celui des tôles à réunir.

En effet, dans ces conditions, si l'un des rivets travaille plus que les autres il va prendre, par rapport aux tôles, qui sont moins déformables que lui, une défiguration relative plus grande que ses voisins ; il cédera donc devant l'excès d'effort qui lui incombe en se déchargeant sur les autres rivets et l'égalité presque complète s'établira forcément.

Cela nécessite que les rivets soient fabriqués avec de l'acier *extra doux*, c'est-à-dire avec un métal qui joigne la ductilité à une grande résistance.

(*b*) **Sections de cisaillement.** — On désigne ainsi les sections que le glissement relatif des tôles tendrait à cisailler. Il peut y en avoir une seule ou plusieurs, et plus elles sont nombreuses, plus l'effort total est réparti sur une grande surface et moins grandes sont les chances de rupture. Dans le rivetage à recouvrement (fig. 497-I) et à couvre-joint (fig. 497-II) il n'y a qu'une seule section de cisaillement ; dans le rivetage à chaîne (fig. III) il y en a deux et par suite la section totale des rivets pourrait être deux fois moindre. Il pourrait y avoir un plus grand nombre de sections de cisaillement. Ainsi la fig. 501-I représente un rivetage à recouvrement, à deux files et à cinq sections de cisaillement. La fig. II est un rivetage à chaîne, à une file et à six sections de cisaillement.

(*c*) **Section totale des rivets.** — Par conséquent soit P l'effort total à transmettre, n le nombre des rivets plantés

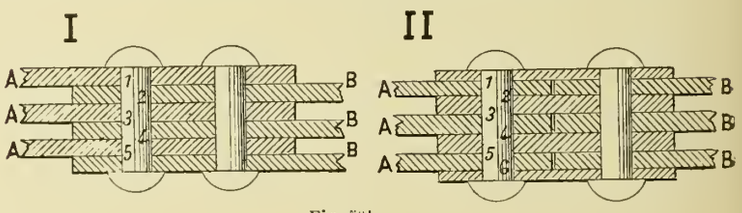


Fig. 501

dans les tôles A, A, A, ... ou B, B, B, ... qui tirent dans un même sens, d le diamètre des rivets, n' le nombre de sections de cisaillement, R la résistance de sécurité (en général 6 k. à la traction, soit 4,8 au cisaillement) ; un seul rivet, pour une seule section, aura une surface égale à $1/4\pi d^2$ et pourra supporter un cisaillement t qui sera

$$t = \frac{\pi d^2}{4} \times 0{,}8\,\mathrm{R} = 0{,}2\pi d^2\,\mathrm{R}.$$

Et comme il y a n rivets et que chacun d'eux présente n' sections de cisaillement cela fournira une résistance $n \times n'$ fois plus grande, ce qui donnera

$$P = 0{,}2\pi d^2 \times n \times n' \times R \qquad \text{d'où}$$

$$d = \sqrt{\frac{P}{0{,}2\pi n n' R}}.$$

Exemple. — Soit $P = 15380^k$ et supposons que nous ayons **4** rivets par file. Nous aurons

(fig. I) $n = 8$, $n' = 5$ et $d = 10^m/_m{,}1$.
(fig. II) $n = 4$, $n' = 6$ et $d = 13^m/_m$.

Ce calcul ne nous fait connaître ni l'épaisseur des tôles, ni le pas du rivetage, c'est-à-dire la distance d'axe en axe des rivets d'une même file et comme conséquence la largeur des tôles, ni la pince, c'est-à-dire la distance de la première file au bord de la tôle ; nous allons apprendre à calculer tous ces éléments.

§ 3. — Calcul d'un rivetage parallèle

514. Définitions et notations. — Nous adopterons dans cette étude les notations suivantes (fig. 502) :

d diamètre du rivet ;
a le *pas*, ou distance d'axe en axe des rivets d'une file ;
$a - d$ l'*intervalle* entre deux trous de rivets ;
b la *pince*, c'est-à-dire la distance entre l'axe du rivet et le bord de la tôle ;
e l'épaisseur totale des tôles qui seront tirées ou comprimées dans le même sens ; cette épaisseur e pouvant d'ailleurs être obtenue par l'adjonction de feuilles de tôle d'épaisseur moindre ;
n le nombre de files parallèles de rivets ;
φ le *module de force* du rivetage, c'est-à-dire le rapport de la résistance de la tôle, après le rivetage, à sa résistance première, avant le percement des trous.

Nous prendrons pour unité de comparaison l'épaisseur e de la tôle et nous donnerons des formules dans lesquelles entreront les rapports $a : e$ et $d : e$. Le constructeur est maître de disposer de l'un ou l'autre de ces rapports, mais plus ordinairement du premier $a : e$, qui est imposé par la condition de répartir également les rivets sur une même file.

516. Rivetage simple à recouvrement. — (*a*) **Calcul du pas.** — La rivure sera dans les meilleures conditions si la résistance à la traction des intervalles est égale à la résistance des rivets au cisaillement.

Raisonnons pour un seul rivet et pour les deux demi-intervalles voisins ; la résistance de ce rivet est proportionnelle à sa section et à la résistance de sécurité au cisaillement $S = 4/5\,R = 0{,}8\,R$; il supporte donc un effort égal à

$$\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5} R = 0{,}2\pi d^2 R.$$

Les deux demi-intervalles ont une section égale à $(a - d)\,e$, et l'effort auquel ils résistent est $(a - d)\,e \times R$.

L'égalité $\frac{\pi d^2}{5} R = (a - d)e \times R$, nous donne

$$(1) \qquad \frac{a}{e} = \frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{e}\right)^2 + \frac{d}{e} \quad \Big\} \quad \textit{formule du pas.}$$

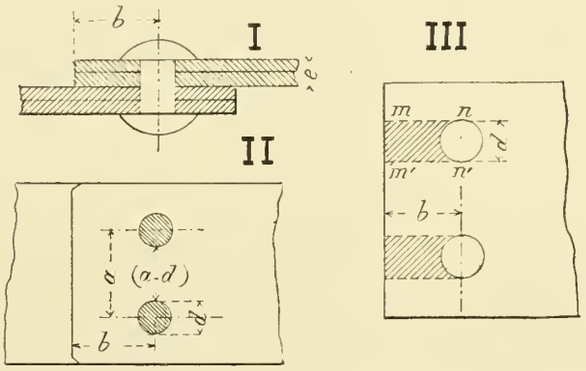


Fig. 502

(*b*) **Calcul de la pince.** — 1° *Cisaillement de la pince.* — La pince résiste au cisaillement suivant deux plans tangents au rivet et perpendiculaires au bord de la tôle. Soient mn, $m'n'$ ces deux plans (fig. III) ; les deux surfaces de cisaillement résistent chacune à la moitié de l'effort transmis par le rivet ; d'où l'égalité

$$b \times e \times \frac{4}{5} R = \frac{1}{2}\pi\frac{d^2}{4} \times \frac{4}{5} R, \qquad \text{on en tire}$$

$$(2) \qquad \frac{b}{e} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{e}\right)^2 \quad \Big\} \quad \textit{formule de la pince.}$$

2° *Compression du trou.* — Le corps du rivet exerce sur la paroi du trou, du côté de la pince, une compression qui ne doit pas dépasser la résistance de sécurité à l'écrasement du métal qui compose soit le rivet, soit la tôle si celle-ci est moins résistante que le rivet.

La pince $mnm'n'$ supporte la pression transmise par le rivet, soit $0{,}2\,\pi d^2 R$.

La pince est dans les conditions d'une tige de section $d \times e$, et l'effort de compression auquel elle peut résister par unité de section est

$$(3) \qquad p = \frac{\pi d^2}{5} R : (d \times e) = 0{,}2\pi\frac{d}{e} R$$

Cette pression ne doit pas dépasser la résistance de sécurité à l'écrasement R'.

La compression du trou sera égale à R si l'on a

$$0{,}2\pi\frac{d}{e}R = R, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{e} = 1{,}60;$$

par conséquent pour $d < 1{,}6\,e$ on sera sans crainte d'écrasement. D'ailleurs, si les rivets sont adhérents, la compression du trou n'existe plus.

(*d*) **Module de force.** — Le module de force de la rivure est $\varphi = (a-d) : a$ et en y remplaçant a par sa valeur en fonction de d, trouvée ci-dessus, il vient

$$(4) \qquad \varphi = \frac{1}{1+\frac{5e}{\pi d}} \quad \Big\} \quad \textit{module de force.}$$

516. **Rivetage multiple à recouvrement.** — (*a*) **Calcul du pas.** — Nous avons admis que l'effort tranchant sur les rivets est réparti également entre toutes les files ; quant à l'effort de traction sur la tôle, il sera supporté par l'intervalle d'une seule file de rivets. Cela posé, soit n le nombre des files, nous aurons donc l'égalité

$$(a-d)eR = n\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5}R, \qquad \text{d'où}$$

$$(1') \qquad \frac{a}{e} = \frac{n\pi}{5}\left(\frac{d}{e}\right)^2 + \frac{d}{e} \quad \Big\} \quad \textit{formule du pas.}$$

(*b*) **Calcul de la pince.** — La pince est dans les mêmes conditions que s'il n'y avait qu'une file ; par conséquent ses dimensions seront les mêmes que dans le premier cas et la compression du trou sera également la même.

(*c*) **Module de force.** — De l'équation (1') on tire :

$$a = \frac{n\pi d^2}{5e} + d,$$

ce qui donne pour la valeur du module de force $\varphi = (a-d) : a$.

$$(4') \qquad \varphi = \frac{1}{1+\frac{5e}{n\pi d}} \quad \Big\} \quad \textit{module de force.}$$

517. **Rivetage simple à chaîne.** — (*a*) **Calcul du pas.** — Dans cette rivure, l'intervalle $(a-d)$ de la tôle centrale supporte tout l'effort de traction, tandis que le rivet résiste au cisaillement par deux sections différentes. L'égalité qui exprime que l'effort sur la tôle est égal à l'effort du cisaillement du rivet devient donc :

$$(a-d)eR = 2\,\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5}R, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad \frac{a}{e} = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{d}{e}\right)^2 + \frac{d}{e} \quad \Big\} \quad \textit{formule du pas.}$$

valeur égale à celle qu'on obtient dans le cas d'une rivure double à recouvrement.

(*b*) **Calcul de la pince.** — Puisque le rivet résiste au cisaillement suivant deux sections, l'effort de cisaillement supporté par la pince est double de ce qu'il est dans le cas de la rivure à recouvrement ; la longueur de la pince est donc donnée par la formule :

$$(2) \qquad \frac{b}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2 \quad \Big\} \quad \textit{formule de la pince.}$$

La pince doit donc être deux fois plus longue dans la rivure à chaîne que dans la rivure à recouvrement.

Quant à la compression du trou, pour la même raison, elle est le double de ce qu'elle est dans la rivure à recouvrement ; sa valeur est :

$$(3) \qquad p = 0{,}4\pi R \times \frac{d}{e}.$$

Et si l'on veut que la résistance de sécurité à l'écrasement ne soit pas atteinte, il faudra que d soit au plus égal à $0{,}8\,e$ au lieu de $1{,}6e$. Par conséquent, dans les rivetages à chaîne, les rivets devront avoir un diamètre plus petit que dans les rivures à recouvrement.

(*c*) **Module de force.** — Sa valeur est la même que pour la rivure double à recouvrement $\varphi = (a-d) : a$:

$$(4) \qquad \varphi = \frac{1}{1+\frac{5e}{2\pi d}} \quad \Big\} \quad \textit{module de force.}$$

518. **Rivetage multiple à chaîne.** — (*a*) **Calcul du pas.** — L'intervalle d'une file supporte un effort de traction égal à l'effort de cisaillement supporté par les n files de rivets ; nous aurons donc l'égalité :

$$(a-d)e \times R = 2n\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5}R, \qquad \text{d'où}$$

$$(1\ bis) \qquad \frac{a}{e} = \frac{2n\pi}{5}\left(\frac{d}{e}\right)^2 + \frac{d}{e} \quad \Big\} \quad \textit{formule du pas,}$$

c'est-à-dire le double de ce qu'on trouve dans le cas de la rivure à recouvrement ayant le même nombre de files.

(*b*) **Calcul de la pince.** — Comme dans le cas précédent, ainsi que la compression du trou.

(*c*) **Module de force.** — En portant dans l'expression du module de force la valeur de a tirée de l'équation 1 *bis*, il vient :

$$(4\ bis) \qquad \varphi = \frac{1}{1+\frac{5e}{2n\pi d}} \quad \Big\} \quad \textit{module de force.}$$

519. **Abaque pour le calcul des rivetages.** — Les formules précédentes sont traduites sur l'abaque n° 15, emprunté à **Reuleaux**. Remarquons qu'elles sont toutes établies en fonction de la quantité $d : e$. Dès lors, prenons comme abcisses les valeurs de $d : e$ et comme ordonnées les valeurs des autres quantités variables qui entrent dans les formules, nous aurons des courbes différentes s'appliquant :

1° Au pas $a : e$; 2° à la largeur de la pince $b : e$; 3° à la pression p des pinces, en admettant R = 6 k. par millimètre carré ; 4° au module de force φ.

La partie supérieure de l'abaque est relative au module de force φ. La partie inférieure se rapporte aux autres quantités.

Abaque n° 15. Calcul des Rivetages.

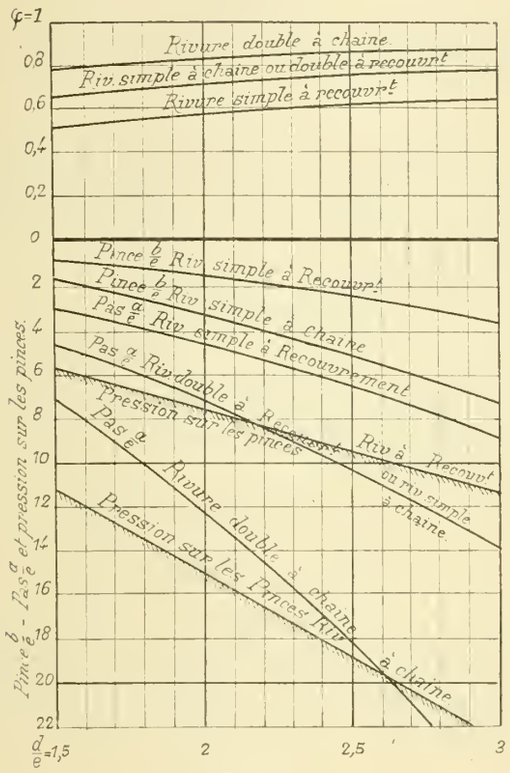


Fig. 503

Nous tirerons de ce tableau les conclusions suivantes :

1° (Abaque supérieur). Le coefficient de force φ est d'autant plus grand que le diamètre des rivets est plus fort.

2° (Abaque inférieur). Le pas doit augmenter lorsqu'on fait croître le diamètre des rivets.

3° La compression des pinces augmente rapidement avec le diamètre des rivets, surtout dans les rivures à chaîne.

Application numérique. — Une table de tôle A doit être rivée à une autre table B de même épaisseur totale qu'elle e. L'effort total à transmettre est $P = 2400$ k.; faire le choix d'un rivetage et en calculer les éléments. Adoptons le recouvrement simple, c'est-à-dire à une file, et admettons deux rivets dans la file. Nous en avons immédiatement le diamètre d, en remarquant qu'il n'y a qu'une section de cisaillement et en écrivant :

$$2 \times \frac{\pi d^2}{4} \times 4^{k},8 = 2400, \qquad \text{d'où}$$

$$d = 17^{m},9, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{e} = \frac{17,9}{10} = 1,79.$$

Pour cette valeur de $d : e$ l'abaque donne

$$\frac{a}{e} = 3,8 \qquad \text{d'où} \qquad a = 38^{mm}.$$

Tel est le pas ; la largeur L de la tôle est donc

$$L = 2a + 2d = 113,8.$$

L'abaque donne pour la compression p du trou

$$p = 6^{k},5, \qquad \text{ce qui est admissible.}$$

Il donne pour le module de force φ

$$\varphi = 0,57,$$

ce qui est peu avantageux.

§ 4. — Rivetages convergents

520. Eléments de résistance. — Dans les rivetages convergents, le nombre des rivets de chaque file augmente en progression arithmétique, jusqu'à la file du milieu, pour diminuer ensuite. Le nombre de rivets de la file du milieu suffit pour définir la rivure ; si elle renferme m rivets, le nombre total des rivets est la somme des termes des deux progressions arithmétiques :

$$1.2.3.4 \ldots m$$

et

$$1.2.3.4 \ldots m - 1$$

Cette somme est $\dfrac{m(m+1)}{2} + \dfrac{(m-1)m}{2} = m^2.$

Le pas étant a, la largeur totale de la pièce rivée sera ma.

Pour calculer les éléments de la résistance d'une pareille rivure, nous admettrons encore que tous les rivets supportent le même effort de cisaillement ; de sorte que si P est l'effort total que la rivure doit supporter, chaque rivet résistera à un effort $p = P : m^2$.

Evaluons les intervalles $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ des différentes files en fonction de l'intervalle $a - d$ de la file centrale, nous aurons :

1re file $\qquad \alpha_1 = ma - d$

2e file $\qquad \alpha_2 = ma - 2d$

3e file $\qquad \alpha_3 = ma - 3d$

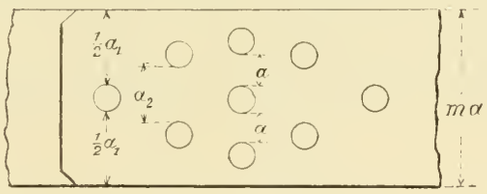


Fig. 504

(*a*) **Tensions dans les intervalles.** — L'effort total P est réparti dans la première file sur une surface

$$\alpha_1 \times e = (ma - d)e$$

et l'effort par millimètre carré dans l'intervalle α_1 est alors

$$R_1 = \frac{P}{(ma - d)e}.$$

Dans la deuxième file, l'effort transmis est soulagé de ce qu'a pris pour lui le rivet de la première file ; l'effort restant est donc :

$$P - \frac{P}{m^2} = P\frac{(m^2-1)}{m^2}$$

et l'intervalle de cette deuxième file supporte par millimètre carré un effort

$$R_2 = \frac{P(m^2-1)}{m^2} : (ma-2d)e = \frac{P(m^2-1)}{em^2(ma-2d)}.$$

Dans la troisième file, l'effort transmis est diminué de ce qui a été pris par les rivets des deux premières, et est par suite égal à

$$P - \frac{3P}{m^2} = P\left(\frac{m^2-3}{m^2}\right).$$

La tension par unité de surface dans les intervalles de la troisième file est alors :

$$R_3 = P\frac{(m^2-3)}{m^2} : (ma-3d)e = \frac{P(m^2-3)}{em^2(ma-3d)}.$$

On trouverait de même la tension dans une file quelconque. Pour la quatrième file, nous aurions

$$R_4 = \frac{P(m^2-6)}{em^2(ma-4d)}.$$

On voit que les efforts unitaires de tension varient d'une file à l'autre dans les intervalles ; ils dépendent de m et de d. Disposons de m et de d de telle sorte que la tension dans les deux premières files soit la même, nous aurons :

$$\frac{1}{ma-d} = \frac{m^2-1}{m^2(ma-2d)}, \qquad \text{d'où}$$

$$(m^2-1)(ma-d) = m^2(ma-2d), \qquad \text{ou}$$

$$ma - d = m^2 d, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad d = \frac{ma}{m^2+1}.$$

(*b*) **Diamètre des rivets.** — Cherchons la valeur de $\frac{d}{e}$ qui en résulte ; écrivons que dans la première file le rivet travaille à la résistance de sécurité au cisaillement, 0,8 R, nous aurons :

$$(2) \qquad \frac{P}{m^2} = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5}R.$$

Comme l'intervalle travaille dans cette file à la résistance de sécurité, nous avons :

$$P = R(ma-d)e = Rm^2de$$

et en portant cette valeur dans l'équation (2), il vient :

$$\frac{(ma-d)}{m^2}e = \frac{\pi d^2}{5}$$

et comme d'après l'équation (1), $ma - d = m^2d$, il vient :

$$\frac{\pi d^2}{5} = de \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{e} = \frac{5}{\pi} = 1{,}591 \text{ ou } 1{,}6.$$

Le rapport $d : e$ est donc indépendant du nombre des rivets, dans un rivetage convergent.

En adoptant cette valeur $d : e = 1{,}6$ et en la portant dans les valeurs de R_3, R_4, etc., on voit que ces dernières vont en diminuant jusqu'au milieu. La première et la deuxième file sont donc les files dangereuses.

(*c*) **Module de force.** — Le module de force a pour valeur, évalué sur la première file, qui est la plus faible :

$$\varphi = \frac{ma-d}{ma}$$

et en remplaçant ma par sa valeur, $ma = d(m^2+1)$, il vient :

$$(3) \qquad \varphi = \frac{m^2}{m^2+1}.$$

Ce qui montre que le module de force augmente avec le nombre m des rivets et tend vers l'unité quand ce nombre augmente.

Le calcul donne les résultats suivants :

RIVETAGE CONVERGENT

$m =$	2	3	4	5
$\frac{d}{e} =$	1,6	1,6	1,6	1,6
$\frac{a}{e} =$	4,00	5,32	6,80	8,32
$\varphi =$	0,80	0,90	0,94	0,96
$\frac{ma}{e} =$	8,00	15,96	27,20	41,60

(*d*) *Compression du trou.* — La pression p sur le fond du trou est égale à

$$p = \frac{P}{m^2de},$$

puisque le rivet transmet une pression égale à $P : m^2$.

Cette valeur est précisément égale à la valeur de R_1 trouvée pour les intervalles de la première file ; et comme c'est la résistance de sécurité il n'y aura jamais à craindre l'écrasement des trous.

Cette étude suffit à faire comprendre les avantages des rivures convergentes.

521. **Application.** — Deux tables de tôles réunies à recouvrement, ont à se transmettre une traction totale $P = 10000$ k.

On veut adopter un rivetage couvergent à 3 rivets sur la file centrale ($m = 3$).

Calculer l'épaisseur e des tables, leur largeur L et le diamètre d des rivets.

Diamètre des rivets : $m^2 = 9$, il y aura donc 9 rivets et l'on aura l'équation

$$9 \times \frac{\pi d^2}{4} \times 4{,}8 = 10\,000 \text{ k.}, \qquad \text{d'où}$$

$$d = 17{,}15 \qquad \text{et} \qquad e = \frac{d}{1{,}6} = 10^{\text{mm}},72.$$

Pas. — Le tableau précédent indique pour $m = 3$, $a : d = 5{,}32 : 1{,}6 = 3{,}33$, d'où

$$a = 57^{\text{mm}},11, \qquad \text{et} \qquad L = 3a = 171^{\text{mm}},50.$$

Module de force. — Il est égal à $(ma - d) : ma$.

$$\varphi = \frac{171{,}50 - 17{,}15}{171{,}50} = 0{,}90$$

conforme au tableau.

§ 5. — Assemblages par rivures

522. Rivetage d'une poutre double T composite.

(*a*) **Rivetage des semelles sur les cornières.** — Supposons d'abord que l'âme et les quatre cornières, c'est-à-dire le corps de poutre, forment un tout solidaire comme si elles étaient invariablement soudées ensemble ; nous verrons plus loin, au n° *b*, comment devront être disposés les rivets pour réaliser cette solidarité.

Soient AA′ et BB′ deux sections voisines et soient M le moment fléchissant en AA′, et M_1 celui en BB′. Si la semelle n'était pas rendue solidaire des cornières, les mo-

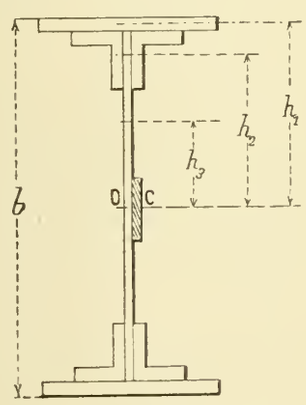


Fig. 505

ments fléchissants et leurs variations seraient sans effet sur elle et devraient être équilibrées exclusivement par le corps de poutre ; les cornières glisseraient sous les semelles.

Mais si la semelle est rivée aux cornières, alors elle sera entraînée dans l'infléchissement du corps de poutre grâce à des tractions ou à des compressions dont les rivets seront les intermédiaires et que nous allons calculer. Soient p_0 et p_1 les efforts d'extension, ou de compression, auxquels sont soumises les semelles dans ces deux sections AA′ et BB′ ; les rivets compris dans l'intervalle AB devront résister à un effort de cisaillement égal à $p_0 - p_1$ en supposant $p_1 < p_0$.

Soit Ω_1 la section, supposée constante, d'une semelle, h_1 la distance de son centre de gravité à l'axe neutre de la poutre (fig. 505).

Un élément de surface ω situé à la distance y de l'axe neutre et dans la section AA′ supporte un effort de traction ou de compression égal à $(My : I)\omega$.

I, dans cette formule, est le moment d'inertie de *toute* la section par rapport à un axe horizontal passant par son centre de gravité O.

La semelle tout entière supporte donc l'effort

$$p_0 = \Sigma \frac{My}{I}\omega = \frac{M}{I}\Sigma y\omega = \frac{M}{I}\Omega_1 h_1.$$

De même, nous aurons $p_1 = \frac{M_1}{I}\Omega_1 h_1$ et par suite

$$p_0 - p_1 = \frac{M - M_1}{I}\Omega_1 h_1.$$

Soit d le diamètre d'un rivet, m l'écartement d'axe en axe des rivets ; si nous appelons l la distance entre les deux sections AA′ et BB′, il y aura entre ces deux sections $(l : m)$ rivets par file ; et comme il y a une file sur chaque bord de la poutre, il y a en tout $(2l : m)$ rivets.

S'ils supportent un effort de cisaillement égal à la résistance de sécurité 4/5 R, nous devrons satisfaire à l'égalité

$$\frac{4}{5}\,\mathrm{R} \times \frac{2l}{m}\pi\frac{d^2}{4} = \frac{M - M_1}{I}\Omega_1 h_1$$

que nous pouvons écrire :

$$\frac{4}{5}\mathrm{R} \times \frac{\pi d^2}{2m} = \frac{\frac{M - M_1}{l}}{I}\Omega_1 h_1.$$

Si nous considérons des sections de plus en plus rapprochées l'une de l'autre, nous savons que la quantité $\frac{M - M_1}{l}$ a pour limite l'effort tranchant T dans la section AA′, Par conséquent, en un point quelconque de la poutre, l'intervalle m entre deux des rivets qui réunissent les semelles aux cornières sera donné par la formule

$$(1) \qquad \frac{4}{5}\mathrm{R}.\frac{\pi d^2}{2m} = \frac{T}{I}\Omega_1 h_1.$$

(*b*) **Rivetage des cornières sur l'âme.** — Soit Ω_2 la section de l'ensemble des deux cornières, h_2 la distance du centre de gravité de cet ensemble à la fibre neutre de la poutre ; soit m_1 l'intervalle des rivets reliant les cornières à l'âme ; ces rivets résistent au cisaillement sur deux sections.

En raisonnant comme nous venons de le faire pour les semelles, nous verrons que l'écartement m_1 des rivets qui en chaque point de la poutre réunissent l'âme aux cornières sera déterminé par la formule

$$(2) \qquad \frac{4}{5}\mathrm{R}.\frac{\pi d^2}{2m_1} = \frac{T}{I}(\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2).$$

(*c*) **Rivetage longitudinal de deux portions d'âme.** — Si nous supposons l'âme formée de deux tôles réunies par un couvre-joint longitudinal f en un point C, Ω_3 étant la section de la portion d'âme comprise au-dessus du point C, et h_3 la hauteur du centre de gravité de cette portion

d'âme au-dessus de l'axe neutre de la poutre, l'intervalle m_2 des rivets reliant les couvre-joints à l'âme sera donné par la formule

$$(3) \qquad \frac{4}{5} \mathrm{R} \frac{\pi d^2}{2m_2} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{I}} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3).$$

(*d*) **Remarques pratiques.** — 1° Il est facile de voir que l'on aura $m_2 < m_1 < m$, si tous les rivets employés ont le même diamètre d;

2° Si le couvre-joint longitudinal est au milieu de la hauteur de l'âme, comme sur la figure 505, nous voyons que dans la formule (3) la parenthèse devient égale à ΩH, Ω étant la section de la demi-poutre et H la distance de son centre de gravité à la fibre neutre ;

3° On calculera m, m_1 et m_2 en prenant pour l'effort tranchant T la valeur maxima, et en espaçant les rivets de la même quantité sur toute la longueur de la poutre. On fera m égal à m_1, ce qui donnera un surcroît de solidité, et permettra le placement plus facile des rivets ;

4° Si b est la hauteur de la poutre, on aura une approximation suffisante en remplaçant la quantité $\mathrm{I} : (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2)$ par b qui est plus petit dans la formule qui donne m_1 ; on aura ainsi un surcroît de sécurité. Il vient alors

$$m_1 = \frac{2}{5} \mathrm{R} \pi d^2 \times \frac{b}{\mathrm{T}}.$$

Or si la section de l'âme a été calculée pour résister à l'effort tranchant T, e étant son épaisseur, on a

$$be = \frac{5}{4} \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{b}{\mathrm{T}} = \frac{5}{4\mathrm{R}e} \qquad \text{et enfin}$$

$$(4) \qquad m_1 = \frac{\pi d^2}{2e} ; \qquad \text{cela donne pour}$$

$d = 1{,}5e$	$d = 2e$	$d = 2{,}5e$
$m_1 = 2{,}35d$	$m_1 = 3{,}14d$	$m_1 = 3{,}92d$
$m_1 = 3{,}53e$	$m_1 = 6{,}28e$	$m_1 = 9{,}80e$

Si, pour des raisons de construction, on a employé une épaisseur d'âme plus grande que l'épaisseur calculée e, c'est néanmoins sur cette épaisseur e qu'il faudra se baser pour l'évaluation des intervalles m_1.

523. Joints d'une poutre composite. — (*a*) **Généralités.** — Les poutres, lorsqu'elles dépassent certaines limites de longueur et de poids, doivent être divisées en tronçons qui sont construits à l'atelier, et assemblés ensuite sur place par des couvre-joints.

Il faut disposer les joints de manière à avoir le moins possible de rivets à poser sur place; la rivure sur le chantier coûte plus cher et est ordinairement moins bien faite que la rivure exécutée à l'atelier.

Pour obtenir ce résultat, il faut rapprocher le plus possible les joints des différents fers qui constituent la poutre, excepté pour les semelles, où nous verrons plus loin qu'il est nécessaire d'adopter des dispositions particulières.

Dans une poutre composite, l'âme et les deux cornières auront chacune leurs couvre-joints propres, dont la section sera égale à celle des pièces qu'ils remplacent; ces couvre-joints pourront sans inconvénient être placés vis-à-vis l'un de l'autre.

Les différentes feuilles de tôle qui constituent les semelles ne peuvent pas avoir chacune un couvre-joint. Si l'on plaçait tous les joints des semelles au même point, le couvre-joint devrait avoir une section égale au total de toutes les semelles qu'il remplace ; on arriverait ainsi à des épaisseurs trop considérables, qu'il serait difficile de bien serrer par des rivets. De plus, l'effort transmis par le couvre-joint ne serait pas dans le prolongement des efforts transmis par les portions de semelles de la poutre, et une partie de ces efforts serait prise par l'âme et par les cornières, ce qui ferait travailler ces deux pièces d'une manière plus considérable qu'il n'a été prévu.

C'est pourquoi, pour les semelles, on dispose les joints en escalier, ou bien on les croise, de manière à ne donner au couvre-joint que l'épaisseur de la semelle la plus forte.

Un joint doit être calculé de manière que la poutre présente en ce point la même résistance que dans sa partie courante, et en appliquant aux couvre-joints les mêmes coefficients de résistance qu'aux autres pièces.

(*b*) **Méthode de calcul.** — Pour étudier les dimensions à donner aux différentes parties d'un joint ou d'un assemblage, nous emploierons la méthode générale suivante :

Nous chercherons quels sont les divers modes de rupture de l'assemblage, et nous écrirons les équations qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces ruptures ne puissent pas se produire; ces opérations nous permettront de déterminer les dimensions à donner aux diverses parties de l'assemblage (épaisseur des couvre-joints, nombre et diamètre des rivets).

Il arrivera généralement qu'une même dimension pourra être déterminée par plusieurs conditions différentes ; on prendra alors la valeur donnée par la condition la plus défavorable.

524. Couvre-joints du corps de poutre. — (*a*) **Ame.** — On placera sur l'âme un couvre-joint de chaque côté. Soit Ω la section de l'âme, e son épaisseur ; soit Ω_j la section du couvre-joint, e_j son épaisseur, soit enfin d le diamètre d'un rivet, n le nombre de rivets d'une file, n' le nombre de files de rivets, sur chaque tronçon de poutre, nous devrons avoir :

1° Pour que les rivets ne soient pas cisaillés,

$$\Omega - e \times d \times n \leqslant 2nn' \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5}, \qquad \text{ou}$$

$$(1) \qquad \Omega - e \times d \times n \leqslant 0{,}4 nn' \pi d^2.$$

Le premier membre de cette équation est la section nette de l'âme, trous de rivets déduits, c'est-à-dire le total des intervalles de l'âme. Le second membre est le total des sections de cisaillement des rivets, multiplié par le nombre 4/5 qui est le rapport de la résistance de cisaillement supportée par les rivets à la résistance de traction transmise par les intervalles.

2° Pour que le couvre-joint ne soit pas rompu entre les rivets,

$$(2) \qquad 2(\Omega_j - e_j dn) \geqslant \Omega - e \times d \times n.$$

Cette équation exprime que les intervalles des deux couvre-joints réunis ont une résistance à la traction au moins égale à celle des intervalles de l'âme.

Le nombre n des rivets de chaque file et leur diamètre d seront donnés d'après l'épaisseur des tôles à assembler ; la première inégalité permettra de trouver le nombre n' des files, la seconde fera connaître l'épaisseur e_j du couvre-joint.

(*b*) **Cornières.** — Les couvre-joints de cornières sont des cornières ayant même section qu'elles ; on pourrait placer les joints en face l'un de l'autre, pour les quatre cornières.

Pour plus de généralité, nous supposerons (fig. 506) que les joints B et C sont en des points différents, et nous étudierons ce qui se passe sur une des deux membrures.

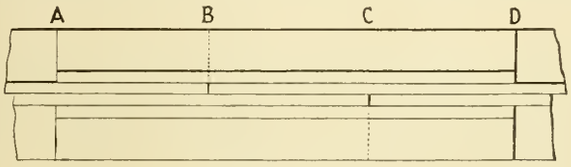


Fig. 506 (*Plan*).

Soit Ω la section d'une cornière ;

Ω_j celle d'un couvre-joint ; les trous de rivets étant déduits de ces deux sections ;

d le diamètre d'un rivet ;

m_h le nombre de rivets compris sur une aile horizontale entre l'extrémité A d'un couvre-joint et le joint B, ou entre l'autre extrémité D et l'autre joint C ;

m_v le nombre de rivets compris entre les mêmes points sur une aile verticale ;

n_h le nombre de rivets compris entre les deux joints B et C sur une aile horizontale ;

n_v le nombre de rivets compris entre les deux mêmes joints sur une aile verticale.

Les ruptures possibles sont :

1er Cas. — La rupture des deux couvre-joints au droit des rivets voisins des joints, les rivets placés entre les joints B et C, sur l'aile verticale, étant cisaillés (fig. 507).

Pour que cette rupture ne se produise pas, il faut que

$$2\Omega_j + n_v \times \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5} \geqslant 2\Omega, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad n_v \geqslant \frac{(\Omega - \Omega_j) \times 10}{\pi d^2}.$$

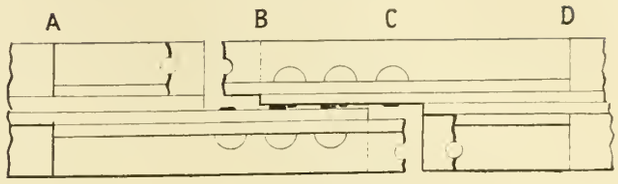


Fig. 507 (*Plan*).

2e Cas. — La rupture par cisaillement des rivets des ailes verticales ainsi que des rivets des ailes horizontales compris entre les joints et les extrémités des couvre-joints, un couvre-joint restant sur chaque tronçon (fig. 508).

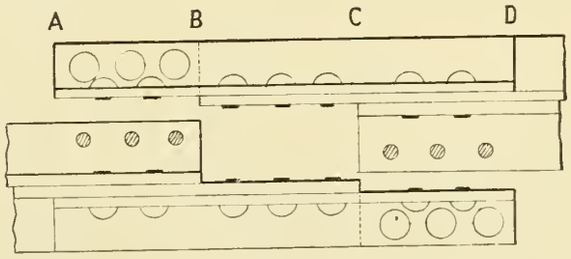


Fig. 508 (*Plan*).

Pour que cette rupture ne se produise pas, il faut que

$$(2) \qquad [2(m_h + m_v) + n_v]\frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant 2\Omega.$$

3e Cas. — La rupture par cisaillement des rivets d'un couvre-joint entre le point A et le point B à la fois sur l'aile verticale et sur l'aile horizontale et par rupture d'une cornière au voisinage du joint B (fig. 509).

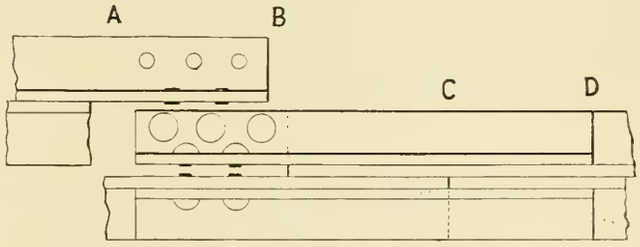


Fig. 509 (*Plan*).

La condition pour que la rupture ne se produise pas est :

$$(3) \qquad (2m_v + m_h)\frac{\pi d^2}{4} \times \frac{4}{5} \geqslant \Omega.$$

4e Cas. — La rupture par cisaillement de tous les rivets des couvre-joints d'un même côté entre les points A et C, mais sans rupture de pièce, les deux couvre-joints restant sur le tronçon de droite. (Figure inutile.)

La condition pour que cette rupture n'ait pas lieu est :

$$(4) \qquad (2m_h + 2m_v + 2n_v + n_h)\frac{4}{5}\frac{\pi d^2}{4} \geqslant 2\Omega.$$

Cette condition est plus favorable que la seconde ; il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte.

5e Cas. — Un couvre-joint peut se rompre en B, tandis que l'autre rupture se produit en C, en cisaillant les rivets de l'aile verticale de B en C, et les rivets du second couvre-joint de C en D. (Figure inutile.)

La condition pour que la rupture ne se produise pas est :

$$\Omega_j + (n_v + m_v + m_h)\frac{4}{5}\frac{\pi d^2}{4} \geqslant 2\Omega.$$

Cette équation de condition est la somme des deux premières, et par suite, il n'y a pas à en tenir compte. Il ne reste donc que les trois premières conditions trouvées.

La première condition nous montre que si l'on veut que les joints soient au même point, cela entraînera que n_v soit nul et exigera $\Omega_j \geqslant \Omega$; les conditions (2) et (3) deviennent alors :

$$(2') \qquad m_h + m_v \geqslant \frac{5\Omega}{\pi d^2} \qquad \text{et}$$

$$(3') \qquad 2m_v + m_h \geqslant \frac{5\Omega}{\pi d^2};$$

il suffira de satisfaire à la première de ces deux conditions, ce qui permettra de déterminer m_h et m_v.

La troisième condition montre que le nombre des rivets $2m_v + m_h$ sera le même quelle que soit la distance des joints, dans le cas où ils ne seront pas au même point.

Comme les n_h rivets, placés sur chaque aile horizontale, entre les joints, n'interviennent pas dans les conditions de résistance, on voit qu'en rapprochant le plus possible les joints, on supprime le plus grand nombre de ces rivets ; en particulier, si les joints sont au même point, on économise $2n_h$ rivets.

Si la section Ω_j du couvre-joint est plus faible que celle de la cornière Ω, les joints ne pourront pas être placés au même point ; leur écartement dépendra du nombre n_v de rivets placés sur l'aile verticale entre les deux joints, nombre qui sera déterminé par la condition (1)

$$n_v \geqslant \frac{10(\Omega - \Omega_j)}{\pi d^2}.$$

En portant cette valeur dans les conditions (2) et (3) nous en tirons

$$m_v \geqslant \frac{5(\Omega - \Omega_j)}{\pi d^2},$$

$$m_h \geqslant \frac{10\Omega_j - 5\Omega}{\pi d^2},$$

qui permettront de déterminer le nombre des rivets à placer sur les ailes horizontales et verticales entre le joint et l'extrémité du couvre-point.

Le nombre n_h des rivets à placer sur l'aile horizontale entre les joints est quelconque et réglé par la seule condition que les tôles ne bâillent pas..

525. **Couvre-joints de semelles.** — (*a*) **Joints en escalier** (fig. 510). — Nous avons dit que les joints des semelles devaient être placés en des points différents ; supposons qu'il y ait à réunir trois semelles de sections $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, dont les joints B_1, C_3 et D_2 seront en escalier, au moyen d'un couvre-joint AE de section Ω_j.

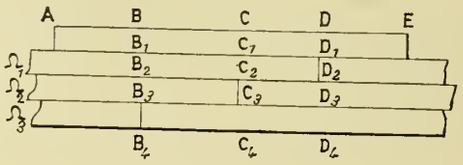


Fig. 510

Soit d le diamètre d'un rivet, et soient n_A^B, n_B^C, n_C^D, n_D^E les nombres de rivets compris entre les différentes sections ou entre les sections extrêmes et les extrémités du couvre-joint.

Nous pourrons avoir les différents modes de rupture suivants :

1er Cas. — La rupture peut se produire par l'un des joints ; il faut alors que le couvre-joint ait une section au moins égale à celle de la plus forte semelle.

2e Cas. — La rupture peut se produire par deux joints B et C, suivant $B_1B_3C_3C$; il faut alors que la section du couvre-joint, augmentée des quatre cinquièmes de la section des rivets compris entre B et C, soit au moins égale à la somme des sections des deux semelles coupées ; les rivets résistent en effet au cisaillement ; nous aurons donc :

$$(1) \qquad \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \times n_B^C + \Omega_j \geqslant \Omega_2 + \Omega_3.$$

3e Cas. — La rupture peut se produire par trois joints suivant $B_4B_3C_3C_2D_2D_1E$; il faut alors que les quatre cinquièmes des sections de tous les rivets compris entre B_4 et E soit au moins égale à la somme des sections des semelles

$$(2) \qquad \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4}(n_B^C + n_C^D + n_D^E) \geqslant \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3.$$

4e Cas. — La rupture peut se produire suivant AB_1B_4 ou suivant ED_1D_4 ; les quatre cinquièmes de la section des rivets compris du joint extrême à l'extrémité du couvre-joint doivent être supérieurs à la section de la semelle coupée en ce joint, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \times n_A^B \geqslant \Omega_3 \qquad \text{et}$$

$$(4) \qquad \frac{4}{5}\frac{\pi d^2}{4} n_D^E \geqslant \Omega_1.$$

Les autres modes de rupture donnent des conditions moins défavorables que les précédentes ; c'est pourquoi nous ne les étudions pas.

La première formule montre qu'on peut rapprocher les joints, à la condition d'augmenter l'épaisseur du couvre-joint.

Mais la formule (2) nous montre que le nombre des rivets ne peut être diminué, et par suite qu'il n'y a pas intérêt à rapprocher les joints au-delà d'une certaine limite, la longueur du couvre-joint devant rester la même.

La solution la plus avantageuse consiste à donner au couvre-joint la même épaisseur qu'à la plus forte semelle ; des formules précédentes, on peut alors déduire ce qui suit :

1° Le nombre des rivets entre deux joints consécutifs doit correspondre à une section totale équivalente aux cinq quarts de la section de la plus forte des deux semelles qui sont coupées en ces points.

Par exemple si $\Omega_2 > \Omega_3$, on devra avoir

$$n_B^C \times \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} = \Omega_2.$$

2° D'un joint extrême à l'extrémité du couvre-joint la section des rivets sera équivalente aux cinq quarts de la section de la semelle interrompue en ce point. Si nous avons p semelles égales, Ω étant la section de l'une d'elles, le nombre total de rivets sera

$$\frac{(p+1)\Omega \times 4}{\pi d^2},$$

ce qui déterminera la longueur du couvre-joint.

(*b*) **Joints croisés** (fig. 511). — Considérons encore un joint des trois semelles de sections Ω_1, Ω_2 et Ω_3, et conservons les notations précédentes. En étudiant les différentes ruptures qui peuvent se produire, nous voyons que les conditions 1, 3 et 4 trouvées plus haut subsistent, mais que la condition 2 disparaît.

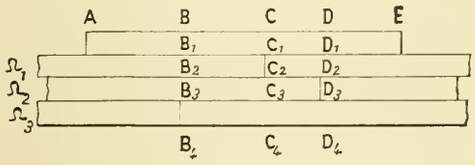


Fig. 511

Il en résulte qu'en augmentant l'épaisseur du couvre-joint, on peut rapprocher les joints, mais sans changer les nombres n_A^B et n_D^E des rivets compris entre les joints extrêmes et les extrémités du couvre-joint.

Si nous considérons la rupture $B_4B_2C_2C_1A$ nous aurons la condition

$$(n_A^B + 2n_B^C)\frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant \Omega_3 + \Omega_1,$$

les rivets entre B et C travaillant au cisaillement sur deux sections Il en résulte, comme :

$$(n_A^B \times \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant \Omega_3, \qquad \text{que}$$

$$n_B^C \times \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant \frac{\Omega_1}{2}.$$

Le nombre de rivets compris entre deux joints devra donc être tel que leur section soit les cinq quarts de la moitié de la semelle la plus forte.

S'il y a plus de trois semelles, nous retombons pour les autres sur la disposition en escalier.

Si nous avons à réunir trois semelles égales de section Ω, l'espacement minimum des joints sera donné par le nombre de rivets

$$n_B^C = \frac{\Omega \times 5}{2\pi d^2};$$

en portant cette valeur dans l'équation (1) nous aurons

$$\Omega_j \geqq \frac{3}{2}\Omega \qquad \text{alors}$$

$$n_A^B = n_D^E = \frac{5\Omega}{\pi d^2} \qquad \text{et}$$

$$n_B^C = n_C^D = \frac{5\Omega}{2\pi d^2},$$

et le nombre total des rivets sera de $15\,\Omega : \pi d^2$, tandis qu'il serait de $20\,\Omega : \pi d^2$ si le couvre-joint avait même section qu'une semelle ; cette solution est celle qui exige le moindre nombre de rivets.

Remarquons qu'elle en exige moins que la disposition en escalier, car pour celle-ci, et dans le même cas, il en faudrait $16\,\Omega : \pi d^2$.

(*c*) **Joint en escalier à double couvre-joint** (fig. 512). — Dans le cas où les semelles d'une poutre sont très larges, on peut placer un couvre-joint de chaque côté dans l'espace restant entre les cornières et le bord de la semelle ; on a ainsi un couvre-joint AE extérieur à la poutre, et un couvre-joint intérieur A'E' formé de deux parties égales, une de chaque côté de la poutre.

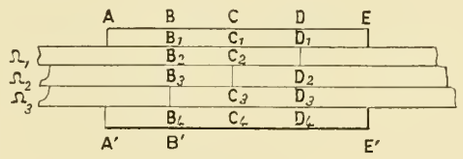


Fig. 512

La rupture suivant $A'B_4B_3C_3C_2D_2D_1E$ nous amène à la condition

$$(n_A^B + n_B^C + n_C^D + n_D^E)\frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$$

qui, comparée à la condition (3) trouvée dans le cas du couvre-joint simple, montre que le nombre total des rivets sera moindre si l'on emploie un couvre-joint double.

La rupture AB_1B_4A' donne la condition

$$2n_A^B \times \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} \geqslant \Omega_3, \qquad \text{d'où}$$

$$n_A^B \geqslant \frac{5\Omega_3}{2\pi d^2},$$

soit moitié moins que dans le cas du couvre-joint simple, en supposant que le nombre des rivets sur les deux couvre-joints, intérieur et extérieur, est le même.

Sinon, c'est la somme des sections de rivets résistant au cisaillement sur les deux couvre-joints entre le point A et le point B, que l'on doit prendre au moins égale à $\Omega_3 \times 5/4$. La rupture suivant un joint en BB' amène à la condition

que la somme des sections des deux couvre-joints extérieur et intérieur doit égaler la section de la plus forte semelle.

Si l'on considère la rupture $B'B_3C_3C$, elle nous donne la condition

$$n_B^C \times \frac{4}{5}\pi\frac{d^2}{4} + \Omega_j \geqslant \Omega_3 + \Omega_2$$

Ω_j étant la section totale des couvre-joints égale à la plus forte semelle, il en résulte que

$$n_B^C \geqslant \frac{\Omega_3 \times 5}{\pi d^2}.$$

Le nombre de rivets entre deux joints sera double du nombre de rivets compris entre un joint et l'extrémité du couvre-joint.

Si toutes les semelles sont égales entre elles, le nombre total des rivets à employer sera de $15\,\Omega : \pi d^2$ comme dans le cas du joint croisé à couvre-joint simple ; mais la somme des sections des couvre-joints n'est que Ω, tandis qu'elle est $3/2\,\Omega$ dans le cas du joint croisé.

(*d*) **Joint croisé à double couvre-joint.** — C'est le mode d'assemblage des semelles qui nécessite le moindre nombre de rivets, et qui permet aux efforts de se transmettre de la façon la meilleure. (Mêmes calculs qu'au n° 525-*b*.)

Considérons toujours le cas de trois semelles ; si nous donnons encore aux couvre-joints une section totale égale aux 3/2 de la semelle la plus forte, il suffira de placer entre deux joints un nombre de rivets donnant une section égale aux cinq huitièmes de la section de la plus forte semelle ; le nombre des rivets compris entre un joint extrême et l'extrémité du couvre-joint sera encore moitié moindre que celui des rivets compris entre deux joints.

Si le nombre des rivets n'est pas le même sur les deux couvre-joints, intérieur et extérieur, la somme des sections des rivets résistant au cisaillement entre un joint extrême et l'extrémité du couvre-joint devra être égale aux cinq seizièmes de la section de la plus forte semelle

§ 6. — Boulons et chevilles

526. **Dimensions des boulons.**

Lorsqu'un boulon relie deux pièces qui tendent à se séparer par glissement, l'effort d'extension auquel il est soumis par le serrage de l'écrou doit développer entre les deux pièces serrées par le boulon un frottement capable de faire équilibre à l'effort qui tend à produire le glissement.

Soit P l'effort de glissement qui agit perpendiculairement à l'axe du boulon, et soit φ le coefficient de frottement des deux surfaces en contact ; nous devons avoir pour la valeur de l'effort d'extension développé par le serrage de l'écrou $F = P : \varphi$.

Dans les ouvrages métalliques φ est en général supérieur à 0,20 pour des surfaces non-polies ni lubréfiées, mais bien rabotées ; il peut atteindre pour des surfaces brutes, telles que des tôles, la valeur 0,50 et même 0,60.

On limite à 4 k. par millimètre carré l'effort d'extension que peut supporter un boulon, de manière que le serrage de l'écrou puisse se faire facilement ; le coefficient de frottement de l'écrou sur la vis est de 0,12 environ, les surfaces étant assez polies, mais non graissées ; la pression sur les surfaces en contact pourra donc facilement atteindre 6 k. par millimètre carré.

On peut même dans certains cas, graisser les filets de la vis, pour obtenir le serrage maximum.

Le diamètre d'un boulon se calculera par la formule que nous ne démontrerons pas

$$d = 0{,}0008\sqrt{F},$$

qui donne au boulon une section telle que le noyau de la partie filetée supporte 3 k. par millimètre carré de section.

Les dimensions adoptées pour le boulon et son écrou, sont les suivantes :

Diamètre du noyau $d' = 0{,}8\,d$.

Tête. — Diamètre du cercle inscrit $D = 1{,}7\,d$.

— Hauteur $h = 0{,}75\,d$.

Ecrou. — Diamètre du cercle circonscrit $D' = 2\,d$.

— Hauteur $h' = d$ ou $1{,}2\,d$

Les boulons employés en construction ont ordinairement des diamètres compris entre $0^m{,}012$ et 0,030. Lorsque le calcul amène à des diamètres plus grands que 0,030, il vaut mieux prendre deux ou trois boulons au lieu d'un.

Lorsque les pièces reliées par des boulons doivent pouvoir prendre, sous l'influence des changements de température, des déplacements dans une direction perpendiculaire à l'axe du boulon, il faut, pour éviter que le boulon soit cisaillé, ovaliser les trous dans la direction du mouvement prévu. Tel est le cas des éclisses de rails.

M. **Résal** conseille, dans des cas analogues, de régler la tension du boulon en intercalant un ressort entre sa tête et l'une des pièces.

Remarque. — Si un boulon doit résister à la fois à un effort de traction et à un effort de glisement, il faut le calculer en tenant compte de ces deux efforts.

Soit F_1 l'effort de traction auquel il est soumis, son diamètre sera donné par la formule

$$d = 0{,}0008\sqrt{F + F_1}.$$

Enfin si un boulon doit supporter un effort de torsion, T étant cet effort appliqué à l'extrémité du rayon du noyau, on le calcule par la formule $d = 0{,}00045\sqrt{T}$.

Si de plus ce boulon doit supporter un effort de traction F_1 son diamètre sera

$$d = 0{,}0008 \sqrt{F_1 + 0{,}3T}.$$

527. **Dimensions des chevilles.** — Dans toutes les constructions dites articulées, on emploie, pour former les articulations, des boulons qui ne travaillent qu'au cisaillement et à la flexion et qu'on peut désigner plus particulièrement sous le nom de *chevilles*.

Les chevilles s'engagent dans des trous circulaires de même diamètre, dits *œils*, pratiqués dans les têtes des barres que les chevilles réunissent.

Les barres sont soumises à des efforts d'extension ou de compression dirigés en sens inverse ; il en résulte que la cheville tend à être cisaillée dans la section de contact des barres, en même temps qu'elle est fléchie parce que les efforts égaux et de sens contraire agissant sur les barres sont appliqués dans des sections différentes de la cheville ; la distance de ces sections est égale à la demi-somme des épaisseurs des barres, si celles-ci ont leurs têtes bien en contact (fig. 513).

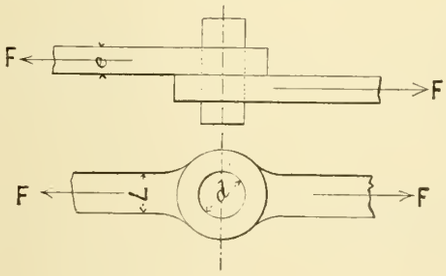


Fig. 513

Si L est la largeur de l'une des barres, e son épaisseur, mesurées dans la partie où la barre est prismatique, le diamètre de la cheville se calcule par la formule empirique

(1) $d = 1{,}9\sqrt[3]{Le^2}$, pour $e = 0{,}4L$ elle donne $d = L$.

Il faut, de plus, vérifier que la pression qui s'exerce entre l'œil de la barre et la cheville ne dépasse pas la résistance de sécurité à l'écrasement ; on doit donc avoir

$$de \geqslant Le,$$

ou

$$d \geqslant L.$$

Il en résulte que si $e \geqslant 0{,}4L$, il faut appliquer la formule (1) ;

Si $e \leqslant 0{,}4L$, il faut prendre $d = L$. Ces formules sont établies en supposant que la cheville est cisaillée suivant une seule section. Si le cisaillement a lieu suivant deux sections, il faut prendre dans la formule au lieu de l'épaisseur e, la moitié seulement, $1/2\,e$, de cette épaisseur (fig. 514).

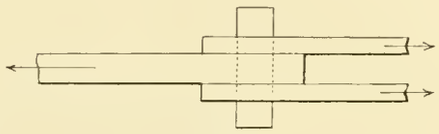


Fig. 514

Si une cheville traverse plusieurs barres de dimensions différentes, il faut lui donner le diamètre le plus grand de ceux qu'on trouve en appliquant successivement le calcul précédent aux différentes barres.

La tête de la barre doit avoir la même épaisseur que le corps de la barre ; on lui donne les dimensions suivantes (fig. 515) ; si la barre est forgée à la presse hydraulique, le contour de la tête est concentrique à l'œil, et on donne au métal l'épaisseur $m = \frac{3}{8}(L + d)$ (fig. I). Si la tête est forgée au marteau, on réduit l'épaisseur dans le sens perpendiculaire à l'axe à $m' = \frac{3}{10}(L + d)$ (fig. II), tandis que

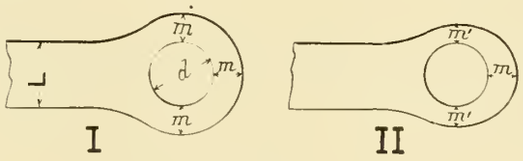


Fig. 515

l'épaisseur dans le sens de la longueur de la barre est $m = \frac{3}{8}(L + d)$. Il n'y a aucune raison théorique d'opérer ainsi ; ces formules sont empiriques.

COMPLÉMENT DE MATHÉMATIQUES

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — **Algèbre.**

Pages

1. Opérations algébriques I
2. Equations ; généralités. II
3. Equations du premier degré. II
4. Equations du second degré III
5. Des quantités négatives IV
6. Questions de maximum et de minimum. VII

CHAPITRE II. — **Notions de trigonométrie.**

1. Mesure et évaluation des angles VIII
2. Lignes trigonométriques IX
3. Théorie des projections XI
4. Addition et multiplication des arcs et des angles XII

CHAPITRE III. — **Notions de géométrie analytique.**

1. Représentation algébrique des lieux géométriques . . . XV
2 à 3. Etude analytique de la ligne droite (coordonnées rectangulaires) XV

Pages

4. Etude analytique du cercle. XVIII
5. Etude analytique de la parabole XX
6. Etude analytique de l'ellipse XXVI
7. Etude analytique de l'hyperbole. XXX

CHAPITRE IV. — **Mécanique générale.**

1. Préliminaires XXXIII
2. Cinématique . . . . . id.
3. Dynamique. XXXVIII
4. Statique. XLI
5. Théorie des couples XLIII
6. Composition et équilibre des forces quelconques appliquées à un solide XLV
7. Centres de gravité XLVI

Tables numériques.

I. Table des nombres de 1 à 1000 L
II. Valeurs de quelques nombres usuels LVI

ERRATUM DU COMPLÉMENT

Pages	Col.	Lignes	Lire :	Au lieu de :
II	2	1e et 2e en bas	$x = k$	$x' = k$
IV	2	32	$3x^2 - 24x + 45 = 0$	$3x^2 - 24x + 135 = 0$
V	1	21	second	premier
Id.	id.	22	premier	second
XIII	2	figure 25-II	la droite Cc doit être en pointillé et son prolongement au delà du point C doit être supprimé.	
XVI	2	13 en bas	$Ax + By = C$	$Ax + Bx = C$
XVII	2	10 en bas	$A'x + B'y = C'$	$A'x + B'y + C'$
XVIII	2	14 en bas	rétablir une parenthèse entre le signe + et y	
Id.	id.	12 en bas	$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0$	$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y^2 - R^2 = 0$
XXIII	1	fig. 51 à droite	L'	L
XXIV	1	6	§ c	§ d
XXVI	1	23	$A'F' + A'F = 2a$	$A'F' + AF' = 2a$
XXVIII	2	9	O'B'	OB'
XXIX	2	fig. 66 à gauche	La lettre D oubliée sur l'ellipse.	
Id.	id.	fig. 67 à droite	La lettre C oubliée sur la courbe AB, la lettre C' sur la courbe ab	
XXX	2	11 en bas	$-a^2b^2 = a^2y^2 - b^2x^2$	$-a^2b^2 = a^2y^2b - 2x^2$
XXXI	2	15 en bas	$Qq' = mN = x'$	$Qq' = mN = x$
XLV	2	21 en bas	OY	oY
XLVI	2	21	ZOY	ZoY
Id.	2	22	ZOX	ZoX

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

CHAPITRE I

ALGÈBRE

§ 1. — Opérations algébriques

1. Préliminaires.

L'algèbre a pour but la *simplification* et la *généralisation* des questions sur les nombres.

La simplification résulte de l'emploi des *signes* pour indiquer les opérations, et des *lettres* pour désigner les nombres ; la généralisation résulte de l'emploi des *lettres* pour représenter les nombres.

On appelle *expression algébrique* un ensemble de lettres et de signes indiquant les opérations à effectuer sur les nombres représentés par les lettres.

Une expression algébrique qui ne contient aucune indication d'addition ou de soustraction s'appelle un *monôme*. Exemple : $\frac{2a^3b^2c}{d^2}$. Le facteur numérique (ici 2), qu'on écrit toujours le premier, se nomme *coefficient*.

Deux *monômes semblables* sont ceux qui ne diffèrent que par leurs coefficients. Exemple : $7a^3b^2$ et $3a^3b^2$.

Une expression composée de plusieurs monômes séparés par les signes $+$ et $-$ est un *polynôme*, et les monômes qui le forment s'appellent ses *termes*.

La *valeur numérique* d'une expression algébrique, pour des valeurs particulières attribuées aux différentes lettres qui y entrent, est le nombre qu'on obtient en remplaçant les lettres par leur valeur et effectuant ensuite *arithmétiquement*, sur les nombres ainsi mis à la place des lettres, les opérations indiquées par les signes.

Une expression algébrique a, en général, une *infinité de valeurs numériques* qui dépendent des valeurs attribuées aux lettres qui la composent.

Deux expressions algébriques sont dites *équivalentes* lorsque, en remplaçant dans les deux expressions chaque lettre par une *même valeur numérique*, choisie d'ailleurs arbitrairement, les valeurs numériques obtenues pour ces expressions sont *toujours* égales entre elles. Exemples :

$(a+b)^2$ et $a^2+2ab+b^2$, sont deux expressions équivalentes,

$(a+b)(a-b)$ et a^2-b^2 sont aussi deux expressions équivalentes.

2. Opérations algébriques.

Les opérations algébriques ont pour but la *transformation* des expressions algébriques en d'autres expressions équivalentes ; elles ont donc pour objet l'étude des lois de l'équivalence des expressions algébriques.

(*a*) **Addition de deux ou plusieurs polynômes.** — 1° *Opération directe.* — Elle a pour but de trouver un polynôme unique équivalent à la *somme* de plusieurs polynômes.

$$(a+b+c)+(f-g+h)+(k-l-m)=a+b+c+f-g+h+k-l-m$$

Règle. — On obtient le polynôme unique en écrivant à la suite les uns des autres et *sans changer leurs signes* tous les termes des polynômes donnés.

2° *Opération inverse.* — Elle a pour objet, étant donné un polynôme unique, de le décomposer en un certain nombres d'autres à la somme desquels il soit équivalent

$$a+b-c+d-f-g+h=(a+b-c)+(d-f-g)+h.$$

Règle. — On écrit, entre parenthèses, sans changer les signes des termes, les divers polynômes qu'on veut former et on sépare ensuite ces parenthèses par le signe $+$.

(*b*) **Soustraction de deux polynômes.** — 1° *Opération directe.* — Elle a pour but de trouver un polynôme unique équivalent à la *différence* de deux polynômes.

$$(a+b-c)-(f+g-h)=a+b-c-f-g+h.$$

Règle. — On obtient le polynôme unique en écrivant à la suite des termes du premier polynôme, *mais en changeant leurs signes*, tous ceux du second.

2° *Opération inverse.* — Elle a pour but, étant donné un polynôme unique, de le décomposer en deux autres dont la différence lui soit équivalente.

$$a+b-c+f-g+h=a+b-c-(-f+g-h).$$

Règle. — On écrit dans une même parenthèse, *précédée du signe moins*, tous les termes que l'on veut ainsi isoler, mais *après avoir changé tous leurs signes*.

(*c*) **Multiplication.** — I. **Multiplication d'un polynôme par un monôme.** — 1° *Opération directe.* — Elle a pour but de trouver un polynôme unique qui soit équivalent au *produit* du polynôme par le monôme.

Règle. — On obtient ce polynôme unique en lui donnant pour termes les produits successifs de chaque terme du polynôme par le monôme, et les affectant du signe donné par *la règle des signes* qui est la suivante.

Le produit de deux termes de *même signe* doit être précédé du signe *plus* ; le produit de deux termes de *signes contraires*, du signe *moins*.

2° *Opération inverse.* — Dans un polynôme mettre un terme en *facteur commun*.

Règle. — On ouvre une parenthèse qu'on fait précéder du terme à mettre en facteur commun, *affecté du signe plus* ; dans cette parenthèse on écrit tous les termes du polynôme en leur conservant leur signe, et après en avoir enlevé le terme mis en facteur.

Remarque. — Si l'on écrivait en dehors de la parenthèse le terme à mettre

en facteur *avec le signe moins*, il faudrait, dans la parenthèse, changer les signes de tous les termes

$$ab + ac - ah - ag = a(b + c - h - g) = -a(-b - c + h + g).$$

II. **Multiplication de deux polynômes.** — 1° *Opération directe.* — Elle a pour but de trouver un polynôme unique équivalent au *produit* des deux polynômes donnés.

Règle. — Pour obtenir ce polynôme unique on multiplie successivement le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur et on écrit à la suite les uns des autres tous les termes ainsi obtenus, en observant la règle des signes.

2° *Opération inverse.* — Elle consiste à trouver deux polynômes dont le produit soit égal à un polynôme donné ; c'est la **division algébrique.**

(*d*) **Carré d'un binôme.** — 1° *Opération directe.*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Le résultat de cette opération est un trinôme.

2° *Opération inverse.* — Reconnaître si un trinôme est un carré parfait.

Règle. — Lorsqu'un trinôme est un carré parfait, le premier et le troisième termes sont tous deux positifs ; le deuxième terme est égal au produit (affecté du signe + ou du signe —) de la racine carrée du premier terme par la racine carrée du troisième.

Ex. : $a^2 - 12ab + 36b^2$ est équivalent à $(a - 6b)^2$.

(*e*) **Produit de la somme de deux expressions par leur différence.** — 1° *Opération directe.* — $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$.

2° *Opération inverse.* — La différence de deux quantités positives peut toujours être considérée comme le produit de la somme de leurs racines carrées par la différence de ces mêmes racines carrées.

Exemple : A et B étant positifs, on a toujours

$$A - B = (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}).$$

(*f*) **Division de deux expressions algébriques.** — Elle consiste à chercher (s'il existe), un polynôme qui, multiplié par l'expression *diviseur* produise une expression équivalente à l'expression *dividende*.

On appelle *fraction* le *quotient indiqué* de la division de deux expressions algébriques.

Le dividende s'écrit en numérateur, le diviseur s'écrit en dénominateur.

Nota. — N'ayant pas à nous servir de la division algébrique, nous n'en parlerons pas.

§ 2. — Equations

3. Des égalités en algèbre.

(*a*) **Les identités et les équations.** — Une *égalité* est la réunion par le signe égal (=) de deux expressions algébriques.

Une *identité* est une égalité dont les deux membres sont des expressions algébriques équivalentes.

Toutes les égalités qui réunissent des opérations algébriques, directes ou inverses, sont donc des identités.

Une *équation* est une égalité qui ne se transforme en identité que pour *certaines* valeurs, arithmétiques ou algébriques, attribuées à *certaines* lettres.

Ces lettres représentent les *inconnues* de l'équation ; on choisit ordinairement pour désigner les inconnues les lettres telles que x, y, z, u... qui sont à la fin de l'alphabet.

Les valeurs particulières des inconnues qui transforment l'équation en identité sont dites les *racines de l'équation*.

(*b*) **De l'équivalence de deux équations.** — Deux équations sont dites *équivalentes* lorsqu'elles admettent les mêmes racines.

Théorème I. — Si l'on ajoute une expression algébrique (même contenant l'inconnue) aux deux membres d'une équation, la nouvelle équation ainsi obtenue est équivalente à la première.

Conséquence. — On peut faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre membre, à la condition de changer son signe.

Théorème II. — Si l'on multiplie les deux membres d'une équation par une même expression algébrique, *ne renfermant pas l'inconnue*, on obtient une équation équivalente à la première.

Mais si l'expression par laquelle on a multiplié renferme l'inconnue, la nouvelle équation obtenue admet comme racines, *en plus de celles de l'équation proposée*, celles de l'équation qu'on formerait *en égalant à zéro l'expression* par laquelle on a multiplié les deux membres de l'équation primitive.

Conséquence. — On peut faire passer en numérateur dans un membre une expression qui est en dénominateur dans l'autre (cela s'appelle *chasser le dénominateur*) et inversement.

4. Des systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

(*a*) **Définitions.** — On appelle *racines* d'un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues les expressions algébriques ou les valeurs numériques qui, mises à la place des inconnues dans *chacune* des équations du système, les transforment en identités.

Pour qu'un système admette des racines déterminées, il faut :

1° Qu'il renferme autant d'équations que d'inconnues ;

2° Qu'aucune des équations ne soit une conséquence des autres. (Une équation est une conséquence de plusieurs autres lorsqu'elle est obtenue au moyen de ces équations par l'une des combinaisons permises indiquées ci-après.) [Voir (*b*)].

(*b*) **De l'équivalence des systèmes d'équations.** — Deux systèmes d'équations à plusieurs inconnues sont dits *équivalents* lorsqu'ils admettent les mêmes racines.

1re *règle d'équivalence.* — Etant donné un système de *n équations à n inconnues*, si de l'une de ces équations, la première par exemple, on tire la valeur d'une inconnue en fonction de toutes les autres, et qu'on substitue cette valeur dans les $(n - 1)$ autres équations, on obtient $(n - 1)$ équations nouvelles ; le nouveau système formé de la première équation donnée et des $(n - 1)$ équations nouvelles est équivalent au premier système donné.

2e *règle d'équivalence.* — Si dans un système de *n équations à n inconnues* on multiplie séparément un certain nombre d'équations par des coefficients λ, λ', λ'', etc., positifs ou négatifs, et que l'on ajoute membre à membre ces équations ainsi transformées, on obtient une nouvelle équation qui, dans le premier système, peut être substituée à l'une quelconque de celles qui l'ont fournie par leur combinaison.

§ 3. — Equations du premier degré

5. Equations du premier degré à une inconnue.

(*a*) **Définitions.** — Le *degré d'une équation* est indiqué, s'il n'y a qu'une inconnue, par le plus haut exposant de l'inconnue dans cette équation, et, s'il y a plusieurs inconnues, par la somme la plus grande des exposants des inconnues dans un même terme (à la condition que les inconnues n'entrent pas en dénominateur).

(*b*) **Résolution des équations du premier degré à une inconnue.** — 1° On chasse d'abord les dénominateurs, s'il y en a ; 2° on fait passer dans un membre tous les termes renfermant l'inconnue que l'on met alors en facteur : 3° dans l'autre membre on fait passer tous les termes ne la renfermant pas ; 4° on divise ensuite le second membre par le facteur de l'inconnue, de manière à amener l'équation à la forme $x' = k$.

La solution évidente, c'est-à-dire la *racine* de l'équation, est $x' = k$.

6. **Résolution d'un système de n équations du 1er degré à n inconnues.**

(*a*) **Elimination d'une inconnue entre n équations.** — Eliminer une inconnue entre n équations, c'est remplacer ce système de n équations à n inconnues par un nouveau système de n équations à n inconnues équivalent au précédent, mais dans lequel $(n-1)$ des équations ne contiennent plus l'inconnue à éliminer.

(*b*) **Principe de la méthode de résolution.** — Les deux procédés soit de *substitution*, soit de combinaison par *multiplication et addition* indiqués plus haut (v. n° 3-*b*) sont employés pour remplacer le premier système donné par des systèmes équivalents dont la forme est la suivante :

1er Système.	*2e Système.*	*3e Système.*
$f(x.y.z)=0$	$f(x.y.z)=0$	$f(x.y.z)=0$
$f_1(x.y.z)=0$	$\varphi(x.y)=0$	$\varphi(x.y)=0$
$f_2(x.y.z)=0$	$\varphi_1(x.y)=0$	$F(x)=0.$

Dans le deuxième système, z est éliminé ; dans le troisième c'est y.

Dans ce dernier système, x entre dans une équation à une seule inconnue d'où on le tire facilement comme il est dit plus haut ; on substitue sa valeur dans $\varphi(x, y)=0$ qui devient à son tour une équation à une seule inconnue en y ; on en tire la valeur de y qu'on substitue en même temps que celle de x dans l'équation $f(x, y, z)=0$; celle-ci devient alors équation à une seule inconnue z, d'où l'on tire la valeur de cette inconnue.

7. **Résolution du système de deux équations du 1er degré à deux inconnues,**

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Je multiplie la première par $(-a')$, la seconde par $(+a)$; il vient :

$$-(aa'x+ba'y)=-a'c$$
$$aa'x+ab'y=ac'.$$

Ajoutant membre à membre, on a

$$ab'y-ba'y=ac'-ca'$$

ou

$$y(ab'-ba')=ac'-ca',$$

d'où

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Pour obtenir x, on opère d'une manière analogue, en multipliant la première équation par $(+b')$ et la deuxième par $(-b)$ et ajoutant membre à membre, on obtient finalement

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Remarquer la manière dont sont formés ces deux valeurs de x et de y ; remarquer aussi qu'elles ont le même dénominateur.

§ 4. — Equations du second degré

8. **Formules préliminaires d'identité.**

(*a*) **Rappel des formules d'identité.** — On a identiquement (v. n° 2)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$M^2-N^2=(M+N)(M-N)$$

et si A et B sont positifs,

$$A-B=(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B}).$$

(*b*) **Annulation d'une expression algébrique.** — 1° Pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux facteurs soit nul.

Ainsi $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ entraîne

$x-\alpha=0$ qui donne $x=\alpha$

ou $x-\beta=0$ qui donne $x=\beta$.

2° La somme de deux carrés ne peut jamais être nulle, puisqu'un carré est toujours positif, à moins que chacun d'eux ne soit séparément nul.

3° La différence de deux carrés peut être nulle, s'ils sont égaux.

(*c*) **Problème. — Compléter un carré.**

$$(1)\qquad x^2+px=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$$

$$(2)\qquad x^2-px=x^2-2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}.$$

Si le terme en x^2 a un coefficient, on le met en facteur et on opère de même comme l'indiquent les identités suivantes :

$$(3)\qquad ax^2+bx=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$(4)\qquad ax^2-bx=a\left(x^2-\frac{b}{a}x\right)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right].$$

(*d*) **Transformation du trinôme du second degré.** — Amener le trinôme du second degré $y=x^2+px+q$ à se présenter sous la forme *d'une somme ou d'une différence de deux carrés* et, dans ce dernier cas, l'amener à la forme d'un *produit de deux facteurs du premier degré*.

Il faut opérer comme suit :

1° Compléter le carré.

$$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

1re *Hypothèse.* $\frac{p^2}{4}-q>0.$

Le trinôme se ramène dès lors à une différence de deux carrés

$$\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{M^2}-\underbrace{\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2}_{N^2}.$$

On a alors $M^2-N^2=(M+N)(M-N)$; c'est-à-dire :

$$(5)\qquad y=\left[x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]\left[x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right].$$

2e *Hypothèse.* $\frac{p^2}{4}-q<0.$

Le trinôme est alors équivalent à une somme de deux carrés, et on ne peut pas l'amener à la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.

9 **Résolution de l'équation $x^2+px+q=0$.**

On amène le trinôme à être une somme ou une différence de deux carrés comme il a été indiqué ci-dessus ; dès lors :

1er *Cas.* — Si $\frac{p^2}{4}-q<0$ c'est une somme de deux carrés qui ne peut jamais s'annuler. L'équation n'est donc pas résoluble ; on dit alors que ses *racines sont imaginaires*.

2e *Cas.* — Si $\frac{p^2}{4}-q>0$ c'est une différence de deux carrés ; le trinôme peut s'annuler, il a des *racines réelles*. On le transforme alors en un produit de deux facteurs du premier degré, comme l'indique la formule (5) ci-dessus :

$$\left[x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]\left[x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]=0$$

qui s'annule pour

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0 \\ x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x''=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \end{array}\right.$$

x' et x'' sont les expressions des deux racines.

10. Somme et produit des racines.

Le trinôme $x^2+px+q=y$ peut donc s'écrire

$$y=(x-x')(x-x'')$$

développant, cela donne :

$$y=x^2-(x'+x'')x+x'x''.$$

Donc, en identifiant avec la première expression $y=x^2+px+q$, c'est-à-dire en écrivant que les coefficients des termes semblables des deux expressions sont égaux, on en déduit

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} p=-(x'+x'') \\ q=x'x''. \end{array}\right.$$

Ce qu'on peut vérifier directement au moyen des valeurs des racines :

$$x'+x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=-p.$$

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

$$=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

11. Problème.

Trouver deux nombres x et y connaissant leur somme $x+y$ et leur produit xy.

Posons $x+y=-p$ et $xy=q$, léquation

$$X^2+pX+q=0$$

donnera pour racines les deux nombres cherchés.

Exemple. — Soit $x+y=7$ et $xy=12$;

posons : $p=-7$ et $q=12$.

L'équation $X^2-7X+12=0$ donne

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}-12}=4 \\ y=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}-12}=3. \end{array}\right.$$

12. Etude du trinôme $y=ax^2+bx+c$.

Problème. — Transformer ce trinôme en une *somme ou une différence de deux carrés* et, dans ce dernier cas, l'amener à la forme d'un *produit de deux facteurs du premier degré.*

On opère comme suit :

1° On met le coefficient a de x^2 en facteur

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

2° Dans la parenthèse, on complète le carré

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right].$$

Réduisant les deux derniers termes au même dénominateur, et les enfermant dans une même parenthèse précédée du signe moins, il vient

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]; \qquad \text{dès lors :}$$

1er Cas. — Si $b^2-4ac>0$.

La parenthèse est une différence de deux carrés et peut s'écrire :

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

et se transformer en un produit de deux facteurs, savoir :

$$y=a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

2e Cas. — Si $b^2-4ac<0$.

La parenthèse se ramène à une somme de deux carrés et ne peut jamais être mise sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.

13. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

(*a*) **Cas général.** — On amène le trinôme à la forme d'une somme ou d'une différence de deux carrés, comme il vient d'être dit ci-dessus ; dès lors :

1er Cas — Si $b^2-4ac<0$, c'est une somme de deux carrés qui ne peut jamais s'annuler ; l'équation n'est pas résoluble, ses *racines* sont *imaginaires.*

2e Cas. — Si $b^2-4ac>0$, c'est une différence de deux carrés qui peut être transformée en un produit de deux facteurs du premier degré.

$$a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0$$

qui s'annule pour :

$$\left\{\begin{array}{l} x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \\ x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \end{array}\right. \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{array}\right.$$

L'équation a deux *racines réelles*

(*b*) **Cas particulier où b est pair.** — On pose alors $b=2b'$ et si $b'^2-ac>0$, les racines deviennent

$$x'=\frac{-b'-\sqrt{b'^2-ac}}{a},$$

$$x''=\frac{-b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

Exemple. — Résoudre l'équation $3x^2-24x+135=0$.

Les racines sont
$$\left\{\begin{array}{l} x'=\frac{+12-\sqrt{144-135}}{3}=3, \\ x''=\frac{+12+\sqrt{144-135}}{3}=5. \end{array}\right.$$

§ 5. — Des quantités négatives

14. Interprétation des quantités négatives.

Lorsque l'équation qui est la traduction algébrique de l'énoncé d'un problème fournit une *racine négative*, cette racine négative *n'ayant par elle-même aucune signification*, le problème, tel qu'il est posé, est *impossible*. Cependant, cette impossibilité peut tenir à la manière dont le problème est posé, et on peut souvent, en modifiant légèrement l'énoncé, arriver à *interpréter la racine négative* que l'on a trouvée. Cette interprétation repose sur la remarque suivante :

Lorsqu'une équation en x admet une racine négative, cette même racine, prise positivement, satisfait à l'équation qu'on obtient en changeant dans la première équation x en $(-x)$.

Cela conduit tout naturellement, lorsqu'une grandeur peut être comptée dans deux sens différents, à placer *le signe* + *ou le signe* — devant le nombre qui exprime la mesure de cette grandeur suivant qu'elle est comptée *dans un sens ou dans l'autre.*

De cette interprétation de convention résulteront des généralisations importantes ainsi que nous allons le montrer.

15. Position d'un point sur une droite fixe ou axe (1).

(*a*) **Abscisse d'un point** (fig. 1). — La position d'un point M sur une droite fixe, qu'on appellera un *axe*, sera déterminée si l'on connaît la distance qui sépare, sur cet axe, le point M d'un point fixe O de l'axe pris pour *origine*, et si l'on sait de quel côté du point O, à droite ou à gauche, doit être placé le point M.

On conviendra de considérer cette distance comme *positive* si elle est portée de gauche à droite, et comme négative si elle est portée de droite à gau-

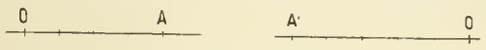


Fig. 1

che ; cette distance, *prise avec son signe*, s'appellera *l'abscisse* du point M ; nous la désignerons par la lettre x.

Ainsi le point A a pour abscisse $x = OA = +4$.

Le point A′ a pour abscisse $x = OA' = -5$.

(*b*) **Segments comptés sur une droite** (fig. 2). — Un segment AB

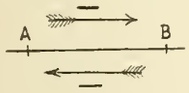


Fig. 2

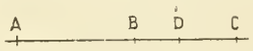


Fig. 3

d'une droite peut être considéré comme un *cheminement* accompli sur cette droite par un *mobile* qui irait du point A au point B.

Le cheminement sera *positif* s'il est parcouru dans *le sens* AB et *négatif* s'il est parcouru dans le *sens* BA inverse du premier.

On a donc $BA = -AB$

et $AB + BA = 0$.

(*c*) **Segments consécutifs** (fig. 3). — Deux segments sont dits *consécutifs* lorsque le point de départ du premier est le point d'arrivée du second.

Exemple (fig. 3). AB, BC, CD sont des segments consécutifs.

(*d*) **Résultante de plusieurs segments consécutifs** (ou cheminements successifs). — On nomme ainsi le segment (ou cheminement) parcouru en allant directement du *point de départ* du premier segment au *point d'arrivée* du dernier.

Ainsi AD est la résultante des segments consécutifs AB, BC et CD (fig. 3).

(*e*) **Théorème des segments**. — La résultante d'une série de segments consécutifs portés sur un axe est toujours égale à la somme algébrique de ces segments.

On dit qu'une somme est algébrique lorsque les quantités qui y figurent comportent avec elles leurs signes. Ainsi dans la somme suivante une quelconque des quantités $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, pourrait être positive ou négative, c'est-à-dire représenter aussi bien $+6$ que -5 ou que -2 ; alors si $BC = (-5)$, lorsque l'on écrira $+BC$, cela fera $+(-5)$, c'est-à-dire en définitive -5.

Cela posé, je dis que l'on aura toujours : $AD = AB + BC + CD$.

1° Démonstration pour le cas de deux segments.

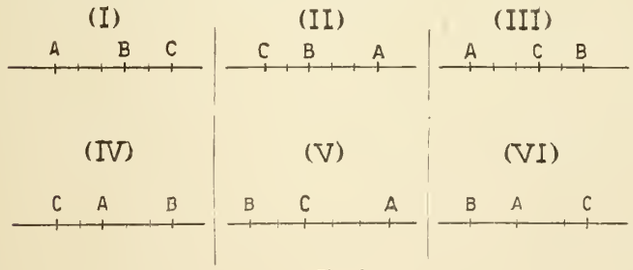


Fig. 4

Les six cas suivants peuvent, seuls, se présenter (fig. 4).

1er Cas (fig. I)	*2e Cas* (fig. II)	*3e Cas* (fig. III)
$AB = +3$, $AC = +5$	$AB = -3$, $AC = -5$	$AB = +5$, $AC = +3$
$BC = +2$, $AB + BC = +5$	$BC = -2$, $AB + BC = -5$	$BC = -2$, $AB + BC = +3$
4e Cas (fig. IV)	*5e Cas* (fig. V)	*6e Cas* (fig. VI)
$AB = +3$, $AC = -2$	$AB = -5$, $AC = -3$	$AB = -2$, $AC = +3$
$BC = -5$, $AB + BC = -2$	$BC = +2$, $AB + BC = -3$	$BC = +5$, $AB + BC = +3$.

2° Démonstration pour le cas de plusieurs segments.

Si on suppose le théorème vrai pour m segments, on fait voir qu'il l'est pour un de plus ; on peut en effet remplacer les m premiers segments par leur résultante, ce qui ramène au cas de deux segments. Le théorème peut donc être étendu de deux segments à trois, puis à quatre, etc., et en général à un nombre quelconque de segments. Le théorème est donc général.

(*f*) **Changement d'origine sur une droite.** — Soit O l'origine primitive (fig. 5), et soit $OM = x$ l'abscisse du point M.

Soit O′ la nouvelle origine, dont l'abscisse par rapport à l'ancienne est $OO' = x_1$; et soit l'abscisse $O'M = x'$ du point M par rapport à cette nouvelle origine.

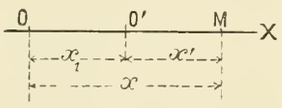


Fig. 5

Les cheminements OO′ et O′M étant consécutifs, on aura toujours, et quels que soient les signes de x et de x_1

$$OM = OO' + O'M$$

ou

$$x = x_1 + x'.$$

16. Position d'un point dans un plan.

(*a*) **Axes de coordonnées** (fig. 6). — Pour fixer la position d'un point M dans un plan, on trace deux droites fixes XX′ et YY′, se coupant au point O ; on mène par le point M des parallèles à ces deux droites

Soit m le point où la parallèle à YY′ rencontre XX′ et soit m' celui où la parallèle à XX′ rencontre YY′.

La position du point M sera déterminée si l'on connaît la distance Om et la distance Om'.

Ces deux longueurs, prises avec leur signe, sont appelées les *coordonnées* du point M ; la première Om s'appelle l'*abscisse* ; on la représente par x et on la compte *positivement dans le sens* OX, *négativement dans le sens* OX′ ; la seconde Om' s'appelle l'*ordonnée* ; on la représente par y et on la compte *positivement dans le sens* OY, *négativement dans le sens* OY′.

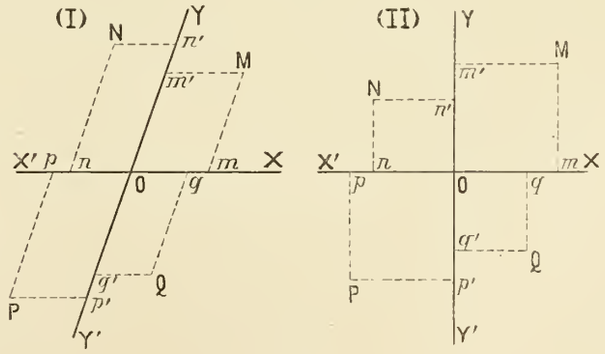


Fig. 6

Les deux droites XX′, YY′ s'appellent *l'axe des* x et l'*axe des* y, et plus généralement, *les axes de coordonnées* ; leur point de rencontre O est *l'origine des coordonnées*.

Ces axes peuvent être *rectangulaires* (fig. II) ou *obliques* (fig. I.)

(1) Les paragraphes 15 et suivants peuvent être considérés comme une introduction à la géométrie analytique.

Remarquons que l'on a toujours

$$mM = Om' \qquad \text{et} \qquad m'M = Om.$$

Suivant qu'un point sera placé dans l'un des quatre angles formés par les axes, ses coordonnées auront les signes indiqués par le tableau suivant :

Points	M	N	P	Q
Abscisse	Positive	Négative	Négative	Positive
Ordonnée	Positive	Positive	Négative	Négative

Applications (fig. 7). — 1° Placer le point $x = 2$ $y = 4$. On prend sur l'axe des x la longueur $Om = 2$ dans le sens positif ; on mène par le point m une parallèle à l'axe des y et on prend sur cette parallèle la longueur $mM = 4$ dans le sens positif ; M est le point cherché (fig. 7).

2° Placer le point $x = 3$ $y = -2$. On prend cette fois $On = 3$ sur l'axe OX et dans le sens positif ; on mène par le point n la parallèle à l'axe des y, et on prend sur cette parallèle la longueur $nN = 2$, mais dans le sens négatif ; N est le point cherché.

(*b*) **Déplacement parallèle des axes** (fig. 8).

Les axes primitifs étant OX et OY, le point M a pour coordonnées $Om = x$ et $Om' = y$. Les axes nouveaux sont O_1X_1 et O_1Y, parallèles aux pre-

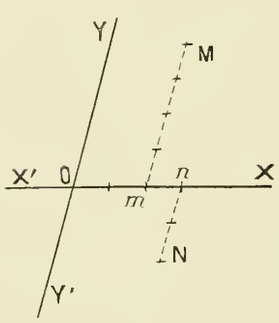


Fig. 7

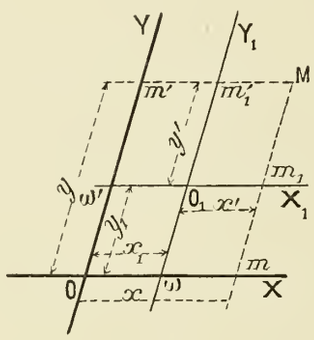


Fig. 8

miers, et tels que la nouvelle origine ait pour coordonnées, par rapport aux anciens axes, $\overline{O\omega} = x_1$ et $\overline{O\omega'} = y_1$. Enfin les coordonnées du point M par rapport aux nouveaux axes sont

$$\overline{O_1m_1} = x' \qquad \text{et} \qquad \overline{O_1m'_1} = y'.$$

On a toujours, d'après le théorème des segments (v. 15-*e*).

$$\overline{Om} = \overline{O\omega} + \overline{\omega m}$$

ou $\overline{Om} = \overline{O\omega} + \overline{O_1m_1}$ ou $x = x_1 + x'$

et de même $\overline{Om'} = \overline{O\omega'} + \overline{\omega' m'}$

ou $\overline{Om'} = \overline{O\omega'} + \overline{O_1m'_1}$ ou $y = y_1 + y'$.

17. Position d'un point dans l'espace.

(*a*) **Axes de coordonnées** (fig. 9 et 10). — On fixe la position d'un point M dans l'espace par rapport à *trois plans coordonnés* XOY, XOZ, YOZ, qui se coupent deux à deux suivant les *trois axes de coordonnées* OX, OY, OZ. Par le point M, on mène trois plans respectivement parallèles aux trois plans coordonnés, et qui recoupent les axes aux points m, m', m''.

Les longueurs $Om = x$, $Om' = y$, $Om'' = z$, prises avec leur signe, sont les trois *coordonnées* du point M.

On convient de compter les coordonnées *positivement suivant* OX, OY et OZ, et *négativement suivant* OX', OY' et OZ'.

Remarquons que la figure formée par les trois plans coordonnés et par les trois plans qui passent par le point M et leur sont parallèles est un parallélipipède. Il en résulte qu'on peut prendre comme coordonnées du point M les trois lignes $Om = x$, $m\mu = y$ et $\mu M = z$.

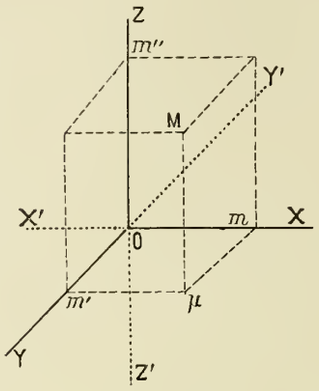


Fig. 9

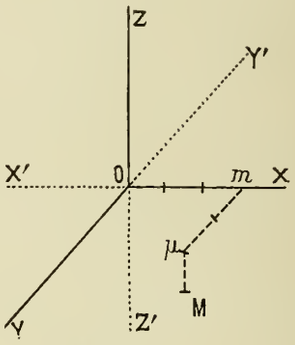


Fig. 10

Nota. — Nous considérons ici les plans coordonnés comme perpendiculaires deux à deux. On dit alors que les coordonnées sont *rectangulaires*.

Application. — Placer le point $x = 3$ $y = 2$ $z = -1$ (fig. 10).

On prend sur OX, dans le sens positif $\overline{Om} = 3$; puis sur la parallèle à OY menée par le point m, et dans le sens positif, la longueur $\overline{m\mu} = 2$; enfin sur la parallèle à OZ menée par μ, et dans le sens négatif, la longueur $\overline{\mu M} = 1$; cela donne en M le point cherché.

(*b*) **Déplacement parallèle des axes de coordonnées** (fig. 11.) — Soient OX, OY, OZ, les anciens axes et $x = Om$, $y = m\mu$, $z = \mu M$, les coordonnées du point M par rapport à ces axes ; soient O_1X_1, O_1Y_1 et

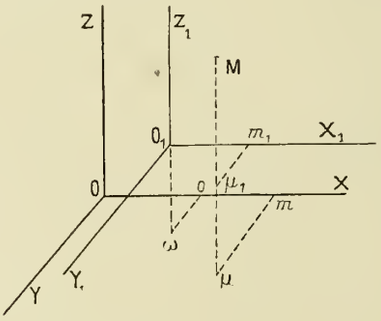


Fig. 11

O_1Z_1 les nouveaux axes parallèles aux anciens et tels que la nouvelle origine O_1 a pour coordonnées, par rapport aux anciens axes, $x_1 = O_0$, $y_1 = \overline{O\omega}$ et $z_1 = \overline{\omega O_1}$;

Enfin soient $x' = \overline{O_1m_1}$ $y' = \overline{m_1\mu_1}$ et $z' = \overline{\mu_1 M}$ les coordonnées du point M par rapport aux nouveaux axes.

Une démonstration analogue à celle qui a été faite, pour le cas de deux axes, montrerait que l'on a toujours, en vertu du théorème des segments,

$$x = x_1 + x'$$
$$y = y_1 + y'$$
$$z = z_1 + z'.$$

§ 6. — Questions de maximum et de minimum

18. Définitions.

On appelle *variable* une quantité qui peut prendre différents états de grandeurs.

Lorsque deux quantités sont liées l'une à l'autre de manière qu'à chaque valeur de l'une d'elles, considérée comme variable, correspond une valeur de l'autre cette seconde quantité est dite *fonction* de la première.

Lorsque la *variable croissant* d'une valeur à une autre, passe par une valeur particulière pour laquelle la *fonction cesse de croître pour décroître*, on dit que pour cette valeur la fonction passe par un *maximum*.

Si au contraire, pour cette valeur, la *fonction cesse de décroître pour croître*, on dit qu'elle passe par un *minimum*.

19. Recherche du maximum ou du minimum d'une fonction.

(*a*) **Maxima ou minima pouvant être trouvés par une méthode élémentaire.** — La recherche des maxima et des minima d'une fonction quelconque est un problème d'algèbre supérieure. Nous pouvons cependant trouver par des moyens élémentaires ce maximum ou ce minimum :

1° Dans le cas où la fonction et la variable sont liées par une équation où la variable n'entre qu'au premier et au second degré ;

2° Dans certains cas particuliers où la fonction dépend de puissances de la variable supérieures au second degré et dans d'autres où la fonction dépend à la fois de plusieurs variables liées entre elles par une relation.

Une *fonction du 1er degré* de la forme

$$y = ax + b$$

est toujours croissante si a est positif, et toujours décroissante si a est négatif ; elle n'a donc *ni maximum ni minimum*.

Une *fonction du 2° degré* de la forme

$$y = ax^2 + bx + c$$

a un maximum ou un minimum, suivant que a est négatif ou positif.

En effet, nous avons vu (n° 12) qu'on peut l'écrire

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Dans la partie entre crochets, la seule quantité variable est $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, qui est essentiellement positive, et dont la plus petite valeur possible est zéro, donnée par $x = -\frac{b}{2a}$.

1er Cas. — a est *positif*.

Alors la valeur $x = -\frac{b}{2a}$ donne pour y un minimum qui est $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Pour toute valeur de x différente de $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ la valeur de y sera plus grande que y_1 ; si on donne à x les valeurs $x = -\frac{b}{2a} + h$ et $x = -\frac{b}{2a} - h$, les valeurs correspondantes de y seront égales entre elles, plus grandes que y_1, et d'autant plus grandes que h sera plus grand ; donc pour la valeur $x = -\frac{b}{2a}$, la fonction cesse de décroître pour croître, et passe bien par un minimum.

2e Cas. — a est *négatif*.

Il faut alors prendre eu signe contraire les valeurs obtenues pour y dans le cas précédent ; lorsqu'on fait $x = -\frac{b}{2a}$ la fonction cesse de croître pour décroître et passe, par suite, par un *maximum*.

(*b*) **Maxima ou minima dépendant d'une équation du 2e degré.**

On commence d'abord par résoudre le problème suivant :

Calculer la valeur que doit prendre la variable x_1 pour que la fonction y prenne une valeur y_1.

L'équation de ce problème étant du second degré, le problème n'est possible que si les racines de l'équation sont réelles.

La condition de réalité des racines dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est

$$b^2 - 4ac \geqq 0.$$

Cette inégalité, dans les termes de laquelle entrera la valeur y_1 qu'on a attribuée à y, pourra se ramener à l'une des formes suivantes :

1° $y_1 \geqq k$ et il y aura un *minimum* qui sera $y_1 = k$, cette valeur étant la plus petite que puisse prendre y pour que le problème soit possible.

2° $y_1 \leqq k$, et il y aura un *maximum* qui sera $y_1 = k$.

(*c*) **Maximum d'un produit de facteurs variables.** — 1° *Théorème I.* — « Le produit de deux facteurs variables, *dont la somme est constante*, est maximum quand ces facteurs sont égaux. »

En effet, soit $a + b = 2k$, quantité constante par hypothèse. Supposons que a et b soient inégaux et que l'on ait $a = k + \alpha$ et par suite $b = k - \alpha$.

Le produit ab sera

$$ab = (k + \alpha)(k - \alpha) = k^2 - \alpha^2.$$

Il est évident qu'il sera maximum lorsque le terme à retrancher α^2 sera nul et alors on aura : $a = b = k$. C. Q. F. D.

2° *Théorème II.* — « Le produit d'un nombre quelconque de facteurs « variables positifs, *dont la somme est constante*, est maximum quand tous « ces facteurs sont égaux. »

En effet, si deux de ces facteurs ne sont pas égaux entre eux, on pourra toujours les remplacer par deux autres qui, tout en ayant la même somme que les deux premiers, seront égaux entre eux : dès lors, le produit de ces deux nouveaux facteurs sera plus grand que celui des deux anciens et le produit final augmentera.

Il en sera de même tant que les facteurs ne seront pas tous égaux entre eux. Donc le maximum aura lieu lorsque tous les facteurs seront égaux. C. Q. F. D.

3° *Théorème III.* — « Le produit de plusieurs facteurs variables positifs « dont la somme est constante, et *qui sont affectés d'exposants*, est maximum « quand ces facteurs sont proportionnels à leurs exposants respectifs. »

Soit $a + b + c = k$ (constante) des facteurs dont la somme, k, est constante ; on demande de trouver le maximum du produit

$$y = a^3b^2c^4.$$

Ce produit peut s'écrire :

$$y = (a \times a \times a)(b \times b)(c \times c \times c \times c).$$

Il sera maximum en même temps que l'expression

$$Z = \left(\frac{a}{3} \times \frac{a}{3} \times \frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{2} \times \frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{4} \times \frac{c}{4} \times \frac{c}{4} \times \frac{c}{4}\right).$$

Mais dans cette dernière, qui est composée de 9 facteurs, la somme de ces facteurs est $a + b + c = k$: elle est constante par hypothèse ; il faut donc pour le maximum que les facteurs soient égaux entre eux, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(Ce théorème a été appliqué au n° 234 de l'ouvrage).

CHAPITRE II

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE

§ 1. — Mesure et évaluation des angles

20. Mesure des angles par des longueurs d'arcs.

(*a*) **Rappel de la mesure d'un angle au centre.** — Un angle au centre a la même mesure que l'arc compris entre ses côtés ; ce qui veut dire que si l'on prend pour *unité d'angle* l'angle qui intercepte entre ses côtés l'*unité d'arc*, le nombre exprimant la mesure d'un angle au centre est le même que le nombre qui exprime la mesure de l'arc qu'il intercepte entre ses côtés, dans la même circonférence.

(*b*) **Cercle trigonométrique.**

Nous nommerons ainsi un cercle ayant pour *rayon l'unité*.

Pour mesurer un angle, on décrit de son sommet comme centre un cercle d'un rayon égal à l'unité ; *l'arc intercepté entre les côtés de l'angle, évalué* **non en degrés, mais en longueur**, donne la *mesure* de cet angle.

La circonférence du cercle trigonométrique a pour longueur 2π ; un angle droit qui répond au quart de la circonférence a donc pour mesure $1/2\,\pi$.

D'après cela, on divise le cercle trigonométrique, par deux diamètres perpendiculaires, en *quatre quadrants* valant chacun un angle droit.

(*c*) **Arcs comptés sur une circonférence ou sur une courbe.**

Un arc AB d'une courbe peut être considéré comme un *cheminement* accompli par un *mobile* qui irait du point A au point B en suivant la courbe (fig. 12). Si l'arc est compté comme *positif dans le sens* AB, on le considérera comme *négatif dans le sens* BA.

On aura : $AB = -BA$

et $AB + BA = 0$.

Dans le cercle trigonométrique, on fait la convention de prendre comme *sens positif* des arcs le *sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre*.

Fig. 12

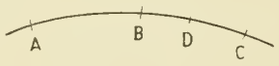


Fig. 13

(*d*) **Arcs consécutifs.**

Deux arcs sont dits *consécutifs* lorsque le point d'arrivée du premier est le point de départ du second.

Exemple : les arcs AB, BC, CD sont consécutifs (fig. 13).

(*e*) **Arc résultant de plusieurs arcs consécutifs.**

On appelle *arc résultant* de plusieurs arcs consécutifs, portés sur une courbe, celui qui est obtenu en allant directement, le long de la courbe, du point de départ du premier arc au point d'arrivée du dernier.

On ferait voir, exactement comme dans le cas de segments portés sur une droite (voir n° 14-*e*), que l'arc résultant de plusieurs arcs consécutifs est égal à *la somme algébrique* de ces arcs consécutifs. Ainsi l'arc AD étant l'arc résultant des arcs consécutifs AB, BC, CD, on a :

$$AD = AB + BC + CD. \qquad \text{(Fig. 13.)}$$

21. Angle de deux droites.

(*a*) **Définitions et conventions.** — Deux droites AB et CD, qui se coupent en un point O, forment en ce point quatre angles ; on pourrait, si l'on ne faisait aucune convention particulière, compter chacun d'eux soit positivement, soit négativement, et il en résulterait une confusion.

On convient donc de prendre comme angle de deux droites, *l'angle plus petit que deux angles droits*, que font entre elles les *directions positives* de ces deux droites.

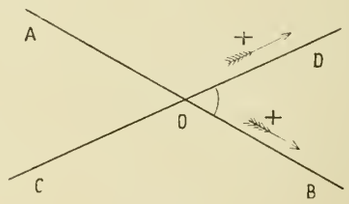


Fig. 14

Ainsi dans la figure 14 les deux droites AB et CD font entre elles l'angle BOD (si AB et CD sont les directions positives de ces droites).

(*b*) **Valeurs que peut prendre l'angle de deux droites.**

D'après ce qui précède, l'angle α d'une droite OB avec une droite OA, pourra se présenter dans l'un des quatre cas suivants (fig. 15) :

1er Cas (I)	*2e Cas* (II)	*3e Cas* (III)	*4e Cas* (IV)
α positif et $< \frac{\pi}{2}$	α positif et $< \pi$	α négatif et $< \pi$ en valeur absolue	α négatif et $< \frac{\pi}{2}$ en valeur absolue

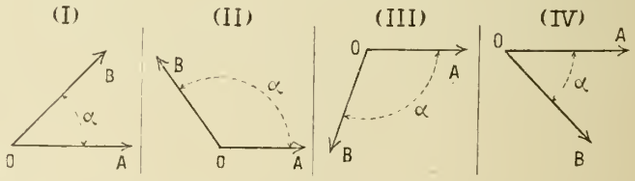


Fig. 15

α désignant dans ces différents cas l'arc du cercle trigonométrique intercepté entre les côtés de l'angle.

(*c*) **Angles adjacents consécutifs. — Leur angle résultant.** On appelle en géométrie *angles adjacents* deux angles qui ont le même

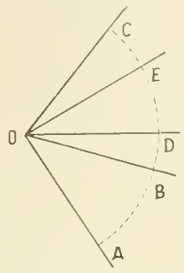


Fig. 16

sommet et un côté commun, et qui, de plus, sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Les conventions que nous avons faites relativement au sens positif ou négatif d'un arc ou de l'angle auquel il sert de mesure vont nous permettre de généraliser cette définition et d'appeler *angles adjacents* deux angles qui ont *même sommet* et simplement un *côté commun*, sans spécifier que les autres côtés seront de part et d'autre de ce côté commun.

Pour étudier des angles adjacents consécutifs, nous tracerons, de leur sommet commun comme centre, un cercle trigonométrique, et nous considérerons les arcs interceptés sur ce cercle par les différents angles.

Nous appellerons *angle résultant* de plusieurs angles adjacents consécutifs celui qui aura pour mesure l'arc résultant des arcs qui correspondent aux différents angles donnés.

Il est facile alors de voir que cet *angle résultant* est égal à la somme algébrique des *angles composants*.

Ainsi sur la figure 16, les angles adjacents consécutifs AOB, BOC, COD, DOE, ont pour angle résultant AOE, et l'on a toujours, grâce à la généralisation due à l'emploi de quantites négatives,

$$\widehat{AOE} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE}.$$

§ 2. — Lignes trigonométriques

22. Définition des lignes trigonométriques.

(*a*) **Sinus et cosinus** (fig. 17).

Un angle AOM étant donné, décrivons de son sommet comme centre un cercle trigonométrique ; l'arc AM intercepté entre les côtés de l'angle AOM, donne la mesure de cet angle. Cet angle sera donc défini si l'on connaît la

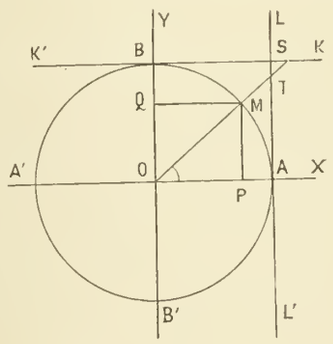


Fig. 17

position du point M sur la circonférence ; on la déterminera non pas par la longueur de l'arc AM, mais au moyen de certaines *fonctions* de cet arc, qu'on appelle *les lignes trigonométriques*.

Menons le diamètre BB' perpendiculaire à OA ; le point A sera pris comme origine des arcs ; nous appellerons *sinus* de l'arc AM la distance du point M au diamètre OA ; elle sera mesurée par la *perpendiculaire* MP abaissée du point M sur OA, et on la comptera *positivement* si *le point* M *est au-dessus de* OA, et *négativement* si le *point* M *est au-dessous de* OA

Si l'on désigne par α l'arc AM, on désignera son sinus par *sin* α.

Nous appellerons *cosinus* de l'arc AM la distance du point M au diamètre BB' ; elle sera mesurée par la droite QM perpendiculaire à ce diamètre ou par son égale OP, et on la comptera *positivement* si le *point* M *est à droite du diamètre* BB', et *négativement s'il est à gauche* de ce diamètre.

On le désignera par *cos* α.

On voit donc que le sinus est *l'ordonnée* du point M extrémité de l'arc α, tandis que le cosinus en est *l'abscisse*.

(*b*) **Tangente et cotangente.**

Menons au point A la tangente AL au cercle trigonométrique ; prolongeons le côté OM de l'angle AOM jusqu'à sa rencontre au point T avec la droite AL ; la ligne AT est ce que nous appellerons la *tangente* de l'arc AM ; nous la compterons *positivement* si le point T *est au-dessus du point* A et *négativement s'il est au-dessous*.

On la désigne par *tg* α.

Menons au point B la tangente BK au cercle trigonométrique ; prolongeons le côté OM de l'angle jusqu'à sa rencontre en S avec la tangente BK ; la ligne BS est ce que nous nommerons la *cotangente* de l'arc AM ; elle sera comptée *positivement si le point* S *est à droite du point* B, *et négativement s'il est à gauche*.

On la désigne par *cotg* α.

(*c*) **Sécante et cosécante.**

Nous appellerons *sécante* de l'arc AM la longueur comprise sur le rayon OM entre le point O et le point T où ce rayon rencontre la tangente menée en A au cercle. Cette longueur sera comptée *positivement* si le *point* M *et le point* T sont du *même côté par rapport au point* O sur le rayon OM ; elle sera comptée *négativement* si le *point* M *et le point* T sont *de part et d'autre du point* O.

On la désigne par *séc* α.

La *cosécante* de l'arc AM est la longueur comprise sur le rayon OM entre le point O et le point S où ce rayon rencontre la tangente menée en B au cercle. Elle sera comptée *positivement* si le *point* M *et le point* S *sont du même côté par rapport au point* O sur le rayon OM, et *négativement* si le *point* M *et le point* S sont de *part et d'autre du point* O.

On la désigne par *coséc* α.

Nota. — La sécante et la cosécante étant d'un usage peu fréquent, nous n'en dirons rien de plus dans ce qui va suivre.

(*d*) **Remarque.** — Les lignes trigonométriques d'un arc sont des *nombres abstraits* ; ce sont en effet les nombres qui représentent les mesures des différentes longueurs considérées lorsqu'on prend le rayon comme unité.

Lorsque ces lignes entreront dans une expression algébrique, on devra toujours les considérer comme étant du degré zéro, car ce sont des rapports.

23. Variations des lignes trigonométriques d'un arc.

D'après les conventions que nous avons faites relativement à l'angle de deux directions (v. n° 21), nous aurons à considérer des angles positifs ou négatifs, mais d'une valeur absolue toujours inférieure à π.

(*a*) **Variations du sinus.**

D'après la définition du sinus, tout arc terminé dans le *premier* ou dans le *deuxième quadrant* aura son *sinus positif* ; tout arc terminé dans le *troisième* ou le *quatrième quadrant* aura son *sinus négatif*. Donc :

« Tout arc α positif et compris entre 0 et π a son *sinus* positif ; tout « arc α négatif, compris en valeur absolue entre 0 et π a son sinus négatif. »

Un arc croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le sinus croît de 0 à 1 ; l'arc continuant à croître de $\frac{\pi}{2}$ à π, le sinus décroît de 1 à 0. (Voir plus loin le tableau résumé des variations des lignes trigonométriques.)

(*b*) **Variations du cosinus.**

Tout arc terminé dans le *premier* ou dans le *quatrième quadrant* a son *cosinus positif* ; tout arc terminé dans le *deuxième ou le troisième quadrant* a son *cosinus négatif*. Donc :

« Tout arc α, positif ou négatif, compris en valeur absolue entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

« a son cosinus positif : tout arc α positif ou négatif, compris en valeur ab-
« solue entre $\frac{\pi}{2}$ et π a son cosinus négatif.

Un arc croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, son cosinus décroît de 1 à 0 ; l'arc continuant à croître de $\frac{\pi}{2}$ à π, le cosinus devient négatif et croît en valeur absolue de 0 à 1. (V. plus loin le tableau résumé.)

(*c*) **Variations de la tangente.** — Tout arc terminé dans le *premier ou* dans le *troisième quadrant* a sa *tangente positive* ; tout arc terminé dans le *deuxième ou le quatrième quadrant* a sa *tangente négative*. Donc :

« Tout arc positif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ a sa tangente positive ; tout arc positif compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π a sa tangente négative ; tout arc négatif compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, en valeur absolue, a sa tangente négative ; tout arc négatif compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, en valeur absolue, a sa tangente positive. »

Lorsqu'un arc passe de 0 à $\frac{\pi}{2}$, sa tangente part de 0 et croît de plus en plus ; lorsque l'arc devient $\frac{\pi}{2}$, la tangente n'existe plus ; mais comme un peu avant que l'arc atteigne cette valeur $\frac{\pi}{2}$, la tangente est très grande, on dit que pour la valeur $\frac{\pi}{2}$, elle devient infinie.

L'arc croissant au-delà de $\frac{\pi}{2}$, la tangente devient négative, et pour les valeurs très peu supérieures à $\frac{\pi}{2}$, elle a une valeur absolue très grande.

C'est pourquoi on dit que lorsque l'arc passe par la valeur $\frac{\pi}{2}$, sa tangente saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$. Elle redevient zéro lorsque l'arc égale π.

(*d*) **Variations de la cotangente.** — La cotangente d'un arc est *toujours de même signe que sa tangente*.

On montrerait, de même que pour la tangente, que lorsqu'un arc croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, sa cotangente décroît de $+\infty$ à 0 ; l'arc continuant à croître de $\frac{\pi}{2}$ à π, sa cotangente décroît de 0 à $-\infty$.

(*e*) **Tableau résumé des variations des lignes trigonométriques.**

α		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
Positif	0	0	$+1$	0	$+\infty$
		$+$	$+$	$+$	$+$
	$+\frac{\pi}{2}$	$+1$	0	$+\infty$ / $-\infty$	0
		$+$	$-$	$-$	$-$
	$+\pi$	0	-1	0	$-\infty$
Négatif	0	0	$+1$	0	$-\infty$
		$-$	$+$	$-$	$-$
	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$ / $+\infty$	0
		$-$	$-$	$+$	$+$
	$-\pi$	0	-1	0	$+\infty$

24. Relations fondamentales entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

1° Le triangle rectangle MOP (fig. 18) nous donne

$$MP^2 + OP^2 = OM^2$$

ou (1) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2° Les triangles semblables OMP, OTA donnent

$$\frac{AT}{MP} = \frac{OA}{OP}$$

d'où $$AT = \frac{MP}{OP} \times OA$$

ou (2) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

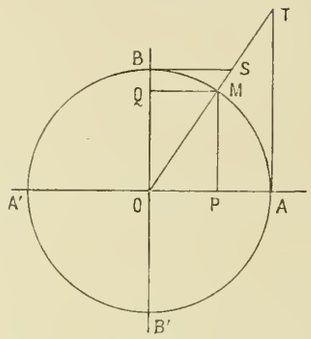


Fig. 18

3° Les triangles semblables OMQ, OSB donnent :

$$\frac{BS}{MQ} = \frac{OB}{OQ},$$

d'où $$BS = \frac{MQ}{OQ} \times OB$$

ou (3) $$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4° Des deux relations précédentes (2) et (3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

on tire, en les multipliant membre à membre,

(4) $$\operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{cotg}\alpha = 1,$$

ce qui confirme le fait indiqué au n° 23-*d* que la tangente et la cotangente d'un arc sont toujours de même signe.

Nota. — On démontrerait de la même manière, mais en tenant compte des signes, ces relations dans les 4 cas du n° 21-*b*. Elles sont donc générales.

25. Relations entre les lignes trigonométriques de deux arcs complémentaires.

(*a*) **Définition.** — Deux *arcs* complémentaires sont deux arcs dont l'*arc résultant est égal à* $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire dont la somme algébrique est égale à $+\frac{\pi}{2}$.

Les angles qui ont ces arcs pour mesure sont dits *angles complémentaires*. Deux arcs complémentaires peuvent se présenter dans les trois cas suivants de la fig. 19, pour lesquels AB est l'arc résultant des arcs $AM = \alpha$ et $MB = \beta$.

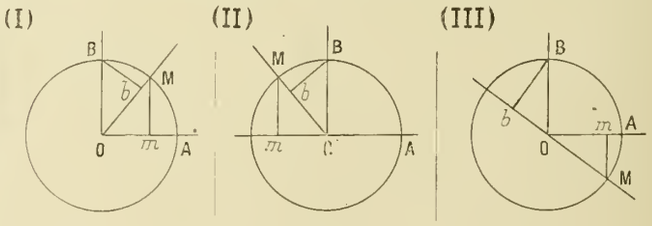


Fig. 19

1er Cas.	*2e Cas.*	*3e Cas.*
α positif et $< \frac{\pi}{2}$	α positif et $> \frac{\pi}{2}$	α négatif et $< \frac{\pi}{2}$
β positif et $< \frac{\pi}{2}$	β négatif et $< \frac{\pi}{2}$ en valeur absolue	en valeur absolue β positif et $> \frac{\pi}{2}$.

(*b*) **Théorème.** — Le sinus et la tangente d'un angle sont égaux respectivement au cosinus et à la cotangente de son complément, et réciproquement.

Les deux triangles égaux OM*m* et OB*b* donnent en valeur absolue

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

et

$$\sin \beta = \cos \alpha.$$

Il est facile de vérifier, dans les trois cas, que ces quantités sont deux à deux de même signe.

De ce que $\sin \alpha = \cos \beta$ et $\sin \beta = \cos \alpha$, il résulte que

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta.$$

Cette propriété explique pourquoi on appelle le cosinus, la cotangente et la cosécante les *lignes complémentaires* du sinus de la tangente et de la sécante.

Puisque pour deux angles complémentaires α et β on doit avoir algébriquement $\alpha + \beta = +\frac{\pi}{2}$, on en déduit $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Dès lors les relations précédentes peuvent s'écrire.

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

26. Relations entre les lignes trigonométriques de deux arcs supplémentaires.

(*a*) **Définition.** — Deux *arcs supplémentaires* sont deux arcs dont l'*arc résultant est égal à* π, c'est-à-dire dont la somme algébrique est égale à $+\pi$.

Les angles qui ont ces arcs pour mesure sont dits *angles supplémentaires*.

Deux arcs supplémentaires pourront se présenter dans les deux cas suivants de la fig. 20 pour lesquels AA' étant l'arc résultant égal à π, les arcs supplémentaires sont $AM = \alpha$, $MA' = \beta$.

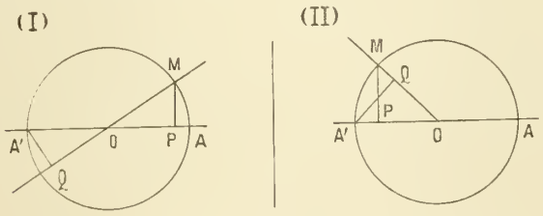


Fig. 20

1er Cas (fig. I).	*2e Cas* (fig. II).
α positif $< \frac{\pi}{2}$	α positif $> \frac{\pi}{2}$
β positif $> \frac{\pi}{2}$	et $< \pi$
et $< \pi$	β positif $< \frac{\pi}{2}$

(*b*) **Théorème.** — Deux arcs supplémentaires ont leurs sinus égaux et de même signe, leurs cosinus égaux et de signes contraires, leurs tangentes, ainsi que leurs cotangentes, égales et de signes contraires. En effet :

Les deux triangles égaux OMP, OA'Q donnent en valeur absolue

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \cos \beta.$$

Il est facile de vérifier les signes dans les deux cas et de voir que l'on a

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta.$$

On en déduit

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{-\cos \beta}$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

et

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\cos \beta}{\sin \beta}$$

d'où

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{cotg} \beta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Puisque pour deux angles supplémentaires α et β, on doit avoir, algébriquement, $\alpha + \beta = +\pi$, on en déduit $\alpha = \pi - \beta$. Dès lors les relations précédentes s'écrivent :

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{cotg}(\pi - \alpha).$$

27. Formules qui se déduisent des relations fondamentales.

(*a*) **Cosinus en fonction du sinus.**

De la relation

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

on tire

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Cette formule montre que pour un *même sinus* donné, il y a *deux cosinus égaux en valeur absolue et de signes contraires*, l'un correspondant à l'arc α, l'autre à son supplément $(\pi - \alpha)$.

(*b*) **Sinus en fonction du cosinus.** — La même relation $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nous fournit la valeur du sinus

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Donc pour un *même cosinus*, il y a *deux sinus, égaux en valeur absolue mais de signes contraires*; le premier correspondant à l'arc α, l'autre à l'arc $(-\alpha)$.

(*c*) **Sinus et cosinus en fonction de la tangente.** — La relation $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ devient, si on élève ses deux membres au carré,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Par une transformation connue, on obtient :

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

et comme $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ces deux expressions deviennent

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

d'où l'on tire :

$$\sin \alpha = \frac{\pm \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Pour une *même valeur de la tangente*, on a donc *deux valeurs égales et de signes contraires pour le sinus et pour le cosinus*. Les deux valeurs positives du sinus et du cosinus correspondent à un arc α' positif et plus petit que $\pi/2$; les deux valeurs négatives du sinus et du cosinus correspondent à un arc α'' négatif et plus grand que $\pi/2$ en valeur absolue ; sa valeur absolue est $(\pi - \alpha')$.

On voit, en effet, que le rapport $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ aura ainsi le même signe dans les deux cas.

§ 3. — Théorie des projections

28. Projection d'une droite sur un axe.

(*a*) **Définitions.** — 1° *Projection d'une droite sur un axe situé dans son plan* (fig. 21).

On appelle projection d'une droite sur un axe situé dans son plan, la distance comprise sur l'axe entre les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la droite sur cet axe.

2° *Projection d'une droite sur un axe non situé dans son plan* (fig. 22).

On appelle projection d'une droite sur un axe, non situé dans son plan, la distance comprise sur l'axe entre ses points d'intersection avec deux plans menés par les extrémités de la droite perpendiculairement à cet axe. Cette projection a donc la même longueur que la distance perpendiculaire des deux plans.

(*b*) **Signe de la projection d'une droite.** — Une droite AB dont le sens positif est de A vers B a pour projection *ab* sur un axe OX.

Cette projection sera *positive* si le sens *ab* est le même que le sens positif de l'axe OX ; la projection *ab* sera *négative* si le sens *ab* est le même que le sens négatif de l'axe OX.

(*c*) **Théorème fondamental.** — La projection d'une droite sur un axe est égale à la longueur absolue l de la droite multipliée par le cosinus de l'angle que fait la direction positive de la droite avec la direction positive de l'axe.

I. *La droite est dans le même plan que l'axe* (fig. 21-I).

Supposons que la droite AB rencontre l'axe au point A ; décrivons de ce point comme centre un cercle trigonométrique rencontrant en M le côté AB. Abaissons la perpendiculaire M*m* sur l'axe, A*m* représente le cosinus de l'angle α ; la projection de la droite est A*b*. Les deux triangles semblables AB*b* et AM*m* donnent :

$$\frac{Ab}{Am} = \frac{AB}{AM},$$

d'où $Ab = \frac{AB \times Am}{AM}$ et puisque $AM = 1$ on a :

$$Ab = AB \times Am.$$

Quatre cas peuvent se présenter suivant que α est positif ou négatif et qu'il est en valeur absolue plus petit ou plus grand que $1/2\,\pi$.

La remarque faite précédemment que

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

nous permettra de n'étudier que les deux suivants :

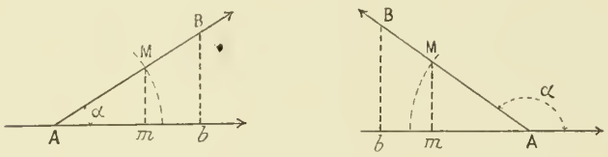


Fig. 21

1er Cas.	*2e Cas.*
α positif et $< \frac{\pi}{2}$	α positif et $> \frac{\pi}{2}$
Alors *Ab* est positif ; cos α est aussi positif et l'on a bien $Ab = AB \cos\alpha$ ou $Ab = l \cos\alpha$.	Alors *Ab* est négatif et comme cos α l'est aussi, on a encore $Ab = AB \cos\alpha$ ou $Ab = l \cos\alpha$.

II. *La droite n'est pas dans le même plan que l'axe* (fig. 22).

La projection de la droite AB étant *ab*, obtenue comme il a été dit dans la définition, menons par le point A une parallèle AC à *ab* ; cette droite est

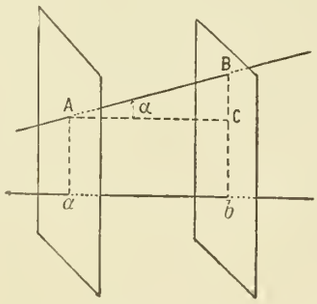


Fig. 22

égale à *ab* et elle fait avec AB le même angle α que fait, dans l'espace, cette droite AB avec l'axe. De plus, la droite AC est dans le même plan que AB, et l'on a d'après le théorème précédent :

$$AC = AB \times \cos\alpha.$$

Donc $$ab = AB \times \cos\alpha.$$

29. **Résultante de plusieurs droites consécutives.**

(*a*) **Définition.** — On nomme *résultante* de plusieurs droites consécutives dans l'espace, ou dans un même plan, la droite ou le cheminement unique qui, partant du point de départ de la première droite, aboutit au point d'arrivée de la dernière. Ainsi la droite AD est la résultante des droites consécutives AB, BC, CD.

(*b*) **Théorème.** — « La projection orthogonale, ou oblique, sur une droite « ou sur un plan de la résultante de plusieurs cheminements consécutifs est « égale à la résultante des projections de ces cheminements. »

Considérons (fig. 23) un mobile partant du point A et cheminant le long de ABCD ; un second mobile partant du point *a* parcourt la projection *abcd* de manière que les positions qu'il occupe successivement soient à chaque instant les projections des positions qu'occupe le premier mobile sur ABCD.

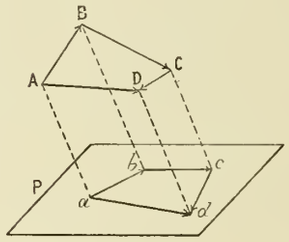


Fig. 23

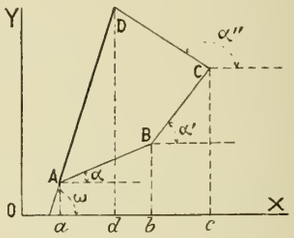


Fig. 24

Ces deux mobiles partant en même temps, l'un de A, l'autre de *a*, arriveront ensemble l'un en D, l'autre en *d*. La droite *ad*, résultante des projections, sera donc bien la projection de la résultante AD.

(*c*) **Traduction algébrique du théorème.** — Soient (fig. 24) les droites consécutives AB, BC, CD ; appelons a, a', a'', leurs longueurs et α, α', α'', les angles que font ces droites avec l'axe des x.

La résultante AD sera connue si l'on trouve sa longueur L, et l'angle ω qu'elle fait avec l'axe des x. Projetons sur cet axe les droites et leur résultante ; d'après le théorème fondamental (n° 28-*c*) nous avons :

$$\text{proj. AD} = \text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD}. \quad \text{ou}$$

$$(1) \qquad L \cos\omega = a \cos\alpha + a' \cos\alpha' + a'' \cos\alpha''.$$

Projetons de même sur l'axe des y, en remarquant que chaque droite fait avec cet axe un angle égal au complément de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, nous aurons :

$$(2) \qquad L \sin\omega = a \sin\alpha + a' \sin\alpha' + a'' \sin\alpha''.$$

Divisons membre à membre la deuxième équation par la première, il vient :

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{a \sin\alpha + a' \sin\alpha' + a'' \sin\alpha''}{a \cos\alpha + a' \cos\alpha' + a'' \cos\alpha''}.$$

Élevons au carré les deux équations (1) et (2) et ajoutons-les membre à membre, nous aurons :

$$(4) \quad L^2 = (a\cos\alpha + a'\cos\alpha' + a''\cos\alpha'')^2 + (a\sin\alpha + a'\sin\alpha' + a''\sin\alpha'')^2.$$

Les formules seraient analogues si au lieu de trois droites consécutives, nous en avions un nombre quelconque ; et on peut les écrire d'une manière générale sous la forme symbolique

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\Sigma a \sin\alpha}{\Sigma a \cos\alpha} \quad \text{et}$$

$$L^2 = [\Sigma a \sin\alpha]^2 + [\Sigma a \cos\alpha]^2$$

dans lesquelles $\Sigma a \sin\alpha$ représente la somme de toutes les quantités telles que $a \sin\alpha$, $a' \sin\alpha'$, etc., et $\Sigma a \cos\alpha$ la somme de toutes les quantités telles que $a \cos\alpha$, $a' \cos\alpha'$, etc.

30. **Projection d'une figure plane sur un plan.**

(*a*) **Définition.** — La projection d'une figure plane F sur un plan est la portion de ce plan qui est limitée par la projection du contour de la figure F, sur ce plan.

(*b*) **Théorème.** — La projection d'une figure plane sur un plan a pour

surface, la surface de la figure donnée, multipliée par le cosinus de l'angle que fait le plan de la figure avec le plan de projection.

Remarquons qu'une surface ne saurait être négative, et que, par suite, le cosinus devra toujours être pris avec le signe plus.

I. *Projection d'un triangle.* — 1° La base du triangle est dans le plan de projection (fig. 25-I).

Alors l'angle des deux plans est l'angle que font les hauteurs AH et aH du triangle donné et de sa projection. Dans le plan AaH, on a $aH = AH \cos \alpha$. La surface du triangle projection aBC est

$$\text{surf. } aBC = \frac{BC \times aH}{2}, \qquad \text{ou}$$

$$\text{surf. } aBC = \frac{BC \times AH \times \cos \alpha}{2}$$

et puisque $\frac{BC \times AH}{2} = \text{surf. } ABC$ on peut écrire

$$\text{surf. } aBC = \text{surf. } ABC \times \cos \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La base du triangle n'est pas dans le plan de projection (fig. 25-II).

Faisons passer par le sommet B du triangle un plan parallèle au plan de projection, et projetons sur ce nouveau plan ; la projection obtenue sera égale à celle qu'on aurait trouvée sur le plan de projection donné.

Le triangle ABC est alors la différence de deux triangles : le premier ABD est obtenu en prolongeant le côté AC jusqu'à sa rencontre avec le plan en D, et joignant ce point au sommet B ; le deuxième est BCD. La projection aBC du triangle ABC est la différence entre les projections aBD et BcD des triangles ainsi formés.

Or, d'après le cas précédent, on a

$$aBD = ABD \times \cos \alpha,$$

$$BcD = BCD \times \cos \alpha,$$

d'où en retranchant membre à membre

$$\text{surf. } aBc = \text{surf. } ABC \times \cos \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Projection d'un polygone.* — Si on décompose le polygone donné en triangles, sa projection sera égale à la somme des projections des triangles ainsi formés. On l'obtiendra donc encore en multipliant la surface du polygone par le cosinus de l'angle que fait son plan avec le plan de projection.

III. *Projection d'une surface plane limitée par une courbe.* — Divisons (fig. 25-III) l'aire courbe par des droites parallèles en bandes d'égale largeur ; nous formons ainsi des trapèzes tels que ABCD ayant pour bases deux droites parallèles AB et CD, les deux autres côtés étant les arcs de courbes BC et AD.

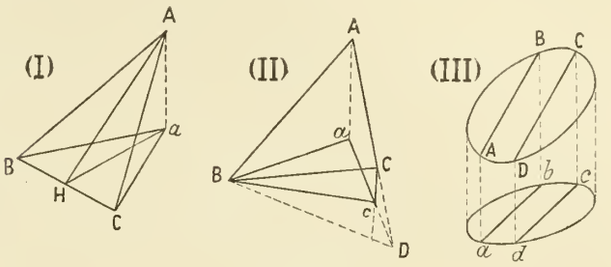


Fig. 25

Nous pourrons remplacer chacun d'eux par un trapèze rectiligne plus petit, tel que ABCD. La somme de tous les trapèzes rectilignes est plus petite que l'aire courbe, mais elle en différera d'autant moins que les bandes seront plus nombreuses et plus étroites ; nous pouvons admettre que la limite vers laquelle tend cette somme de trapèzes, lorsque leur nombre augmente indéfiniment, est précisément l'aire courbe considérée.

La projection de l'aire courbe est donc la limite vers laquelle tend la somme des projections des trapèzes rectilignes tels que ABCD et l'on a :

$$\text{proj. aire-courbe} = \lim. \Sigma_a abcd.$$

Mais pour chacun de ces trapèzes, on a :

$$abcd = ABCD \times \cos \alpha ;$$

donc : $\text{proj. aire-courbe} = \lim. \Sigma(ABCD \times \cos \alpha)$

on $\text{proj. aire-courbe} = \cos \alpha \times \lim. \Sigma ABCD$

et enfin : $\text{proj. aire-courbe} = \text{aire-courbe} \times \cos \alpha.$ C. Q. F. D.

§ 4. — Addition et multiplication des arcs et des angles

31. Connaissant le sinus, le cosinus et la tangente de deux arcs, trouver le sinus, le cosinus et la tangente de leur somme.

(*a*) *Les angles sont quelconques.* — Soient α et β les deux arcs donnés que nous supposerons tous deux plus petits que $\frac{\pi}{2}$ et ayant une somme inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Prenons $AM = \alpha$, et à la suite $MN = \beta$. Le sinus de α est MP, son cosinus est OP ; le sinus de β est NR, son cosinus OR ; enfin le sinus de l'arc AN, c'est-à-dire de l'arc, $(\alpha + \beta)$ est NS, son cosinus est OS.

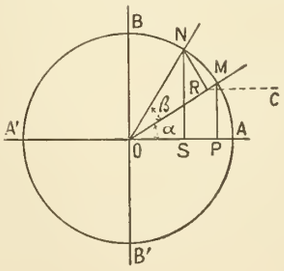


Fig. 26

Projetons sur OA les deux cheminements ORN et OSN qui ont mêmes extrémités et dont, par suite, les projections seront égales ; nous aurons :

$$\text{proj. ORN} = OR \times \cos \alpha + RN \times \cos CRN.$$

Or l'angle CRN, qui a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de l'angle MOB, est le supplément de celui-ci ; on a donc (v. n° 26)

$$\cos CRN = -\cos MOB$$

et comme MOB est le complément de α, on a

$$\cos MOB = \sin \alpha,$$

d'où $\cos CRN = -\sin \alpha.$

On a donc : $\text{proj. ORN} = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha.$

D'autre part, $\text{proj. OSN} = OS = \cos(\alpha + \beta),$ d'où

(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

Projetons maintenant sur OB, axe de y, les deux mêmes cheminements OSN et ORN, nous aurons encore :

$$\text{proj. OSN} = \text{proj. ORN},$$

$$\text{proj. OSN} = SN = \sin(\alpha + \beta),$$

$$\text{proj. ORN} = OR \times \sin \alpha + RN \times \sin CRN$$

et d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\sin CRN = \sin MOB = \cos \alpha.$$

Donc $\text{proj. ORN} = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha,$ d'où

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$

On aura $$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

ou, en remplaçant $\sin(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$ par leurs valeurs (2) et (1) trouvées ci-dessus :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta},$$

Divisons le numérateur et le dénominateur de cette expression par le produit $\cos\alpha\cos\beta$, il vient :

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}},\qquad \text{ou}$$

$$(3)\qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Ces formules sont générales, et il est facile de les vérifier dans le cas où les angles α et β ont des valeurs quelconques.

(*b*) *Les angles sont égaux.* — En faisant dans les formules précédentes $\beta=\alpha$, on trouve :

$$(1')\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$(2')\qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$(3')\qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

formules qui donnent les lignes trigonométriques de l'arc double d'un arc donné.

32. **Connaissant le sinus, le cosinus et la tangente de deux arcs, trouver le sinus, le cosinus et la tangente de leur différence.** — Soient α et β les deux arcs donnés que nous supposerons tous deux plus petits que $1/2\pi$ (fig. 27).

Prenons $AM=\alpha$ et en sens inverse $MN=\beta$. L'angle AON est égal à $(\alpha-\beta)$. D'après les formules établies précédemment, on a, puisque α est la somme des arcs β et $(\alpha-\beta)$:

$$\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$$

et

$$\cos\alpha=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

Multiplions la première équation par $\cos\beta$, la deuxième par $\sin\beta$ et retranchons membre à membre, il vient :

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)[\cos^2\beta+\sin^2\beta],\quad \text{d'où}$$

$$(1)\qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

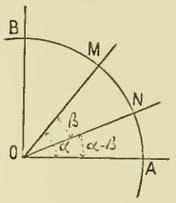


Fig. 27

Multiplions la première équation par $\sin\beta$, la deuxième par $\cos\beta$ et ajoutons membre à membre, il vient :

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)[\sin^2\beta+\cos^2\beta],\quad \text{d'où}$$

$$(2)\qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

On en déduit :

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

ou

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta},$$

et en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos\alpha\cos\beta$, il vient :

$$(3)\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

§ 5. — Formules relatives aux triangles rectangles

33. **Relations entre les éléments d'un triangle rectangle.** — Il a été établi en géométrie que :

1° La somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle égale un angle droit ;

2° Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

(*a*) **Théorème I.** — « Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle « droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce « côté ou par le cosinus de l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse. »

D'après le théorème fondamental des projections (n° 28-*c*), le côté AB qui est la projection de l'hypoténuse a pour valeur

$$(1)\qquad AB=BC\times\cos B.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Et comme

$$B+C=\frac{\pi}{2},$$

ou a

$$\cos B=\sin C;\qquad \text{donc}$$

$$(2)\qquad AB=BC\times\sin C.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*b*) **Théorème II.** — « Dans un triangle rectangle chaque côté de l'angle « droit est égal à l'autre côté de l'angle droit, multiplié par la tangente de « l'angle opposé au premier ou par la cotangente de l'angle aigu qui lui est « adjacent. »

D'après le théorème précédent, on a

$$AB=BC\sin C$$

et

$$AC=BC\cos C,$$

d'où, en divisant membre à membre :

$$\frac{AB}{AC}=\operatorname{tg}C\qquad \text{et}$$

$$(3)\qquad AB=AC\times\operatorname{tg}C.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme

$$B+C=\frac{\pi}{2},\qquad \text{ou a :}$$

$$\operatorname{tg}C=\operatorname{cotg}B;\qquad \text{donc}$$

$$(4)\qquad AB=AC\times\operatorname{cotg}B.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. — N'ayant pas à nous servir des relations trigonométriques qui existent entre les côtés et les angles des triangles quelconques, nous ne les établirons pas.

CHAPITRE III

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

§ 1. — Représentation algébrique des lieux géométriques

34. **Lieux quelconques.** — *a*) **Principe.** — Toute équation $f(x.y) = 0$ entre les deux coordonnées variables x et y d'un point peut être représentée par une courbe. Cette équation peut en effet, si elle est seule, être satisfaite par une infinité de valeurs simultanées de x et de y; et à chaque groupe de deux valeurs, l'une de x, l'autre de y, répond un point différent. Cette courbe est *le lieu géométrique* des points du plan dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation.

b) **Construction d'un lieu géométrique représenté par une équation** $f(xy) = 0$. — Pour construire la *courbe représentative* de l'équation $f(x.y) = 0$, on donne à x, dans l'équation, différentes valeurs successives, et on cherche pour chacune d'elles la valeur correspondante de y.

On construit les points ayant pour coordonnées les valeurs simultanées de x et de y ainsi trouvées, et on joint ces points par un trait continu.

1er Exemple. — Construire la courbe que représente l'équation

$$2x - y - 1 = 0.$$

Formons le tableau des valeurs correspondantes de x et de y (fig. 28).

Pour $x = 0$	$y = -1$	Point M	
$x = 1$	$y = 1$	» N	
$x = 2$	$y = 3$	» P,	etc...

Les trois points ainsi trouvés sont en ligne droite ; on reconnaîtrait que tout point dont les coordonnées satisfont à l'équation est sur la même droite MNP ; donc le lieu géométrique défini par cette équation est une droite.

2e Exemple. — Construire la courbe que représente l'équation $y = x^2 - 2$.

Formons de même que dans l'exemple précédent le tableau des valeurs correspondantes de x et de y (fig. 29).

Pour $x = 0$	$y = -2$	Point M	
$x = 1$	$y = -1$	» N	
$x = 2$	$y = +2$	» P	
$x = 3$	$y = +7$	» Q,	etc...

Les valeurs de y croissent donc en même temps que x, mais d'une manière bien plus rapide. Donnons maintenant à x des valeurs négatives

Pour $x = -1$	$y = -1$	Point N′	
$x = -2$	$y = +2$	» P′	
$x = -3$	$y = +7$	» Q′,	etc...

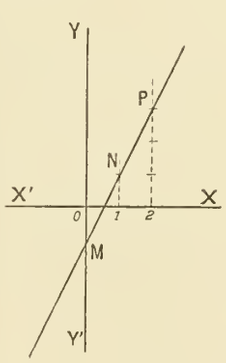


Fig. 28

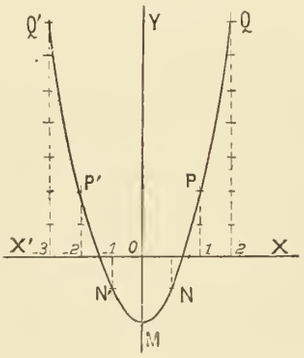


Fig. 29

Nous voyons que pour des valeurs de x égales en valeur absolue, mais de signes contraires, les valeurs de y sont les mêmes ; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe OY. Elle a des branches infinies fournies l'une par les valeurs positives, l'autre par les valeurs négatives de x. Nous verrons plus loin que cette courbe est une parabole.

§ 2. — Etude analytique de la ligne droite (coordonnées rectangulaires)

35. **Droite passant par l'origine.** — *a*) **La droite est située dans le premier quadrant.** — La *pente* a de la droite est le rapport constant qui existe entre l'ordonnée y d'un point A de cette droite et l'abscisse x de ce point (fig. 30-I).

En réalité a est la tangente trigonométrique de l'angle que la droite donnée fait avec l'axe OX.

Pour le point A (fig. 30-I), on a donc $\frac{y}{x} = a$,

d'où $$y = ax.$$

Considérons un point B, sur le prolongement de la droite OA dans le troisième quadrant. Pour ce point, l'abscisse et l'ordonnée sont négatives; leur rapport est par suite positif, et on a encore

$$\frac{y}{x} = a, \qquad \text{d'où} \qquad y = ax.$$

Cette équation représente donc la droite tout entière.

Exemple. — Construire la droite $y = 3x$.

Cette équation peut s'écrire aussi $\frac{y}{x} = 3$.

La pente de la droite est donc 3.

Pour $x = 1$. $y = 3$.

ce qui donne (*fig.* 30-II) le point A qu'il suffit de joindre au point O.

b) **La droite est située dans le deuxième quadrant** (*fig.* 31-I). — Dans ce cas la *pente est négative* : en valeur absolue, elle est toujours

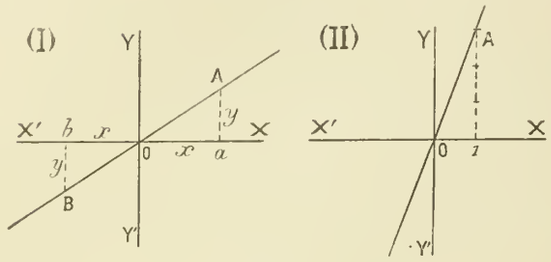


Fig. 30

égale au rapport de l'ordonnée du point à son abscisse; mais ici, l'abscisse est négative, de sorte que ce rapport est négatif. En appelant a cette pente négative, l'équation de la droite est encore

$$y = ax.$$

Cette droite prolongée passe dans le quatrième quadrant. L'abscisse et l'ordonnée d'un point N de ce quadrant sont de signe contraire ; la pente de la droite est encore négative et, si sa valeur est a, l'équation de la droite est encore

$$y = ax.$$

Donc, d'une manière générale, une droite passant par l'origine a pour équation $y = ax$.

a, qui représente la pente de la droite, est positif si la droite est dans le premier et le troisième quadrants; il est négatif si la droite est dans le deuxième et dans le quatrième quadrants.

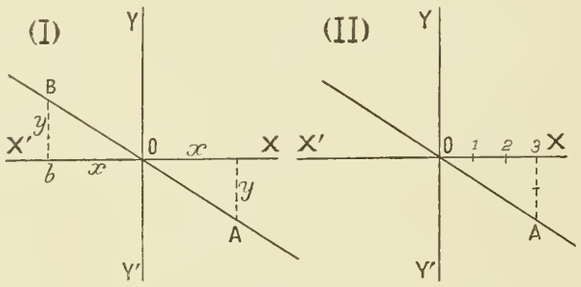


Fig. 31

Exemple. — Construire la droite $y = -\frac{2}{3}x$. On peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y}{x} = -\frac{2}{3}.$$

La pente de cette droite est $-2/3$.

Pour $x = 3$, on a $y = -2$.

Correspondant au point A dans le quatrième quadrant (fig. 31-II).

La droite est OA.

36. **Droite quelconque.** — *a*) **Équation d'une droite connaissant sa pente** a, **positive ou négative, et son ordonnée à l'origine** b, **positive ou négative.** — *L'ordonnée à l'origine* d'une droite est l'ordonnée du point où la droite rencontre l'axe des y (fig. 32-I).

Je mène par l'origine une droite parallèle à la droite AB ; son équation est

$$y = ax.$$

Je la relève ensuite, parallèlement à elle-même, de manière qu'elle prenne pour ordonnée à l'origine b ; toutes ses ordonnées sont alors augmentées algébriquement de b.

Pour un point N qui se trouve relevé en M, on a alors :

$$Mn = Nn + MN \qquad \text{ou}$$

(1) $$y = ax + b.$$

Telle est l'équation de la droite.

(*b*) **Exemples :**

1° Construire $y = \frac{2}{3}x + 3$ (fig. 32-II).

Je construis d'abord comme au n° 35, la droite $y = \frac{2}{3}x$ qui est OM ; puis je la relève de $+3$ parallèlement à elle-même en AB.

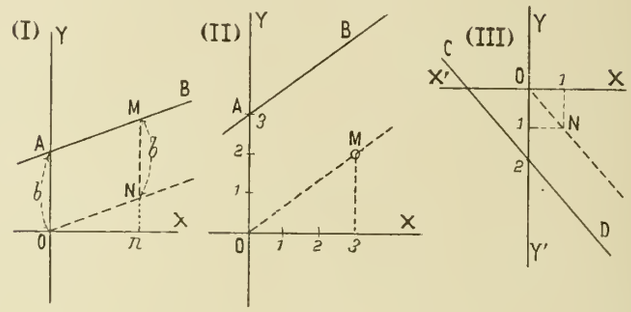


Fig. 32

2° Construire $y = -x - 2$ (fig. 32-III).

Je construis d'abord la droite $y = -x$. C'est ON, bissectrice du quatrième quadrant ; je l'abaisse ensuite de 2 parallèlement à elle-même en CD.

37. **Équation générale de la droite** $Ax + By = C$. — (*a*) **Pente et ordonnée à l'origine.** — L'équation $Ax + By = C$ se ramène facilement à la forme

$$y = ax + b.$$

Pour cela, isolons y, ce qui donne

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Posons $\quad -\frac{A}{B} = a \quad$ et $\quad \frac{C}{B} = b,$

l'équation devient

$$y = ax + b.$$

Alors $-\frac{A}{B}$ est la pente, et $\frac{C}{B}$ est l'ordonnée à l'origine de la droite représentée par l'équation $Ax + By = C$.

Donc : *Toute équation du premier degré entre deux variables représente une droite.*

b) **Traces d'une droite.** — Nous nommerons *traces* d'une droite les points où elle coupe les axes. La trace M sur l'axe des x s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la droite

$$Ax + Bx = C$$

ce qui donne, en appelant α l'abscisse de cette trace M (fig. 33)

$$x = \frac{C}{A} = \alpha.$$

La trace N sur l'axe des y s'obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation de la droite ; ce qui donne, en appelant β l'ordonnée de cette trace N

$$y = \frac{C}{B} = \beta.$$

(*c*) **Equation d'une droite en fonction de ses traces.** — Des deux valeurs $\alpha = \frac{C}{A}$ et $\beta = \frac{C}{B}$, on tire $A = \frac{C}{\alpha}$ et $B = \frac{C}{\beta}$.

Portons ces valeurs dans l'équation de la droite, nous obtenons

$$\frac{C}{\alpha}x + \frac{C}{\beta}y = C.$$

Divisons tous les termes par C, il vient

(1) $$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

Telle est l'équation de la droite en fonction de ses traces.

d) **1re application.** — *I. Construire la droite* $3x - 2y = 6$.

1re Méthode. — Elle consiste à calculer la pente et le relèvement.

D'après ce qu'on a vu plus haut, la pente est $3/2$; le relèvement est $-6/2 = -3$. Car l'équation peut s'écrire, en isolant y

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{6}{2}.$$

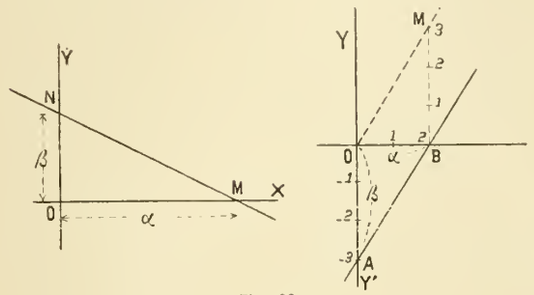


Fig. 33

Nous avons vu que le relèvement est la quantité positive ou négative dont il faut déplacer parallèlement à elle-même la droite menée par l'origine et ayant même pente que la droite donnée. Dans le cas actuel, ce relèvement est négatif, ce qui veut dire qu'il faut abaisser la droite $y = \frac{3}{2}x$ de la quantité 3.

Il faut donc :

1° Construire la droite $y = \frac{3}{2}x$. Ce qui donne la droite OM (fig. 33).

2° La descendre de 3.

2e *Méthode.* — Elle consiste à calculer la position des traces.

En faisant $y = 0$, on a : $y = -3$ ou $\beta = -3$

En faisant $y = 0$, on a : $x = +2$ ou $\alpha = +2$.

2e Application. — *Equation d'une droite ayant pour traces* $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

L'équation est
$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1.$$

38. **Equation d'une droite passant par deux points donnés.**

(*a*) **Droite de pente donnée** a **passant par un point donné** $(x'y')$. — L'équation de la droite sera

$$y = ax + b$$

à la condition de donner à b la valeur convenable pour que la droite passe au point donné. Les coordonnée de ce point devant satisfaire à l'équation de la droite, on aura ;

$$y' = ax' + b$$

d'où
$$b = y' - ax'.$$

L'équation de la droite devient donc

$$y = ax + y' - ax' \qquad \text{d'où}$$

(1)
$$y - y' = a(x - x').$$

(*b*) **Droite passant par deux points donnés** $(x'.y')$ et $(x''.y'')$. — La droite devant passer par le premier point aura pour équation d'après ce qui précède

$$y - y' = a(x - x')$$

à la condition de donner à a la valeur convenable pour que la droite passe aussi par le deuxième point donné. Ecrivons que les coordonnées x'' et y'' de ce point satisfont à l'équation, nous aurons

$$y'' - y' = a(x'' - x')$$

d'où
$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

L'équation de la droite devient alors

(2)
$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

39. **Coordonnées d'un point qui partage une droite de longueur limitée dans un rapport donné.** — Soit la droite AB (fig. 34), les coordonnées du point A sont x_1 et y_1 ; celles du point B sont x_2 et y_2 ; j'appelle X et Y les coordonnées du point C qui partage AB en deux parties telles que $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$.

Les triangles semblables ACc' et ABb' donnent

$$\frac{Ac'}{c'b'} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

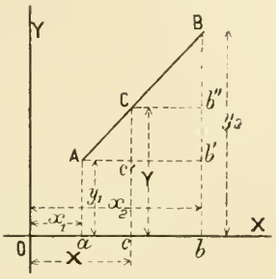


Fig. 34

et en remplaçant Ac' par sa valeur $(X - x_1)$ et $c'b'$ par sa valeur $(x_2 - X)$, il vient

$$\frac{X - x_1}{x_2 - X} = \frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad X(m + n) = mx_2 + nx_1,$$

d'où
$$X = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}.$$

Les triangles semblables ACc' et CBb'' donnent

$$\frac{Cc'}{Bb''} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

et en remplaçant Cc' par sa valeur $(Y - y_1)$ et Bb'' par sa valeur $(y_2 - Y)$, il vient :

$$\frac{Y - y_1}{y_2 - Y} = \frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad Y(m + n) = my_2 + ny_1,$$

d'où
$$Y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}.$$

Nota. — Les formules sont générales ; on les vérifierait facilement dans le cas où les deux extrémités de la droite ne sont pas dans le même quadrant.

Cas particulier. — Le point C doit être le milieu de la droite.

Alors $m = n$, et il vient

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

40. **Droites parallèles.** — Deux droites parallèles ont leurs pentes égales et de même signe.

Les équations de ces droites étant :

$$Ax + By = C$$
$$A'x + B'y + C'$$

les pentes de ces droites sont :

pour la première
$$-\frac{A}{B};$$

pour la deuxième
$$-\frac{A'}{B'}.$$

On a donc
$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

ou
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

« Deux *droites* sont donc *parallèles* si les *coefficients des variables* dans « leurs équations sont *proportionnels* ».

Si de plus on a aussi $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, les deux équations sont une conséquence l'une de l'autre, et les deux droites sont confondues en une seule.

Exemple.

Les droites $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 5 \end{array}\right\}$ sont parallèles.

Les droites $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{array}\right\}$ sont confondues.

41. **Droites perpendiculaires.**

(*a*) **Théorème.** — « Si *deux droites* sont *perpendiculaires*, leurs « *pentes sont inverses l'une de l'autre et de signes contraires.* »

Soient (fig. 35) les droites perpendiculaires OA et OB ; je prends sur ces droites des longueurs $OM = ON = 1$.

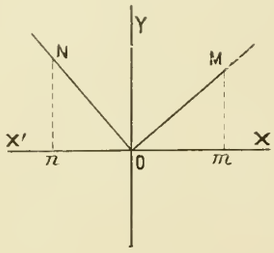


Fig. 35

Les triangles rectangles semblables OMm et OnN donnent :

$$\frac{Mm}{mO} = \frac{On}{Nn}.$$

Mais on sait que $\frac{Mm}{mO} = a$ et $\frac{Nn}{On} = a'$.

Donc en valeur absolue, $a = \frac{1}{a'}$.

Mais si la droite OM est dans le premier quadrant, c'est-à-dire si a est positif, ON est dans le deuxième quadrant, et par suite a' est négatif.

Donc $$a = -\frac{1}{a'}.$$

Exemple.

Les droites $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + 2 \\ y = -\frac{4}{3}x + 5 \end{array}\right\}$ sont perpendiculaires.

42. **Point de rencontre de deux droites.** — Les coordonnées du point de rencontre de deux droites satisfont à la fois aux équations de ces deux droites ; ce sont les racines du système de deux équations du premier degré à deux inconnues formé par les équations des deux droites.

Exemple. — Trouver les coordonnées du point de rencontre des deux droites

$$y = 2x - 1,$$
$$2y - x = 4.$$

Le système des deux équations étant résolu nous donne pour les coordonnées du point d'intersection

$$x = 2. \qquad y = 3.$$

On peut vérifier ces coordonnées en construisant les deux droites. De là un moyen de construire, graphiquement, les racines d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

§ 4. — Étude analytique du cercle (coordonnées rectangulaires)

43. **Cercle de rayon R ayant pour centre l'origine.**

(*a*) **Équation de ce cercle.** — Soient x et y les coordonnées d'un point M du cercle ; le triangle rectangle OMm donne (fig. 36)

$$OM^2 = Om^2 + Mm^2$$

ou $$R^2 = x^2 + y^2.$$

Telle est l'équation du cercle.

(*b*) **Problème.** — Connaissant l'abscisse x d'un point du cercle, calculer l'ordonnée de ce point.

De l'équation $x^2 + y^2 = R^2$, on tire :

$$y^2 = R^2 - x^2, \qquad \text{d'où} \qquad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Il y a donc pour une même abscisse Om deux ordonnées mM et mM' : égales en valeur absolue et de signes contraires.

(*c*) **Discussion.** — Ceci n'a lieu que si la quantité placée sous le radical est positive, c'est-à-dire si l'on a

$$R^2 - x^2 \geqq 0,$$

c'est-à-dire si x est plus petit en valeur absolue que R.

Si $R^2 - x^2 = 0$, alors $x = \pm R$ correspond aux points A et A'.

Enfin si $R^2 - x^2 < 0$ il n'y a pas d'ordonnée correspondant à x, et il n'y a en effet aucun point du cercle dont l'abscisse soit supérieure à R en valeur absolue.

Une discussion analogue pourrait être faite dans le cas où, connaissant l'ordonnée d'un point, on chercherait son abscisse.

44. **Cercle de rayon R ayant pour centre un point quelconque** (fig. 37).

(*a*) **Équation de ce cercle.** — Soit I le centre, dont les coordonnées sont x_1 et y_1 ; soit un point M du cercle, les coordonnées de ce point étant x et y.

Le triangle rectangle MIP donne

$$MI^2 = IP^2 + PM^2.$$

Or $IP = x - x_1$ et $PM = y - y_1$, on a donc :

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Cette équation développée devient :

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

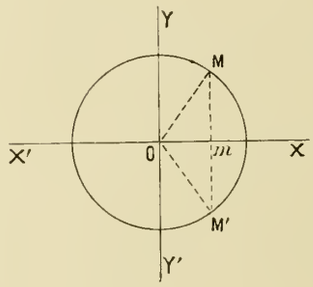


Fig. 36

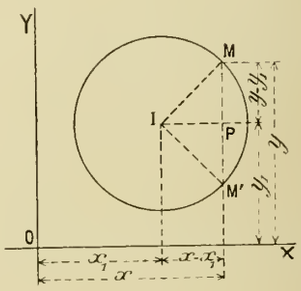


Fig. 37

Elle est du second degré ; les termes en x^2 et y^2 ont le même coefficient qui est l'unité ; il n'y a pas de terme du second degré en xy.

Cette équation est de la forme générale

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

et nous verrons que toute équation ayant cette forme représente un cercle.

(*b*) **Problème.** — Connaissant l'abscisse x d'un point d'un cercle donné par la position de son centre et par son rayon, trouver l'ordonnée de ce point.

Tirons de l'équation du cercle trouvée plus haut la valeur de y : l'équation peut être écrite :

$$y^2 - 2yy_1 + x^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - R^2 = 0,$$

d'où, en résolvant cette équation du second degré en y (v. n° 13-*b*),

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - (x^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - R^2)}, \qquad \text{ou}$$
$$y = y_1 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_1)^2}.$$

A chaque valeur de x correspondent donc deux valeurs de y, et par suite deux points M et M' situés de part et d'autre et à égale distance de la droite IP menée par le centre parallèlement à l'axe des x.

Une discussion analogue à celle du n° 43-*b* montrerait : 1° que pour toute valeur de x comprise entre $(x_1 - R)$ et $(x_1 + R)$ il y a deux valeurs de l'ordonnée ; 2° que pour $x = x_1 - R$ ou $x = x_1 + R$, il n'y a qu'une seule valeur de y, qui est $y = y_1$ et deux points sur le diamètre IP ; 3° enfin, que pour toute valeur de x plus petite que $x_1 - R$, ou plus grande que $x_1 + R$, il n'y a pas de points du cercle répondant à cette abscisse.

(*c*) **Problème inverse.** — *Etant donnée une équation du second degré de la forme* $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, *construire le cercle qu'elle représente.*

On cherchera : 1° les coordonnées x_1 et y_1 du centre ; 2° le rayon R.

Si on connaissait ces trois quantités, on aurait pour l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Cherchons quelles valeurs il faut donner à x_1, à y_1 et à R pour que cette équation soit identique à l'équation proposée.

Nous devrons avoir

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 = A \\ -2y_1 = B \end{array}\right\} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{A}{2} \\ y_1 = -\dfrac{B}{2} \end{array}\right. \quad \text{et}$$

$$x_1^2 + y_1^2 - R^2 = C, \qquad \text{d'où} \qquad R^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C, \qquad \text{et}$$
$$R = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - C}.$$

Cette identification pourra toujours être faite ; par suite l'équation $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ représentera toujours un cercle.

Exemple. — Construire le cercle $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

D'après ce qui vient d'être dit, on a pour les coordonnées du centre I,

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad y_1 = -\frac{6}{2} = -3,$$

et pour le rayon

$$R^2 = \frac{16 + 36}{4} + 3 = 16, \qquad \text{d'où} \qquad R = \sqrt{16} = 4.$$

45. Tangente au cercle.

(*a*) **Tangente en un point** $(x'y')$ **du cercle.** — Nous supposerons que le centre du cercle est à l'origine. Toute droite passant par le point $x'y'$ a pour équation $y - y' = m(x - x')$ (v. n° 35).

Nous écrirons qu'elle est tangente au cercle en donnant à sa pente m la valeur convenable pour que cette droite soit perpendiculaire au rayon qui passe par le point donné (fig. 38).

Ce rayon a pour pente $\frac{y'}{x'}$; on aura donc (v. n° 41)

$$m = -\frac{x'}{y'}.$$

L'équation de la tangente est par suite

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

ou
$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2,$$

et comme le point $(x'y')$ est sur le cercle,

on a
$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

et l'équation de la tangente devient :

$$yy' + xx' = R^2.$$

Remarquons qu'elle se déduit de l'équation du cercle qui peut être écrite $y \times y + x \times x = R^2$ en remplaçant un facteur x par x' et un facteur y par y'.

(*b*) **Tangente menée au cercle par un point extérieur.** — *Corde des contacts* (fig. 39). — Soit à mener au cercle une tangente par le point P dont les coordonnées sont X et Y. Si nous connaissions les coordonnées x' et y' du point de contact, l'équation de la tangente serait, d'après ce qui précède :

$$xx' + yy' = R^2$$

et comme elle doit passer au point P, l'équation devra être vérifiée par les coordonnées de ce point ; on aura donc

(1) $$Xx' + Yy' = R^2 ;$$

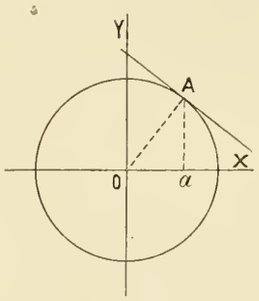


Fig. 38

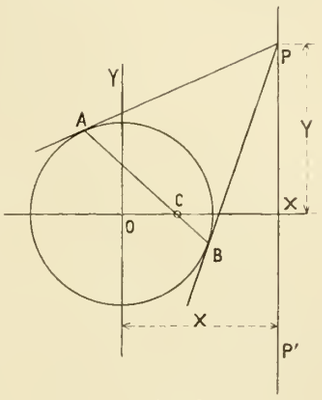


Fig. 39

cette équation, jointe à l'équation

(2) $$x'^2 + y'^2 = R^2$$

qui indique que le point $(x'y')$ est sur le cercle, permettra de déterminer les coordonnées x' et y' du point de contact. Tirons de la première équation la valeur de y' et portons-la dans la seconde ; nous obtenons l'équation du second degré en x' qui nous donnera l'abscisse x' de l'un des points de contact.

$$x'^2(X^2 + Y^2) - 2R^2Xx' + R^2(R^2 - Y^2) = 0$$

Les racines de l'équation seront réelles si l'on a :

$$R^4X^2 - R^2(R^2 - Y^2)(X^2 + Y^2) \geqq 0$$

ou, en simplifiant : $$X^2 + Y^2 \geqq R^2.$$

1° Si $X^2 + Y^2 > R^2$, c'est-à-dire si le point P est extérieur au cercle, il y aura deux racines et par suite deux tangentes ;

2° Si $X^2 + Y^2 = R^2$, le point P est sur le cercle, il n'y a qu'une tangente au cercle en ce point ;

3° Si $X^2 + Y^2 < R^2$, le point P est dans l'intérieur du cercle et il n'y a pas de racines ; on ne peut pas en effet mener à un cercle une tangente par un point intérieur.

Dans le cas où il y aura deux points de contact, les coordonnées $(x'y')$ et $(x''y'')$ de ces deux points satisfont à la fois aux équations (1) et (2) ; par suite l'équation

$$Xx + Yy = R^2$$

est satisfaite lorsqu'on y fait $x = x'$ et $y = y'$ et aussi lorsqu'on y fait $x = x''$, $y = y''$.

Elle représente donc une droite qui passe par les points de contact des tangentes issues du point P, et on l'appelle pour cette raison la *corde des contacts*.

On voit que cette équation est de la même forme que celle de la tangente ; mais x' et y', coordonnées du point de contact, y sont remplacées par X et Y coordonnées du point de concours des deux tangentes.

46. Du pôle et de la polaire dans le cercle. — (*a*) Définitions.

— La corde des contacts des tangentes issues du point P dont les coordonnées sont X et Y a pour équation (fig. 39)

$$Xx + Yy = R^2.$$

Cherchons le point C où elle coupe l'axe des x ; en faisant $y = 0$, nous trouvons

$$x = \frac{R^2}{X},$$

ce qui nous montre que pour tous les points P ayant la même abscisse, c'est-à-dire situés sur une même perpendiculaire à l'axe des x, les cordes des contacts des tangentes issues de ces points P passent toutes en un même point C situé sur l'axe des x, et dont l'abscisse est $\frac{R^2}{X}$ (v. fig. 39).

Réciproquement, si on mène par le point C des cordes dans le cercle, le lieu géométrique des points d'intersection des deux tangentes menées au cercle par les extrémités de chacune des cordes, sera la droite PP' perpendiculaire à l'axe des x.

Le point C s'appelle le *pôle de la droite* PP' par rapport au cercle, et cette droite PP' est la *polaire du point* C.

(*b*) **Positions relatives du pôle et de la polaire.** — La valeur $x = \frac{R^2}{X}$ nous montre que :

1° Si le pôle C est à l'intérieur du cercle, son abscisse x est plus petite que le rayon et alors X est plus grand que le rayon ; la polaire ne coupe pas le cercle ;

2° Si le pôle C est sur le cercle, alors $x = R$ et $X = R$; la polaire passe par le point C et est tangente au cercle en ce point ;

3° Si le pôle C est extérieur au cercle, x est plus grand que R et alors X est plus petit que R ; la polaire coupe le cercle.

En résumé, si l'on déplace le pôle C sur le rayon, lorsque le pôle est au centre, la polaire est à l'infini ; le pôle s'éloignant du centre, la polaire se rapproche du cercle, et elle lui devient tangente quand le pôle est sur la circonférence. Enfin le pôle sortant du cercle, la polaire y entre, et lorsque le pôle s'éloigne, la polaire se rapproche encore du centre ; elle y arrive quand le pôle est à l'infini. Ainsi, le pôle s'éloignant du centre, la polaire s'en rapproche, et réciproquement.

(*c*) **Remarque.** — De ce qui précède il résulte que : 1° le pôle d'une droite est situé sur le rayon perpendiculaire à cette droite ; 2° le rayon est moyen proportionnel entre les distances du pôle et de la polaire au centre du cercle.

(*d*) **Théorème.** — « Les polaires de tous les points d'une droite passent « par le pôle de cette droite, et, réciproquement, les pôles de toutes les droites « passant par un même point fixe sont situés sur la polaire de ce point fixe. »

Soit la droite AB dont le pôle est d'après ce qui précède le point C situé sur le rayon OF perpendiculaire à AB, et tel que l'on a : $OC \times OF = R^2$. Un point D de cette droite AB a pour polaire la droite EG perpendiculaire à OD et coupant ce rayon au point E, de telle sorte que l'on ait (fig. 40)

$$OE \times OD = R^2.$$

Soit C' le point où cette droite EG coupe le rayon OF ; nous allons prouver que C' se confond avec C. En effet les triangles semblables OC'E et ODF donnent : (Le point C' n'est pas marqué sur la fig. 40.)

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OC'}{OD},$$

d'où $$OE \times OD = OF \times OC'$$

et comme $OE \times OD = R^2$, il en résulte

$$OF \times OC' = OF \times OC$$

et, par suite, $$OC' = OC.$$

Donc la polaire du point D, pris sur la droite AB, passe par le pôle C de la droite AB.

Il en serait de même pour tous les points de la droite AB.

Réciproquement : soit une droite EG dont le pôle est D' situé sur le rayon perpendiculaire à EG et tel que $OE \times OD' = R^2$.

Les triangles rectangles OEC, OD'F donnent

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD'},$$

d'où $$OE \times OD' = OF \times OC = R^2$$

et $$OE \times OD = OE \times OD';$$

donc $$OD = OD'$$

et le point D' pôle de la droite EG qui passe au point C est situé sur la polaire AB du point C. Il en serait de même pour toutes les droites passant au point C. Le théorème est donc démontré.

(*e*) **Équation de la polaire d'un point (XY) par rapport au cercle.**

1° La polaire d'un point extérieur au cercle est donc, d'après le théorème précédent, la corde des contacts des tangentes issues de ce point ; son équation sera donc

$$Xx + Yy = R^2.$$

2° Si le point est sur le cercle, sa polaire est la tangente au cercle en ce point ; son équation est encore

$$Xx + Yy = R^2.$$

3° Si le point est dans l'intérieur du cercle, sa polaire est le lieu des points de rencontre des tangentes menées aux extrémités des cordes passant par ce point. Soient p et q les coordonnées d'un point quelconque de la polaire, la corde des contacts correspondant à ce point aura pour équation

$$px + qy = R^2$$

et comme elle passe au point (XY) son équation est satisfaite par les coordonnées de ce point ; donc on a

$$pX + qY = R^2.$$

Les coordonnées de tous les points de la polaire satisferont par suite à une relation analogue à celle-ci, et son équation sera

$$Xx + Yy = R^2.$$

Conclusion. — Donc, dans tous les cas, l'équation de la polaire d'un point (XY) est :

$$Xx + Yy = R^2.$$

Cette équation est toujours de même forme que celle de la corde des contacts des tangentes issues du point XY.

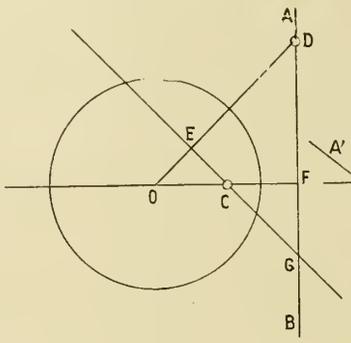


Fig. 40

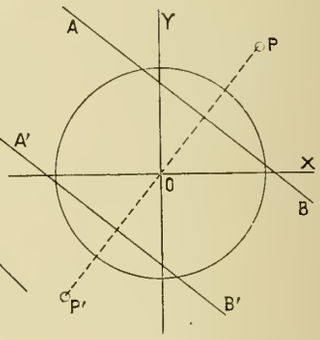


Fig. 41

47. **Antipôle et antipolaire.** — (*a*) **Définitions.** — Soit un point P (*fig.* 41) dont la polaire est la droite AB ; prenons en P' le symétrique du point P par rapport au centre ; le point P' sera dit l'*antipôle de la droite* AB.

Prenons la polaire A'B' du point P' ; elle est symétrique de AB par rapport au centre, et on l'appelle *l'antipolaire du point* P.

Réciproquement le point P est l'antipôle de A'B' ; et AB est l'antipolaire du point P'.

(*b*) **Équation de l'antipolaire d'un point (XY) par rapport au cercle.** — Le point symétrique du point donné par rapport au centre aura pour coordonnées (— X) et (— Y). Sa polaire, qui est par définition l'antipolaire cherchée aura donc pour équation

$$-Xx - Yy = R^2 \quad \text{ou encore}$$
$$Xx + Yy = -R^2;$$

c'est l'équation de la polaire dans laquelle on a changé le signe du second membre.

§ 5. — Étude analytique de la parabole

48. **Définition et construction de la parabole. Propriétés immédiates.** — (*a*) *Définition.* — La parabole est une courbe plane, *lieu géométrique des points également distants d'un point fixe appelé foyer et d'une droite fixe appelée directrice.*

(*b*) **Construction de la courbe** (fig. 42).

1° *Tracé par points.* — Abaissons du foyer F la perpendiculaire FG sur la directrice DD' ; le point A, milieu de FG, est évidemment un point de la courbe car il est à égale distance du foyer et de la directrice. Menons une

parallèle IM à la directrice ; prenons la distance IG de cette droite à la directrice, et décrivons du foyer F, comme centre, avec IG comme rayon une circonférence ; elle coupe la droite IM en deux points M et M' qui appartiennent à la courbe.

Il est évident, d'après ce tracé, que la parabole est symétrique par rapport à la droite FG qu'on nomme son *axe*.

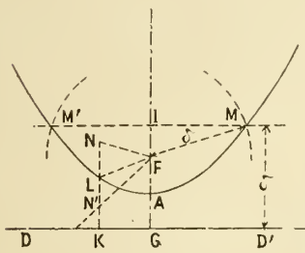


Fig. 42

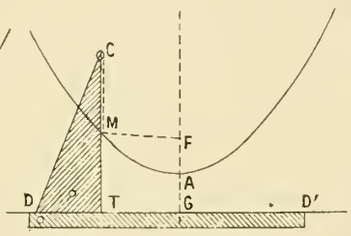


Fig. 43

2° *Tracé d'un mouvement continu.* — On fixe au sommet C d'une équerre un fil ayant, comme longueur, la longueur du côté CT de l'angle droit de cette équerre ; puis, plaçant une règle le long de la directrice, on dispose l'équerre de manière que son deuxième côté de l'angle droit TD, soit sur la règle, et on fixe l'extrémité libre du fil au foyer F de la parabole à tracer. On tend le fil suivant CMF au moyen de la pointe d'un crayon placée en M, contre la règle ; après quoi on déplace l'équerre le long de la règle en maintenant toujours le fil bien tendu, la pointe du crayon restant toujours le long du côté CT de l'équerre.

On aura toujours $CM + MF = CT$, d'où

$$MF = MT$$

et la pointe M du crayon décrira la parabole.

(c) Points à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe.

1° Tout point situé à *l'intérieur* de la courbe, c'est-à-dire du côté où est le foyer, est plus près du foyer que la directrice (fig. 42).

Soit le point N situé à l'intérieur de la courbe on a ; $NF < NK$.

En effet, pour le point L appartenant à la parabole, on a $LF = LK$; et dans le triangle FNL, on a :

$$FN < NL + FL$$

ou

$$FN < NL + LK$$

ou enfin

$$FN < NK. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Tout point situé à *l'extérieur* de la courbe, c'est-à-dire du côté où est la directrice, est plus près de la directrice que du foyer. Une démonstration analogue à la précédente montrerait que, pour un point N' situé à l'extérieur de la courbe, on a

$$N'K < N'F.$$

La ligne MF ou LF, qui joint un point de la courbe à son foyer, s'appelle un rayon vecteur.

(d) Propriétés immédiates de la courbe.

De ce qui précède il résulte que :

1° La courbe est *symétrique* par rapport à son *axe*, qui est la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice.

2° Le point A milieu de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice est le *sommet* de la parabole.

3° La distance FA du foyer de la courbe à son sommet détermine la forme de la courbe ; nous l'appellerons son *paramètre* ou encore sa *distance focale*, et nous la désignerons par la lettre p'.

19. Tangente à la parabole.

(a) Définition de la tangente à une courbe.

La tangente en un point A d'une courbe est la position limite AT d'une sécante AB passant par le point A, position limite obtenue en faisant tourner la sécante autour du point A de manière que le point B se rapproche indéfiniment de A et vienne se confondre avec lui.

(b) Tangente en un point d'une parabole.

Théorème. « La tangente en un point de la parabole est la bissectrice de « l'angle formé par le rayon vecteur et par la parallèle à l'axe qui passent par « ce point. »

En effet : Soit le point M de la courbe (fig. 44) ; menons le rayon vecteur MF, la parallèle MK à l'axe, et la bissectrice MN de l'angle FMK. Si nous démontrons que tout point tel que N de cette bissectrice, autre que le point M, est plus près de la directrice que du foyer, cela prouvera que ce point N est extérieur à la courbe et que, par suite, la droite MN est une tangente.

Or, les triangles MNF et MNK sont égaux comme ayant un angle égal $\widehat{FMN} = \widehat{NMK}$, compris entre côtés égaux (NM commun, et $MF = MK$).

Il en résulte que $NF = NK$.

La distance NI du point N à la directrice est plus petite que NK, qui est une oblique, et par suite que son égale NF. C. Q. F. D.

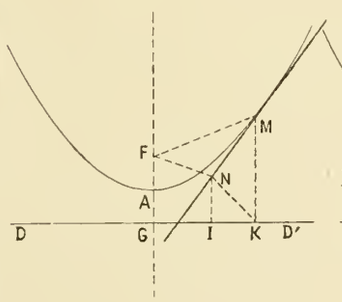


Fig. 44

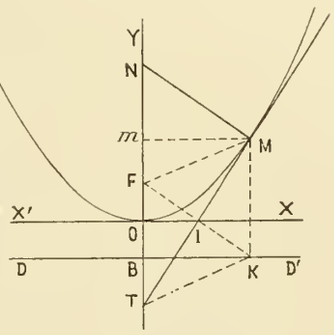


Fig. 45

(c) Sous-tangente (fig. 45).

I. *Définition.* — On appelle sous-tangente la projection sur l'axe de la parabole de la portion de la tangente comprise entre son point de contact et son point d'intersection avec l'axe de la parabole. La tangente étant MT, la sous-tangente est mT (fig. 45).

II. *Théorème.* « La sous-tangente est double de l'ordonnée du point de « contact, la parabole étant rapportée à sa tangente au sommet comme axe « des X et à son axe comme axe des Y. ».

Pour le démontrer joignons le point K (fig. 45) au foyer ; les deux triangles FMI, MIK sont égaux comme ayant un angle égal $\widehat{FMI} = \widehat{IMK}$ compris entre côtés égaux (MI commun, et $FM = MK$).

On voit donc que $FI = IK$ et que MI est perpendiculaire sur FK.

La figure MFTK est donc un losange et le point I est aussi le milieu de MT. Il résulte de ce qui précède que le point I est sur la tangente au sommet et que le point O est le milieu de mT. On a donc $\overline{mT} = 2\overline{mO}$. C. Q. F. D.

III. *Corollaires.* — 1° Le lieu géométrique de la projection I du foyer sur une tangente est la tangente au sommet de la parabole.

2° La longueur OI, abscisse à l'origine de la tangente, est la moitié de l'abscisse mM du point de contact.

3° La directrice est le lieu géométrique du point K symétrique du foyer par rapport à la tangente.

(d) Normale et sous-normale.

I. *Définitions.* — La *normale* à la parabole au point M est la perpendiculaire menée en ce point à la tangente.

La *sous-normale* est la projection sur l'axe de la parabole de la portion de la normale comprise entre le point où elle coupe la courbe et le point où elle rencontre l'axe de la parabole.

La normale étant MN, la sous-normale est Nm.

II. *Théorème.* — « La sous-normale d'une parabole est constante et égale au « double de la distance focale. »

Les triangles rectangles MmN et KBF sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale ($MN = KF$ comme parallèles comprises entre parallèles) et un côté de l'angle droit égal ($Mm = BK$).

Les troisièmes côtés sont égaux ; donc $mN = BF = 2OF = 2p'$. C. Q. F. D.

(e) Mener à une parabole une tangente parallèle à une direction donnée.

— Abaissons du foyer une perpendiculaire sur la droite donnée ; elle coupe en B la tangente au sommet ; la tangente est la parallèle

à la droite donnée, menée par le point B ; l'abscisse Oc du point de contact est double de OB, (fig. 46), ce qui détermine le point de contact C.

50. Equation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet (fig. 47).

(*a*) **Parabole positive.** — Nous dirons que la parabole est positive si son foyer est situé au-dessus de l'axe des x, sa directrice étant au-dessous. L'ordonnée du foyer est alors positive et égale à p'.

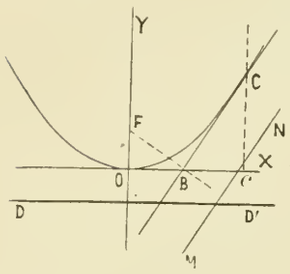


Fig. 46

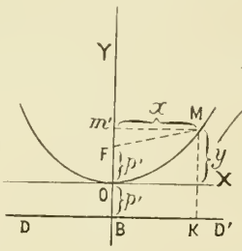


Fig. 47

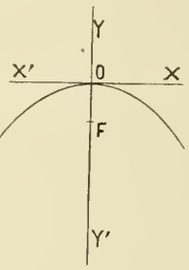


Fig. 48

D'après la définition de la courbe nous avons

$$MF = MK, \qquad \text{d'où}$$

$$\overline{MF}^2 = \overline{MK}^2.$$

Dans le triangle rectangle $Mm'F$ nous avons :

$$MF^2 = \overline{Mm'}^2 + \overline{m'F}^2 \qquad \text{ou}$$

$$MF^2 = x^2 + (y - p')^2, \qquad \text{d'autre part}$$

$$MK = m'O + OB \quad \text{ou} \quad MK = y + p', \qquad \text{d'où}$$

$$MK^2 = (y + p')^2, \qquad \text{nous avons donc :}$$

$$x^2 + (y - p')^2 = (y + p')^2; \qquad \text{d'où}$$

$$4p'y = x^2 \qquad \text{et}$$

$$(1) \qquad y = \frac{1}{4p'}x^2. \qquad \text{(Equation de la parabole)}$$

Application. — Que représente la courbe

$$y = ax^2 ?$$

C'est une parabole ayant pour axe l'axe des y, pour tangente au sommet l'axe des x et une distance focale p' donnée par la relation

$$a = \frac{1}{4p'}, \qquad \text{d'où} \qquad p' = \frac{1}{4a}.$$

(*b*) **Parabole négative.** — Le foyer est alors situé au-dessous de l'axe des x, la directrice étant au-dessus (fig. 48).

Par un calcul analogue au précédent on trouvera pour équation de la parabole

$$y = -\frac{1}{4p'}x^2.$$

L'ordonnée du foyer est négative et égale à p' en valeur absolue. Donc :

D'une manière générale, si on admet que p' représente en grandeur et en signe l'ordonnée du foyer, l'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet sera toujours de la forme

$$y = \frac{1}{4p'}x^2.$$

(*c*) **Applications.**

1° Construire la courbe $y = \frac{1}{5}x^2$.

C'est une parabole positive ayant pour axe l'axe des y, tangente à l'axe des x à l'origine, et ayant pour paramètre, c'est-à-dire pour distance focale

$$p' = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

2° Construire la parabole $y = -\frac{1}{15}x^2$.

C'est une parabole négative rapportée aux mêmes axes que la précédente ; mais sa distance focale est

$$p' = -\frac{15}{4} = -3{,}75.$$

51. Intersection d'une droite et d'une parabole. — Diamètre.

(*a*) **Intersection d'une droite et d'une parabole.** — Soit à trouver les points d'intersection de la parabole

$$(1) \qquad y = \frac{1}{4p'}x^2$$

et de la droite

$$(2) \qquad y = ax + b.$$

Nous trouverons les coordonnées des points d'intersection en résolvant le système des équations (1) et (2).

Tirons la valeur de y de la première équation et portons-la dans la seconde, il vient, en appelant x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection,

$$\frac{1}{4p'}x^2 = ax + b, \qquad \text{ou}$$

$$x^2 - 4ap'x - 4bp' = 0, \qquad \text{d'où, en résolvant}$$

$$x_1 = 2(ap' + \sqrt{a^2p'^2 + bp'}),$$

$$x_2 = 2(ap' - \sqrt{a^2p'^2 + bp'}).$$

Il y aura donc, en général, deux points d'intersection.

(*b*) **Diamètres dans la parabole.** — I. *Définition.* — On appelle *diamètre* d'une courbe le lieu géométrique des milieux des cordes menées dans cette courbe parallèlement à une direction donnée.

II. *Coordonnées du point milieu d'une corde de la parabole.*

D'après ce qu'on a vu précédemment le point milieu d'une corde $y = ax + b$ a pour abscisse

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

x_1 et x_2 étant les coordonnées des points d'intersection de cette corde avec la parabole.

On aura donc $\qquad \xi = 2ap'$,

quantité indépendante de b.

III. *Equation d'un diamètre.* — Si on mène plusieurs cordes parallèles à une même direction de pente a, leurs milieux auront tous pour abscisse $2ap'$; donc le *diamètre* de ces cordes est une *parallèle à l'axe de la parabole* ; et son équation est

$$x = 2ap',$$

d'où ce théorème :

Théorème. — « Tous les diamètres sont parallèles à l'axe de la para- « bole et à chaque direction de corde correspond un diamètre particulier. »

IV. *Conséquences.* — 1° Si nous menons deux cordes parallèles MN et M'N', les droites MM' et NN' qui joignent leurs extrémités se coupent en un point P situé sur le diamètre II' de ces cordes (fig. 49).

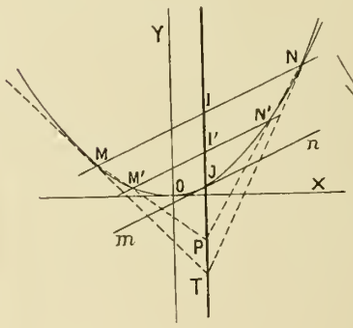


Fig. 49

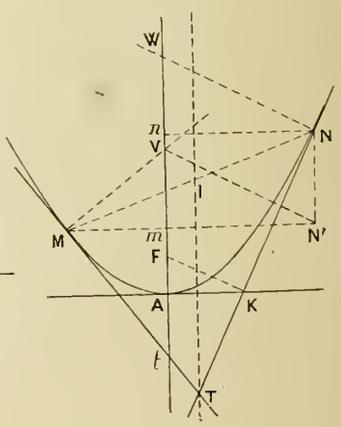


Fig. 50

En effet dans le triangle MNP, la droite joignant le milieu de la base MN au milieu d'une droite M'N', parallèle à cette base, passe par le sommet P.

2° Si la corde M'N' se rapproche indéfiniment de MN, à la limite, les sécantes MM' et NN' deviennent les tangentes MT et NT en M et N ; elles se coupent encore sur le diamètre II'.

Donc, la droite qui joint le point de concours de deux tangentes au milieu de la corde des contacts est le diamètre correspondant à cette corde.

3° Si la sécante MN se déplace parallèlement à elle-même, les deux points M et N se rapprochant indéfiniment l'un de l'autre, à la limite, cette sécante devient une tangente à la parabole et son point de contact J est sur le diamètre II' correspondant à cette direction MN.

52. **Problème n° 1.** — « Connaissant *deux points d'une parabole et* « *les tangentes en ces deux points*, trouver 1° la direction de l'axe ; 2° sa « position ; 3° le paramètre et le sommet de la parabole. »

Soient MT et NT (fig. 50) les deux tangentes, M et N les points de contact.

1° On joint le point de rencontre T des tangentes au milieu I de MN ; la droite TI est parallèle à l'axe.

2° Comme la sous-normale est constante et égale à $2p'$, on mène les deux normales MV et NW, et on doit les couper par une droite parallèle à TI et telle que les deux sous-normales obtenues sur cette droite soient égales. Pour cela, on mène NN' parallèle à TI, jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire Mm menée à la direction de l'axe par le point M. Par le point de rencontre N' de ces deux droites, on trace une parallèle N'V à NW ; elle coupe au point V la normale au point M ; l'axe passe en ce point V ; en effet, les triangles rectangles égaux NnW et N'mV donnent $mV = nW$.

On trace l'axe parallèle à la droite TI.

3° Comme la sous-tangente est double de l'ordonnée du point de contact, le milieu A de la sous-tangente mt est le sommet de la parabole. Le paramètre p' est la moitié de la sous-normale mV.

On pourrait obtenir le foyer F, et par suite vérifier la construction précédente, en prenant le point K où la tangente NT rencontre la tangente au sommet et menant par ce point une perpendiculaire à la tangente NT ; cette perpendiculaire coupe l'axe au foyer F.

53 **Problème n° 2.** — « Connaissant le *paramètre* p' d'une parabole « (ce qui définit complètement sa forme), la *direction de l'axe et deux* « *points* M et N de la courbe, déterminer : 1° *son axe en position ;* « 2° *son sommet* » (fig. 51).

Supposons le problème résolu ; soit la parabole passant par les deux points donnés M et N. Joignons ces deux points, menons le diamètre IK passant par le milieu I de MN ; la tangente à l'extrémité K de ce diamètre est parallèle à MN : menons la normale KL au point K, puis la droite LH perpendiculaire à l'axe. Dans le triangle KLH, le côté HK est égal à la sous-normale, et par suite à $2p'$.

Menons la perpendiculaire IL' au milieu I de MN, puis L'H' perpendiculaire à l'axe de la parabole ; le triangle IL'H' est égal au triangle KLH, et par suite $IH' = 2p'$.

La construction sera donc la suivante (fig. 51, à droite) :

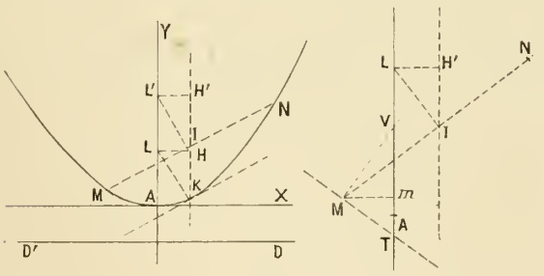


Fig. 51

1° Menons la droite MN, puis par son milieu I une parallèle à l'axe dont la direction est donnée. Menons au point I une parallèle à l'axe, sur laquelle nous prendrons une longueur $IH' = 2p'$. Menons la perpendiculaire H'L' à l'axe jusqu'à sa rencontre en L' avec la perpendiculaire menée en I à MN.

Le point L' est un point de l'axe de la parabole ; menons cet axe.

2° Du point M abaissons une perpendiculaire Mm sur l'axe ; portons sur l'axe $mV = 2p'$; la droite MV est la normale au point M ; la tangente est MT perpendiculaire à MV ; le milieu A de la sous-tangente mT est le sommet de la parabole. Le problème est donc résolu.

Remarque. — Lorsque l'axe de la parabole sera vertical, ce qui sera le cas le plus ordinaire dans les applications, on pourra opérer graphiquement par le procédé suivant :

On découpera dans une feuille de bristol ou de bois de placage un patron de la parabole de paramètre p', en ayant soin de le limiter à une corde perpendiculaire à l'axe ; cette corde sera appliquée contre la règle d'un Té ; par des déplacements combinés du Té et du patron, on arrivera à faire passer celui-ci par les deux points donnés (v. Stab. n° 270).

54. **Equation générale d'une parabole à axe vertical.**

(*a*) **Son sommet est sur l'axe des** y. — La parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet a pour équation (v. n° 50)

$$y = \frac{1}{4p'}x^2.$$

Soit d, l'ordonnée du sommet ; si nous transportons l'origine au point d'ordonnée $(-d)$, nous aurons

$$y = y' - d.$$

L'équation de la courbe prend alors la forme

$$y - d = \frac{1}{4p'}x^2,$$

qui, développée, devient

$$y = \frac{1}{4p'}x^2 + d.$$

Cette équation est de la forme générale

$$y = ax^2 + c.$$

(*b*) **Son sommet est sur l'axe des** x. — Soit l l'abscisse du sommet ; la parabole rapportée à son axe et à la tangente du sommet a pour équation

$$y = \frac{1}{4p'}x^2.$$

Si on transporte l'origine au point d'abscisse $(-l)$, on aura (v. n° 16).

$$x = x' - l$$

et l'équation de la courbe prendra la forme

$$y = \frac{1}{4p'}(x - l)^2,$$

qui, développée, devient

$$y = \frac{1}{4p'}x^2 - \frac{1}{2p'}xl + \frac{l^2}{4p'},$$

équation de la forme

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dans laquelle

$$b^2 - 4ac = 0.$$

(*c*) **Son sommet est quelconque.** — Soient $x = l$ et $y = d$ les coordonnées du sommet. L'équation de la courbe rapportée à son axe et à la tangente au sommet est

$$y = \frac{1}{4p'}x^2 ;$$

transportons l'origine au point dont les coordonnées sont $x = -l$ et $y = -d$; les formules de transformation sont (v. n° 16)

$$x = x' - l \qquad \text{et} \qquad y = y' - d,$$

et l'équation prend la forme

$$y - d = \frac{1}{4p'}(x - l)^2,$$

qui, développée, devient

$$y = \frac{1}{4p'}x^2 - \frac{1}{2p'}xl + \frac{1}{4p'}l^2 + d,$$

équation de la forme générale

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Remarque. — Dans les trois cas, le coefficient a de x^2 est égal à $\frac{1}{4p'}$. C'est donc lui qui indique la forme de la parabole.

(*d*) **Construire la parabole donnée par son équation** $y = ax^2 + bx + c$. — Cette parabole a son axe vertical ; son paramètre est donné par la relation

$$a = \frac{1}{4p'}, \qquad \text{d'où} \qquad p' = \frac{1}{4a}.$$

Il faut trouver son sommet.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right), \quad \text{complétant le carré (v. n° 8-c) :}$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

ou

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Identifions cette équation avec l'équation du § *d*

$$y - d = \frac{1}{4p'}(x - l)^2,$$

nous voyons que les coordonnées du sommet sont :

$$l = -\frac{b}{2a}, \qquad (\textit{abscisse})$$

$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (\textit{ordonnée.})$$

Exemple. — Construire la parabole $y = 3x^2 - 4x + 5$.

Le paramètre $p' = \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$,

l'abscisse du sommet $l = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$,

l'ordonnée du sommet $d = -\frac{16 - 4 \times 3 \times 5}{4 \times 3} = \frac{11}{3}$.

55. Addition des courbes.

(*a*) **Définition.** — L'addition de plusieurs courbes rapportées aux mêmes axes a pour but de construire une *nouvelle courbe* dont *l'ordonnée correspondant à une abscisse quelconque soit la somme algébrique des ordonnées des différentes courbes données, correspondant à la même abscisse.*

La courbe ainsi obtenue s'appelle la *courbe-somme* des courbes données.

(*b*) **Addition de droites.** — I. *Théorème.* — La somme de plusieurs droites est une autre droite dont la pente est la somme algébrique des pentes des droites données.

Soit à additionner les droites

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b', \qquad y = a''x + b''.$$

La somme sera $Y = (a + a' + a'')x + (b + b' + b'')$,

équation qui représente une droite ayant pour pente $A = (a + a' + a'')$, c'est-à-dire la somme algébrique des pentes des droites données.

II. *Tracé graphique de la somme de deux droites.* — Prenons les points m et n où les deux droites données rencontrent l'axe des x, relevons chacun de ces points respectivement sur l'autre droite en M et N ; la droite MN est la droite cherchée.

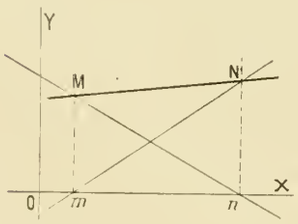


Fig. 52

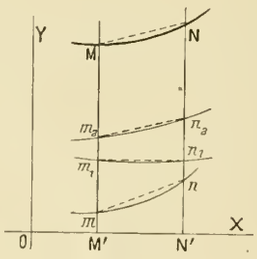


Fig. 53

(*c*) **Tangente à la courbe-somme de plusieurs autres.** — *Théorème.* — « La pente de la tangente en un point de la courbe-somme « de plusieurs courbes données, est égale à la somme algébrique des pentes « des tangentes aux points correspondants des courbes données. » (fig. 53).

Considérons deux ordonnées voisines ; prenons sur chaque courbe les points situés sur ces ordonnées et joignons-les par une ligne droite ; nous obtenons ainsi une série de sécantes mn, m_1n_1, m_2n_2, dont la somme est la sécante MN de la courbe-somme. Si l'ordonnée NN' se rapproche indéfiniment de l'ordonnée MM', à la limite, les sécantes deviennent les tangentes aux points m, m_1, m_2 et M aux courbes considérées ; et la tangente en M à la *courbe-somme* est la somme des tangentes en m, m_1 et m_2 aux courbes données. Donc la pente de la tangente à la *courbe-somme* est bien la somme des pentes des tangentes aux courbes données.

(*d*) **Addition d'une droite et d'une parabole.** — Soit la parabole

(1) $$y = \frac{1}{4p'}x^2, \qquad \text{et la droite}$$

$$y = bx + c, \qquad \text{leur somme est}$$

(2) $$y = \frac{1}{4p'}x^2 + bx + c.$$

C'est une parabole à axe vertical dont le paramètre est le même que celui de la première. C'est donc une courbe de même forme, mais dans une position différente (fig. 54).

Au sommet A de la parabole (1) correspond le point A' situé sur la droite, à laquelle la parabole-somme est tangente en ce point.

Au point m où la droite coupe l'axe des x correspond le point M commun aux deux paraboles.

Au point n d'intersection de la droite et de la parabole données correspond le point N d'ordonnée double. On a $\overline{nn'} = \overline{nN}$.

Ces données sont plus que suffisantes pour tracer la courbe-somme.

On peut trouver directement son sommet. Pour cela, menons la normale A'V au point A' à la parabole (2) ; la sous-normale est constante et égale à $2p'$. Prenons sur AA' la longueur $A'U = 2p'$; menons par U la parallèle UV à l'axe des x, le point V est sur l'axe de la parabole et cet axe est parallèle à oy.

La droite mn coupe l'axe en t, et le milieu de la sous-tangente $a't$ est le sommet de la parabole cherchée.

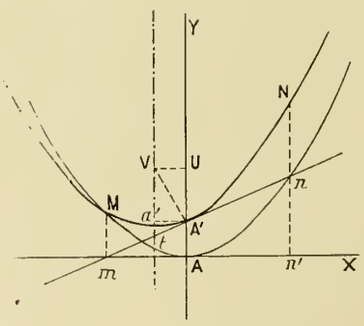


Fig. 54

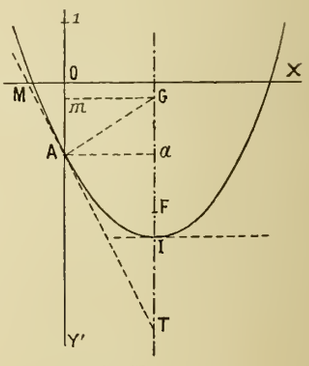


Fig. 55

(*e*) **Axe et sommet d'une parabole donnée par son équation** $y = ax^2 + bx + c$. — En considérant cette parabole comme la somme de la parabole $y = ax^2$ et de la droite $y = bx + c$.

On est ramené à la question précédente.

Application (fig. 55). — Construire la parabole $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 1$.

Construisons en MT la droite $y = -2x - 1$. On a pris $OA = -1$ et la pente de MT est -2.

Ajoutons-y la parabole $y = \frac{2}{3}x^2$, dont le paramètre est $p' = 3/8$.

La droite MT coupe l'axe des y au point A ; prenons sur OY' la longueur $Am = 2p' = 3/4$ et menons par le point m une parallèle à l'axe des x jusqu'à sa rencontre en G avec la perpendiculaire menée en A à la droite MT.

La parallèle à OY' menée par le point G est l'axe de la parabole cherchée. Le milieu I de la sous-tangente aT est le sommet.

(*f*) **Addition de deux paraboles.** — Soient les paraboles

$$y = \frac{1}{4p'}x^2 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{4p''}x^2.$$

La courbe somme sera

$$y = x^2\left(\frac{1}{4p'} + \frac{1}{4p''}\right) = \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right),$$

parabole ayant son sommet à l'origine et dont l'axe est l'axe des y.

Son paramètre P est donné par la relation

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''},$$

d'où

$$P = \frac{p'p''}{p' + p''}.$$

56. Parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

(*a*) **Equation de la courbe.** — La parabole MOP (fig. 56) peut être considérée comme résultant de l'addition de la droite OX qui lui est tangente en O, avec une parabole M'O'P' ayant comme axe le diamètre OY de la parabole MOP. On a donc MN = M'N'.

Appelons x et y les coordonnées du point M dans le système oblique YOX et x' et y' les coordonnées du point M' dans le système YOX'; on aura

$$y' = y \qquad \text{et} \qquad x' = x \cos \alpha,$$

si α est l'angle des axes OX et O'X'.

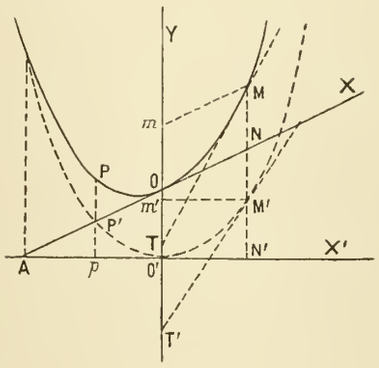


Fig. 56

L'équation de la parabole M'O'P' est

$$y' = \frac{1}{4p'} x'^2.$$

En remplaçant x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et de y, on aura

$$y = \frac{1}{4p'} x^2 \cos^2 \alpha,$$

telle est l'équation de la parabole MOP.

Cette équation est encore de la forme, en posant $p'' = p' : \cos^2 \alpha$

$$y = \frac{1}{4p''} x^2.$$

(*b*) **Sous-tangente.** — I. *Définition.* — On nomme, dans ce cas, sous-tangente la partie mT de l'axe des y comprise entre le point de rencontre T de cet axe avec la tangente, et son point de rencontre m avec la parallèle à l'axe des x menée par le point de contact.

II. *Théorème.* — « Dans la parabole rapportée à un diamètre et à la « tangente à l'extrémité de ce diamètre, la sous-tangente est égale au double « de l'ordonnée du point de contact. »

La tangente MT à la parabole MOP est la somme de la droite OX et de la tangente M'T' à la parabole M'O'P'

On a donc $\qquad O'T = OO' - O'T'.$

d'où $\qquad O'T' = OT.$

Dans la parabole M'O'P', on a, à cause de la propriété de la sous-tangente,

$$O'T' = O'm' = M'N'$$

et comme $\qquad M'N' = MN = mO,$

il en résulte $\qquad OT = Om.$ C. Q. F. D.

57. Problèmes graphiques relatifs à la parabole (fig. 57).

(*a*) **Problème I.** — « Connaissant deux tangentes en deux points A et B « d'une parabole, déterminer l'axe et le sommet de la courbe » (fig. 57).

1° On joint le point I intersection des deux tangentes au point C' milieu de la corde AB, ce qui donne en IC' le diamètre des cordes parallèles à AB et en C, milieu de IC', un point de la parabole.

2° On mène la parallèle BB' à IC' et la perpendiculaire C'B' à cette droite; et l'on joint leur point de rencontre B' au point C; cette droite prolongée jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée par le point A à IC', donne en A' le symétrique du point A par rapport à l'axe de la courbe; cet axe est donc la perpendiculaire OS menée à la droite AA' en son milieu O.

3° On projette en m' sur CC' le point m où la droite CA' rencontre l'axe; on mène Am' que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre au point S avec l'axe; ce point S est le sommet de la parabole.

Nota. — Nous avons déjà résolu ce problème d'une autre manière au n° 52.

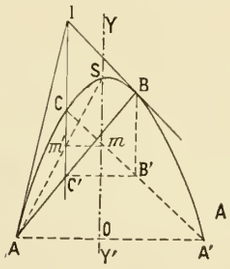


Fig. 57

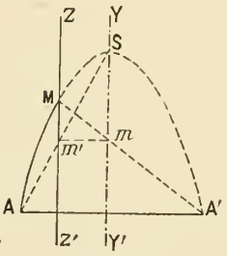


Fig. 58

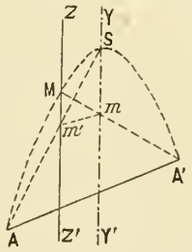


Fig. 58 bis

(*b*) **Problème 2.** — « Étant donné l'axe YY' d'une parabole, une corde « AA' et le sommet S de cette parabole, en obtenir un point M situé sur un « diamètre ZZ' » (fig. 58).

Joignons le point A au point S et par le point m' où cette droite rencontre ZZ', menons la parallèle $m'm$ à AA'; cette droite rencontre l'axe au point m; joignons ce point au point A'. Le point M où cette droite rencontre ZZ' est un point de la parabole.

Remarque. — Cette construction subsiste, que la corde AA' soit ou non perpendiculaire à l'axe (fig. 58 *bis*).

Nota. — Ces tracés sont dûs à M. **Bedaux**, Ingénieur, qui en a donné la démonstration dans le *Génie civil*, n° 11, t. XVI, p. 258. Nous ne la referons pas ici.

(*c*) **Tracé de la parabole par recoupement de droites pivotantes.** — Le lecteur placera ici le théorème que nous avons démontré dans le courant de l'ouvrage (n° 271, p. 203), et qui s'énonce ainsi :

Théorème : « Dans une parabole orientée verticalement, c'est-à-dire dont « l'axe est vertical, tous les angles inscrits dans un même segment ont leurs « côtés inclinés sous des pentes dont la somme est constante. »

58. Note sur le funiculaire de M. Collignon (fig. 59).

Dans la Statique graphique, (n° 49 p. 18), on a énoncé ce fait que le funiculaire tracé par la méthode de **M. Collignon** devient une parabole lorsque

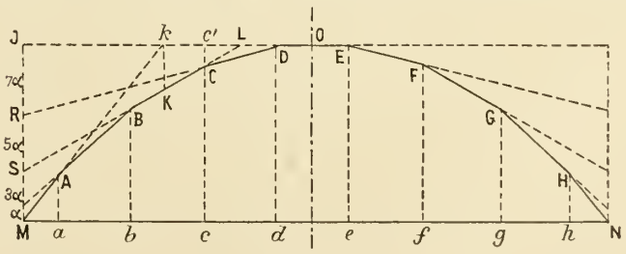


Fig. 59

la charge agissant sur la poutre est également répartie. Le côté moyen du funiculaire, JO, est à une hauteur constante au-dessus de MN; le point O est le sommet de la parabole. Le premier côté MA du funiculaire a une direction constante; il passe en k au milieu de OJ, et la parabole lui est tangente au point

M ; cette parabole est ainsi déterminée, et il suffit de montrer que chacun des côtés du funiculaire obtenu en supposant la charge discontinue est tangent en son milieu à la parabole. (Relire d'abord le n° 49, p. 18.)

Considérons (fig. 59) le troisième côté BC, par exemple, et cherchons la position du point L où il rencontre OJ.

Les triangles semblables LCc' et LSJ donnent :

$$\frac{Lc'}{c'J} = \frac{Cc'}{JS - Cc'}.$$

Dans les triangles semblables DCc' et DRJ, on a, en supposant MN partagé en 16 parties égales :

$$\frac{Cc'}{RJ} = \frac{Dc'}{DJ} = \frac{cd}{Md} = \frac{2}{7},$$

et comme RJ $= 7\alpha$, il en résulte Cc' $= 2\alpha$.

On aura donc $$\frac{Lc'}{c'J} = \frac{2\alpha}{12\alpha - 2\alpha} = \frac{1}{5},$$

ce qui prouve que L est le milieu de c'D et que Lk = LO, k étant le pied de l'ordonnée du milieu K de BC.

Le point K appartient bien à la parabole ; on a en effet : Kk = 2Cc' $= 4\alpha$.

et $$\frac{Kk}{JM} = \frac{4}{16} = \frac{\overline{Ok}^2}{\overline{OJ}^2}.$$

Ce qui veut dire que les abscisses des points tels que K sont proportionnelles aux carrés de leurs ordonnées ; c'est ce qui caractérise la parabole.

Le côté BC est donc bien tangent en son milieu K à la parabole.

On ferait la même démonstration pour les autres côtés.

§ 6. — Etude analytique de l'ellipse

59. Définition et construction de la courbe (fig. 60).

(*a*) **Définition.** — L'ellipse est une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes appelés *foyers* est constante.

(*b*) **Construction de la courbe par points.** — Nous appelons $2a$ la longueur de cette somme constante. Soient F et F' les foyers. Menons la droite FF', prenons son milieu O, et à partir de ce point, portons à droite et à gauche

$$OA = OA' = a;$$

les points A et A' appartiennent à la courbe, car on a

$$AF = A'F' \quad \text{et}$$

$$AF + AF' = 2a \; ; \quad \text{de même}$$

$$A'F' + AF' = 2a.$$

Prenons un point P sur AA' ; du point F' comme centre, avec A'P comme rayon, décrivons un arc de cercle ; du point F avec AP comme rayon, décrivons un second arc de cercle qui coupe le premier en deux points

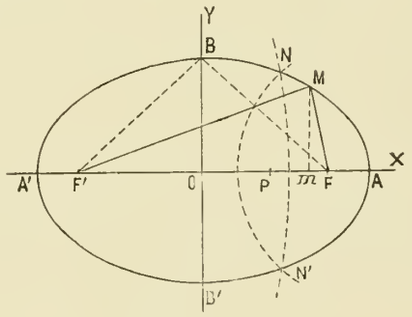


Fig. 60

N et N' symétriques par rapport à AA' ; ces deux points appartiennent à la courbe. Donc la droite AA' est un axe de cette courbe ; on l'appelle *grand axe*. Nous pourrons faire la même construction en prenant F comme centre d'un cercle de rayon A'P, et F' comme centre d'un cercle de rayon AP ; les deux points ainsi obtenus seront symétriques des points N et N' obtenus précédemment, par rapport à la droite BB' perpendiculaire au point O à AA'. Cette droite BB' est aussi un axe de la courbe.

Prenons sur cette droite les points B et B' tels que

$$FB = F'B = FB' = F'B' = a;$$

les points B et B' appartiennent à la courbe. BB' est le *petit axe* de l'ellipse et on le désigne par $2b$. La construction indiquée n'est possible que si le point P est choisi entre les deux foyers.

(*c*) **Construction de l'ellipse d'un mouvement continu,** *ou tracé des jardiniers.* — On fixe en F et F' les extrémités d'un fil ayant pour longueur $2a$; on tend ce fil avec la pointe du crayon, que l'on déplace de A en A' d'abord au-dessus de l'axe, puis au-dessous, en tenant toujours le fil bien tendu.

(*d*) **Propriétés immédiates de l'ellipse.** — 1° L'ellipse a *deux axes* perpendiculaires entre eux ; l'un, le grand axe, est la droite AA' qui joint les deux foyers ; l'autre, le petit axe, est la droite BB' perpendiculaire au milieu de FF'. Les points A et A', B et B' sont les *sommets* de l'ellipse.

2° Si on appelle $2c$ la *distance focale* FF' on voit que, par la manière même dont on a construit les points B et B', on a la relation

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

60. Equation de l'ellipse rapportée à ses axes. — Soient x et y les coordonnées d'un point M de la courbe. Par définition, on a (fig. 60)

$$MF + MF' = 2a.$$

Dans le triangle rectangle MmF', on a

$$\overline{MF'}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mF'}^2,$$

ou $\overline{MF'}^2 = y^2 + (x+c)^2$, d'où $MF' = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$.

Dans le triangle rectangle MmF, on a

$$\overline{MF}^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mF}^2,$$

ou $MF^2 = y^2 + (x-c)^2$, d'où $MF = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$.

On aura donc

$$\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = 2a.$$

Faisons passer l'un des radicaux dans le second membre de l'équation et élevons les deux membres au carré, il vient :

$$y^2 + (x+c)^2 = y^2 + (x-c)^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2},$$

que nous pourrons écrire après simplification

$$a^2 - cx = a\sqrt{y^2 + (x-c)^2}.$$

Elevons les deux membres au carré, il vient :

$$a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx,$$

ou $$a^2(a^2 - c^2) = a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2)$$

et comme $a^2 - c^2 = b^2$, cette équation devient

$$a^2b^2 = a^2y^2 + b^2x^2,$$

ou en divisant les deux membres par a^2b^2,

$$\text{(A)} \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Telle est l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

61. L'ellipse définie comme projection d'un cercle. — Soit un cercle dont le plan fait un angle α avec un plan de projection que nous ferons passer par l'un de ses diamètres AA'. Prenons pour axe des x ce diamètre, et pour axe des y, sur le plan de projection, une perpendiculaire menée à l'axe des x par le centre du cercle (fig. 61).

Un point M du cercle étant projeté en m sur l'ellipse, ce point m aura pour coordonnées $mm' = y$ et $Om' = x$; on a

$$mm' = Mm' \cos\alpha,$$

d'où $$\overline{mm'}^2 = \overline{Mm'}^2 \cos^2\alpha.$$

Mais, si a est le rayon du cercle donné,

$$\overline{Mm'}^2 = OM^2 - \overline{Om'}^2 = a^2 - x^2, \qquad \text{on a donc}$$

$$mm'^2 = y^2 = (a^2 - x^2)\cos^2\alpha,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

équation d'une ellipse dans laquelle a étant le demi-grand axe, le demi-petit axe sera $a\cos\alpha$.

Menons le diamètre du cercle OB, perpendiculaire à AA' ; la projection du point B est B', et l'on a

$$OB' = OB\cos\alpha = a\cos\alpha\,;$$

c'est le demi-petit axe de l'ellipse et si nous l'appelons b, l'équation prendra la forme

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

identique à l'équation (A) trouvée au n° 60.

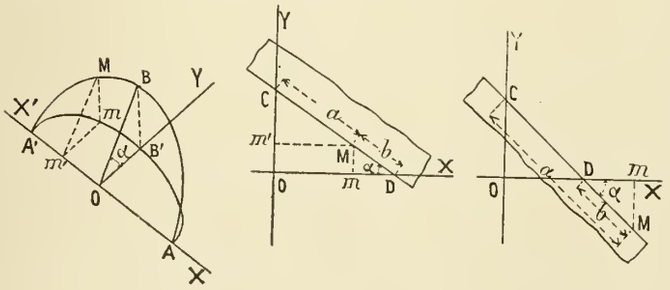


Fig. 61

62. L'ellipse définie par le mouvement d'une droite. Tracés par la bande de papier.

(*a*) **Tracé par la somme des axes.** — Les extrémités d'une droite CD, de longueur constante et égale à la somme $(a+b)$ des deux demi-axes, glissent sur deux axes rectangulaires OX et OY ; le point M de cette droite, tel que $MC = a$ et $MD = b$, engendre l'ellipse ayant pour demi-axes a et b. En effet :

Appelons x et y les coordonnées du point M, α étant l'angle que fait la droite CD dans cette position avec l'axe des x, nous avons :

$$y = b\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad x = a\cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha,$$

et

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad \text{Equation d'une ellipse.}$$

(*b*) **Tracé par la différence des axes.** — Les extrémités d'une droite CD, de longueur constante égale à la différence $(a-b)$ des demi-axes, glissent sur deux axes rectangulaires OX et OY; le point M de cette droite tel que $MC = a$ et $MD = b$ engendre l'ellipse ayant pour demi-axe a et b.

En appelant x et y les coordonnées du point M, α étant l'angle que fait la droite CD dans l'une de ses positions avec l'axe des x, nous avons :

$$y = b\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad x = a\cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2\alpha,$$

et

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad \text{Equation d'une ellipse.}$$

De là résultent pour tracer l'ellipse deux procédés connus sous le nom de *tracés par la bande de papier*.

63. Diamètres dans l'ellipse.

(*a*) **Définition.** — On dit que deux diamètres sont *conjugués* lorsque chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

(*b*) **Diamètres conjugués dans l'ellipse** (fig. 62). — L'ellipse est la projection d'un cercle ; c'est sur cette propriété que nous allons nous baser.

Dans un cercle deux diamètres perpendiculaires sont conjugués. Soit un cercle O; sa projection sur un plan est une ellipse ; deux diamètres perpendiculaires AB et CD du cercle ont pour projections deux diamètres conjugués ab et cd de l'ellipse ; en effet la corde EF parallèle à AB a pour projection ef parallèle à ab, et le milieu I de EF, qui est sur CD, a pour projection le milieu i de ef, et ce point i est sur cd.

Le carré MNPQ circonscrit au cercle, et ayant ses côtés parallèles aux diamètres AB et CD, a pour projection le parallélogramme $mnpq$ circonscrit à l'ellipse et ayant ses côtés parallèles à ab et cd ; les points a, b, c, d, sont respectivement les milieux de ces côtés ; l'ellipse est tangente en ces points aux quatre côtés du parallélogramme.

(*c*) **Centre de l'ellipse.** — Tous les diamètres passent au point O qui est leur milieu ; ce point est le *centre* de l'ellipse.

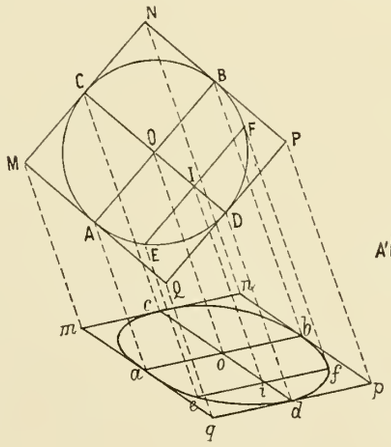


Fig. 62

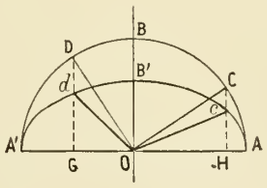


Fig. 63

64. Théorèmes d'Apollonius.

(*a*) **1er Théorème.** — « La somme des carrés de deux diamètres conjugués d'une ellipse est égale à la somme des carrés des axes. »

L'ellipse peut être considérée comme la projection d'un cercle décrite sur son grand axe AA' comme diamètre ; deux diamètres perpendiculaires OC et OD de ce cercle donnent les diamètres conjugués Oc et Od de l'ellipse.

Soit $Oc = a'$ et $Od = b'$.

Comme on a

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{b}{a},$$

on aura aussi

$$\frac{cH}{CH} = \frac{b}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad cH = CH \times \frac{b}{a},$$

et

$$\frac{dG}{DG} = \frac{b}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad dG = DG \times \frac{b}{a}.$$

Dans le triangle OcH, on a, puisque $Oc = a'$;

$$a'^2 = cH^2 + OH^2,$$

ou

$$(1) \qquad a'^2 = CH^2 \times \frac{b^2}{a^2} + OH^2.$$

Dans le triangle GdO, on a, puisque $Od = b'$

$$b'^2 = OG^2 + dG^2,$$

ou

$$b'^2 = OG^2 + \overline{DG}^2 \times \frac{b^2}{a^2}.$$

Et comme les triangles égaux DOG, COH donnent

$$OG = CH \qquad \text{et} \qquad DG = OH,$$

on a

$$(2) \qquad b'^2 = CH^2 + OH^2 \times \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{d'où, ajoutant (1) et (2)}$$

$$a'^2 + b'^2 = (CH^2 + OH^2)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right),$$

et comme

$$CH^2 + OH^2 = a^2,$$

il vient $$a'^2 + b'^2 = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right),$$

ou $$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*b*) 2e **Théorème.** — « Le parallélogramme construit sur deux diamètres « conjugués à une surface égale à celle du rectangle construit sur les axes. »

Considérons un cercle et le carré circonscrit ; si nous projetons sur un plan, le cercle se projette suivant une ellipse, et le carré suivant un parallélogramme circonscrit à cette ellipse.

La surface de ce parallélogramme est égale au produit de la surface du carré par le cosinus de l'angle des deux plans.

Tous les carrés circonscrits au cercle étant égaux tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, et qui sont les projections des carrés, auront même surface ; l'un d'eux est le rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes, ce qui démontre le théorème.

Si a' et b' sont deux demi-diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ on aura la relation

$$a'b' \sin\theta = ab.$$

(*c*) *Connaissant deux diamètres conjugués d'une ellipse, trouver ses axes* (fig. 64).

Soient AA' et BB' les deux diamètres conjugués donnés ; menons par le point B la perpendiculaire BL à AA' et prenons sur cette droite la longueur BK = OA ; joignons le point O au point K et décrivons sur OK comme diamètre une circonférence ; joignons le point B au centre I ; cette droite coupe la circonférence en deux points M et N ; je dis que BN est égal au demi-grand axe et BM au demi-petit axe de l'ellipse. En effet :

D'après les théorèmes d'Apollonius, on a :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \qquad \text{et}$$

$$ab = a'b' \sin\theta.$$

d'où en doublant les deux membres de la deuxième égalité et la retranchant de la première

$$(a - b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta.$$

Dans le triangle BOK, nous avons :

$$OK^2 = OB^2 + BK^2 - 2BK \times BL,$$

et comme $$BL = OB \sin BOL = b' \sin\theta,$$

il vient :

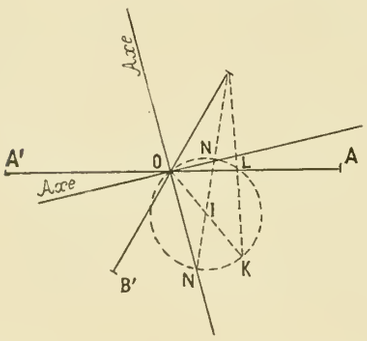
$$OK^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta, \qquad \text{donc}$$

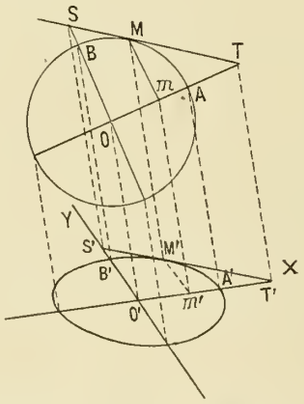
OK ou son égal $$MN = a - b.$$

De plus, dans le cercle, les deux sécantes BN et BK issues du point B donnent :

$$BM \times BN = BL \times BK = a'b' \sin\theta.$$

BM et BN, dont la différence est $(a-b)$ et dont le produit est $a'b' \sin\theta$ sont donc bien les deux demi-axes de l'ellipse, en grandeur.





Erratum (fig. 64) : Ecrire B au point symétrique de B' par rapport au centre O ; et écrire M au lieu de celui des deux points N qui est le plus haut.

Fig. 64 Fig. 65

Menons les droites OM et ON, ce sont les deux axes en position.

Le point B appartient bien, en effet, à l'ellipse dont les axes sont dirigés suivant OM et ON et ont pour demi-longueurs a et b, et ceci à cause de la propriété donnée (no 61-*b*) permettant de tracer l'ellipse par la bande de papier au moyen de la différence des axes. Le point B' symétrique de B par rapport au centre appartient à la même ellipse ; enfin il en est de même des points A et A' puisque AA' est le diamètre conjugué de BB' dans l'ellipse qui a pour axes a et b, en vertu des théorèmes d'Apollonius.

65. **Equation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués (coordonnées obliques)** (fig. 65).

D'après ce que nous avons dit, l'ellipse est la projection d'un cercle ; deux diamètres conjugués O'A' et O'B' de l'ellipse sont les projections de deux diamètres rectangulaires OA et OB du cercle.

Un point M du cercle se projette en M' sur l'ellipse, et ses coordonnées, si on prend pour axes O'A' et OB' sont $O'm' = x$ et $m'M' = y$.

Mais M'm' est la projection de Mm qui est perpendiculaire à OA dans le cercle. Nous avons alors les relations

$$\frac{M'm'}{Mm} = \frac{O'B'}{OB},$$

et $$\frac{O'm'}{Om} = \frac{O'A'}{OA},$$

d'où $$Mm = \frac{M'm' \times OB}{O'B'} = \frac{y \times OA}{b'},$$

et $$Om = \frac{O'm' \times OA}{O'A'} = \frac{x \times OA}{a'}.$$

Et comme dans le cercle, on a

$$Mm^2 + Om^2 = OA^2,$$

il en résulte :

$$\frac{y^2 \times OA^2}{b'^2} + \frac{x^2 \times OA^2}{a'^2} = OA^2,$$

ou $$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{x^2}{a'^2} = 1.$$

C'est l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués ; elle est de même forme que l'équation obtenue en rapportant la courbe à ses axes.

66. **Equation de la tangente à l'ellipse.**

I. *L'ellipse est rapportée à ses axes.* — (*a*) **Tangente en un point de l'ellipse.** — L'ellipse étant la projection d'un cercle décrit sur son grand axe comme diamètre, un point M' de l'ellipse dont les coordonnées sont x', y' est la projection d'un point M du cercle dont les coordonnées sont x' et $\frac{ay'}{b}$ (on peut suivre sur la fig. 65, en y supposant OA parallèle à O'A').

La tangente MT en ce point M du cercle a pour équation (v. no 45) :

$$\frac{ayy'}{b} + xx' = a^2,$$

d'où $$y = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2 - xx'}{y'}\right).$$

On obtiendra les ordonnées de la tangente M'T' à l'ellipse en réduisant celles de la tangente au cercle dans le rapport de b à a.

L'équation de la tangente à l'ellipse sera donc

$$y = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2 - xx'}{y'}\right),$$

ou (B) $$\frac{yy'}{b^2} + \frac{xx'}{a^2} = 1.$$

(*b*) **Tangente menée à l'ellipse par un point extérieur. Corde des contacts.** — En raisonnant comme dans le cas du cercle, on reconnaît que la corde des contacts des tangentes issues d'un point $(\alpha\beta)$ a pour équation (α et β sont les coordonnées du point donné) :

$$\frac{\beta y}{b^2} + \frac{\alpha x}{\alpha^2} = 1.$$

On reconnaîtrait qu'il y a :

1° Deux points de contact si l'on a

$$\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} > 1,$$

c'est-à-dire si le point $(\alpha\beta)$ est à l'extérieur de l'ellipse.

2° Un seul point de contact si

$$\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} = 1,$$

et alors le point $(\alpha\beta)$ est sur l'ellipse.

3° Pas de point de contact si

$$\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}<1;$$

dans ce cas, le point $(\alpha\beta)$ est dans l'intérieur de la courbe.

II. *L'ellipse est rapportée à deux diamètres conjugués* (fig. 65).

(*a*) **Tangente en un point de l'ellipse.** — L'ellipse étant la projection d'un cercle la tangente M'T' à l'ellipse est la projection de la tangente MT au cercle. Son abscisse à l'origine est O'T', projection de OT abscisse à l'origine de la tangente au cercle. De même son ordonnée à l'origine O'S' est la projection de OS, ordonnée à l'origine de la tangente au cercle. (Voir fig. 65.)

On a les relations :

$$\frac{OT}{O'T'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{Om}{O'm'},$$

d'où $\quad O'T'=\dfrac{OT\times O'A'}{OA}\quad$ et $\quad\dfrac{OA}{Om}=\dfrac{O'A'}{O'm'}.$

Mais dans le cercle $\quad OT=\dfrac{OA^2}{Om}.$

Donc $\quad O'T'=\dfrac{OA\times O'A'}{Om}=\dfrac{\overline{O'A'}^2}{O'm'}=\dfrac{a'^2}{x}.$

Les relations $\quad\dfrac{OS}{O'S'}=\dfrac{OB}{O'B'}=\dfrac{Mm}{M'm'}$

donnent $\quad O'S'=\dfrac{OS\times O'B'}{OB}\quad$ et $\quad\dfrac{OB}{Mm}=\dfrac{O'B'}{M'm'},$

et comme dans le cercle $\quad OS=\dfrac{\overline{OB}^2}{Mm},$

il vient :

$$O'S'=\frac{OB\times O'B'}{Mm}=\frac{\overline{O'B'}^2}{M'm'}=\frac{b'^2}{y'}.$$

L'équation de la tangente à l'ellipse est alors, en fonction de ses traces (v. n° 37)

$$(B')\qquad \frac{yy'}{b'^2}+\frac{xx'}{a'^2}=1.$$

(*b*) **Tangente menée à l'ellipse par un point extérieur. Corde de contact.** — En opérant comme dans le cas du cercle, on reconnaît que la corde des contacts des tangentes issues d'un point $(\alpha\beta)$ a pour équation

$$\frac{\beta y}{b'^2}+\frac{\alpha x}{a'^2}=1.$$

Il y a comme dans le cas de l'ellipse rapportée à ses axes deux tangentes, ou bien une seule, ou encore pas de tangente, suivant que $\dfrac{\beta^2}{b'^2}+\dfrac{\alpha^2}{a'^2}$ est plus grand, égal, ou plus petit que 1.

67. Pôle et polaire dans l'ellipse.

(*a*) **Propriétés du pôle et de la polaire.** — L'ellipse pouvant toujours être considérée comme la projection d'un cercle, les propriétés du pôle et de la polaire seront déduites de celles trouvées dans le cas du cercle.

1° Si par un point fixe on mène des droites rencontrant une ellipse, et que par les points d'intersection de ces droites avec la courbe, on lui mène des couples de tangentes, les points d'intersection de ces tangentes sont en ligne droite ; cette droite est la *polaire* du point fixe, qui est le *pôle*.

2° Le pôle étant à l'intérieur de la courbe, la polaire est à l'extérieur ; elle part de l'infini lorsque le pôle est au centre de l'ellipse, pour lui devenir tangente lorsque le pôle est sur la courbe ; le pôle devenant extérieur à l'ellipse, la polaire coupe la courbe et elle vient passer au centre lorsque le pôle s'est éloigné à l'infini.

3° Le pôle d'une droite est situé sur le diamètre conjugué de la direction de cette droite ; la moitié de ce diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux longueurs, comptées sur ce diamètre, du centre au pôle, d'une part, et du centre à la polaire d'autre part.

4° Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite, et réciproquement, les pôles de toutes les droites qui passent par un point fixe sont situés sur la polaire de ce point.

(*b*) **Equation de la polaire.** — La polaire d'un point $(\alpha\ \beta)$ par rapport à l'ellipse a pour équation

$\dfrac{\beta y}{b^2}+\dfrac{\alpha x}{a^2}=1,$ si l'ellipse est rapportée à ses axes ;

$\dfrac{\beta y}{b'^2}+\dfrac{\alpha x}{a'^2}=1,$ si l'ellipse est rapportée à deux diamètres conjugués.

68. Antipôle et antipolaire par rapport à l'ellipse.

— L'*antipôle* d'une droite est le point symétrique, par rapport au centre de l'ellipse, du pôle de cette droite.

L'*antipolaire* d'un point est la droite symétrique, par rapport au centre de l'ellipse, de la polaire de ce point.

L'équation de l'antipolaire d'un point $(\alpha\beta)$ est

$\dfrac{\beta y}{b^2}+\dfrac{\alpha x}{a^2}=-1,$ si l'ellipse est rapportée à ses axes ;

$\dfrac{\beta y}{b'^2}+\dfrac{\alpha x}{a'^2}=-1,$ si l'ellipse est rapportée à deux diamètres conjugués.

69. Notions sur les polaires réciproques.

(*a*) **Définition.** — Considérons dans un plan un contour polygonal ABCF dont nous numérotons les côtés 1, 2, 3, 4 et 5, et une ellipse D ; prenons les pôles 1', 2', 3', 4' et 5' des côtés du contour par rapport à l'ellipse ; joignons-les deux à deux par les droites *a*, *b*, *c*, *d*. D'après les propriétés démontrées des pôles et polaires, ces côtés *a*, *b*, *c* et *d* seront les polaires des sommets A, B, C et D de la figure proposée. Ainsi les sommets de l'une des figures seront les pôles des côtés de l'autre, et réciproquement ; ce qui leur a fait donner le nom de *figures polaires réciproques* ; l'ellipse s'appelle *ellipse directrice*.

Remarque. — Si plusieurs points sont en ligne droite dans une figure, les droites qui leur correspondent dans sa polaire réciproque passent par un même point, et réciproquement.

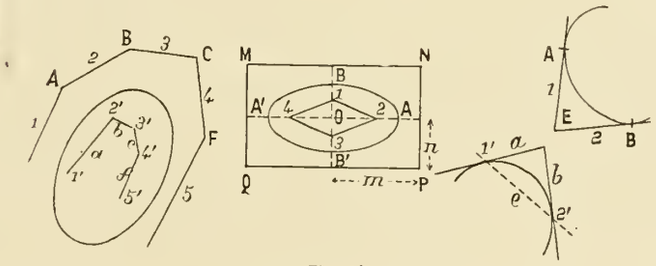


Fig. 66

(*b*) **Application.** — Trouver la figure polaire réciproque du contour d'un rectangle par rapport à une ellipse ayant même centre, et ayant ses axes parallèles aux côtés du rectangle.

Cette figure est un losange dont chaque sommet est le pôle de l'un des côtés du rectangle, et dont chaque côté est la polaire d'un sommet du rectangle.

a et *b* étant les demi-axes de l'ellipse, *m* et *n*, les demi-dimensions du rectangle, les demi-diagonales du losange sont :

$$O1=\frac{b^2}{n}\qquad\text{et}\qquad O2=\frac{a^2}{m}.$$

(*c*) **Définition.** — Une ellipse directrice D, étant donnée ainsi qu'une courbe C, on appelle *courbe polaire réciproque* de la première par rapport à l'ellipse, une courbe C' telle que la droite polaire d'un point M' de cette courbe par rapport à l'ellipse D soit tangente à la courbe C ; et réciproquement, la droite polaire d'un point de la courbe C sera tangente à la courbe C'.

(*d*) **Construction de la courbe polaire réciproque d'une courbe donnée par rapport à une ellipse.** — La courbe C étant donnée, menons-lui des tangentes aux points A et B ; les polaires *a* et *b* de ces deux points par rapport à l'ellipse sont tangentes à la courbe C'.

Le pôle de la droite AE est le point 1' de la droite *a*, celui de BE est le point 2' de la droite *b* ; les points 1' et 2' sont sur la courbe C' et les droites *a* et *b* sont respectivement tangentes en ces points à la courbe C'.

La droite 1'2' est la polaire du point E d'intersection des tangentes à la courbe C.

De là le moyen de construire la courbe C' par points et tangentes.

Remarque. — Si la courbe C est symétrique par rapport au centre de l'ellipse directrice, la courbe C' sera également symétrique par rapport au centre de cette même ellipse directrice.

(*e*) **Application. Polaire réciproque d'un cercle par rapport à un cercle de même centre.** — Cette courbe est un autre cercle de même centre que les deux premiers ; r étant le rayon du cercle directeur, R le rayon du cercle donné, le rayon R' du cercle cherché a pour valeur

$$R' = \frac{r^2}{R}.$$

(*f*) **Antipolaires réciproques.** — *Définition et construction.* — Une ellipse directrice D étant donnée, ainsi qu'une courbe C, on appelle *courbe antipolaire réciproque* de la courbe C par rapport à l'ellipse une courbe C″ telle que la droite antipolaire d'un point M' de cette courbe par rapport à l'ellipse soit tangente à la courbe C ; et réciproquement, la droite antipolaire d'un point de la courbe C sera tangente à la courbe C″.

La construction de la courbe C″ se fera en menant des couples de tangentes à la courbe C et prenant les antipolaires de leurs points de contact et de leur point de rencontre ; ces droites fourniront deux tangentes à la courbe C″ et la corde de contact de ces tangentes (v. Stabilité, n° 319).

Remarque. — Si la courbe C est symétrique par rapport au centre de l'ellipse, son antipolaire réciproque C″ le sera également, et de plus elle sera confondue avec la courbe polaire réciproque C' de la courbe C.

§ 7. — Étude analytique de l'hyperbole

70. Définition et construction de la courbe.

(*a*) **Définition.** — L'hyperbole est une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes appelés *foyers* est constante. Nous désignerons les foyers par les lettres F et F' (fig. 67).

(*b*) **Construction de la courbe par points.** — Nous appelons $2a$ la longueur de cette différence constante. Menons la droite FF', prenons son milieu O, et à partir de ce point portons à droite et à gauche

$$OA = OA' = a ;$$

les points A et A' appartiennent à la courbe, car on a

$$AF = A'F'$$

et $$AF' - AF = 2a ;$$

de même $$A'F - A'F' = 2a.$$

Prenons un point P sur AA' ; du point F' comme centre avec A'P comme rayon décrivons un arc de cercle ; du point F comme centre avec PA comme rayon décrivons un second arc de cercle qui coupe le premier en deux points N et N', symétriques par rapport à AA' ; ces deux points appartiennent à la courbe ; donc la droite AA' est un axe de la courbe ; on l'appelle l'*axe transverse.* Nous pouvons faire la même construction en prenant F comme centre d'un cercle de rayon A'P et F' comme centre d'un cercle de rayon AP ; les deux points ainsi obtenus seront symétriques des points N et N', obtenus précédemment, par rapport à la droite BB' perpendiculaire, au point O, à AA' ; cette droite BB' est aussi un axe de la courbe. La construction indiquée n'est possible que si le point P est en dehors du segment FF' de l'axe ; pour avoir tous les points de la courbe, il faut faire occuper au point P toutes les positions possibles sur le prolongement de OF dans le sens OF. La courbe se compose donc de deux branches infinies symétriques par rapport à BB' et à AA'. Il n'y a pas de points de la courbe sur BB', c'est pourquoi cet axe est appelé *axe non transverse.* Cependant, on convient d'appeler longueur de cet axe une longueur $2b$ telle que $b^2 = c^2 - a^2$, $2c$ étant la distance focale FF'.

Le point de rencontre des axes est le *centre* de la courbe.

(*c*) **Propriétés immédiates de l'hyperbole.** — 1° L'hyperbole a *deux axes* perpendiculaires entre eux : l'un, l'axe transverse, est la droite qui joint les foyers et les points A et A' de la courbe situés sur cet axe sont les *sommets* de l'hyperbole ; l'autre, l'axe non transverse, est perpendiculaire à FF' en son milieu.

2° Par définition, on a entre la distance focale et les longueurs des axes la relation

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

71. Equation de l'hyperbole rapportée à ses axes (fig. 67).

— Soient x et y les coordonnées d'un point M de la courbe ; par définition, on a :

$$MF' - MF = 2a.$$

Dans le triangle rectangle MmF', on a :

$$MF'^2 = \overline{Mm}^2 + \overline{mF'}^2,$$

ou $$MF'^2 = y^2 + (c + x)^2, \qquad \text{d'où} \qquad MF' = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}.$$

Dans le triangle MmF, on a :

$$MF^2 = Mm^2 + mF^2,$$

ou $$MF^2 = y^2 + (x - c)^2, \qquad \text{d'où} \qquad MF = \sqrt{y^2 + (x - c)^2}.$$

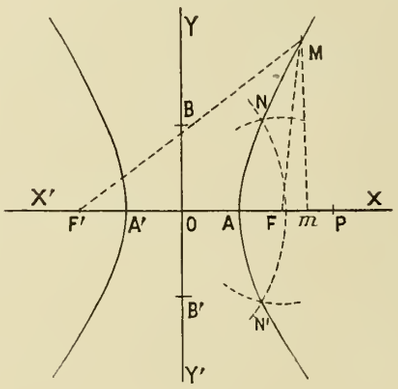


Fig. 67

On aura donc

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a.$$

Faisons passer le deuxième radical dans le second membre de l'équation, et élevons les deux membres au carré, il vient :

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2},$$

que nous pouvons écrire après simplification :

$$cx - a^2 = a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}.$$

Elevons les deux membres au carré, il vient :

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx,$$

ou $$-a^2(c^2 - a^2) = a^2y^2 - x^2(c^2 - a^2),$$

et comme $c^2 - a^2 = b^2$, l'équation devient

$$-a^2b^2 = a^2y^2b - {}^2x^2,$$

ou en divisant les deux membres par a^2b^2

$$(1) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1.$$

Telle est l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes.

72. Asymptotes de l'hyperbole.

(*a*) **Définition.** — Une *asymptote* à une branche de courbe infinie est une droite dont la courbe s'approche indéfiniment, de manière que la distance d'un point de la courbe à la droite ait pour limite zéro, lorsque le point considéré s'éloigne à l'infini sur la courbe.

(*b*) **Théorème.** — « Si une droite, non parallèle à l'axe des y, est asymptote « à une courbe, la différence entre les ordonnées d'un point de l'asymptote et d'un

« point de la courbe, ayant même abscisse x, tend vers zéro lorsque l'abscisse x « croît indéfiniment. » En effet : (fig. 68)

Soit M un point de la courbe, MP sa distance à l'asymptote, distance qui, par définition, tend vers zéro lorsque l'abscisse croît indéfiniment.

La différence MN des ordonnées du point M de la courbe et du point N de l'asymptote est

$$MN = \frac{MP}{\sin MNP},$$

et comme l'angle MNP que fait l'asymptote avec l'ordonnée est constant et différent de zéro, la longueur MN tendra vers zéro en même temps que MP, c'est-à-dire lorsque l'abscisse croît indéfiniment. C. Q. F. D.

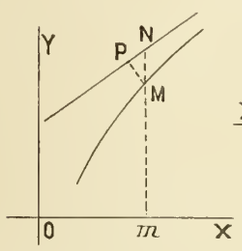


Fig. 68

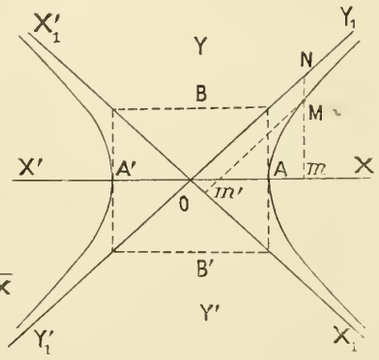


Fig. 68 bis

(*c*). **L'hyperbole a deux asymptotes qui sont les diagonales du rectangle des axes.** — Considérons les diagonales du rectangle des axes ; ce sont les droites ayant pour équations

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Prenons un point M d'abscisse x sur l'une des branches de la courbe et cherchons la différence entre l'ordonnée de ce point et celle du point N de même abscisse sur la droite $y = \frac{b}{a}x$.

L'ordonnée du point M qui est positive est, en tirant y de l'équation (1) du n° 71 :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \quad \text{celle du point N est} \quad y' = \frac{b}{a}x.$$

La différence est $\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

ou
$$\overline{MN} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

qu'on peut transformer en multipliant et divisant par $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ en l'expression

$$\overline{MN} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

dont la valeur tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

La droite $y = \frac{b}{a}x$ est donc asymptote à la branche supérieure droite de la courbe. On démontrerait de même qu'elle est asymptote à la branche inférieure de gauche ; et que la droite $y = -\frac{b}{a}x$ est asymptote à la branche inférieure droite et à la branche supérieure gauche de l'hyperbole. Les deux branches de la courbe sont situées dans les angles opposés par le sommet qui renferment les foyers.

(*d*) **Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.** — Soient x et y les coordonnées d'un point de la courbe rapportée à ses axes, et soient $x' = Om'$ et $y' = m'M$ les coordonnées du même point, la courbe étant rapportée à ses asymptotes OX_1 et OY_1 (fig. 68 bis).

Projetons sur OX et sur OY les deux chemincments OmM et $Om'M$ terminés aux mêmes extrémités, O et M ; nous aurons, en appelant α l'angle d'une asymptote avec l'axe OX (v. Théorème des projections n° 29) :

$$x = (x' + y')\cos\alpha,$$
$$y = (y' - x')\sin\alpha,$$

et comme $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, on a (v. Trigonométrie n° 27-*c*) :

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation de l'hyperbole qui est

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1, \qquad \text{il vient}$$

$$\frac{(y' - x')^2}{a^2 + b^2} - \frac{(x' + y')^2}{a^2 + b^2} = -1,$$

ou
$$4x'y' = a^2 + b^2,$$

ou
$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{c^2}{4},$$

équation de la forme $xy = K^2$, K étant une quantité constante : telle est l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

73. **Hyperbole déterminée par le mouvement d'une droite. Tracé par la bande de papier.**

(*a*) **Théorème.** — Deux droites OX et OY étant données, ainsi qu'un point fixe M entre ces deux droites, si on mène par le point M une droite rencontrant les droites OX et OY respectivement en N et P, et qu'on prenne sur cette droite une longueur $PQ = MN$, le lieu géométrique du point Q est une hyperbole passant au point M et ayant pour asymptotes les droites OX et OY. (Le lecteur fera lui-même la figure en lisant le texte.)

Soient $x' = Om$ et $y' = Mm$ les coordonnées du point M, qui sont connues, et soient $x = Oq$ $y = qQ$ les coordonnées du point Q.

On a par construction $MN = PQ$.

Les triangles égaux PQq', MNm donnent

$$Qq' = mN = x'$$

et
$$Pq' = Mm = y'.$$

Les triangles semblables MmN et $Pm'M$ donnent

$$\frac{mN}{Mm'} = \frac{Mm}{Pm'}.$$

Mais comme $Pm' = Pq' + q'm' = Om' + m'q' = y$ on peut écrire

$$\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y},$$

d'où
$$xy = x'y',$$

et comme $x'y'$ est constant, l'équation est bien celle d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes et passant par le point M, car les coordonnées x' et y' de ce point M satisfont bien à l'équation.

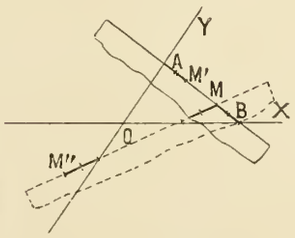


Fig. 69

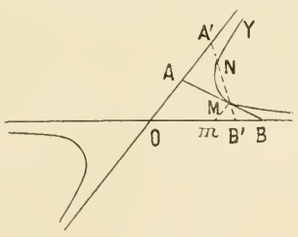


Fig. 70

Si on mène par le point M une sécante telle que MK rencontrant la partie OY' de l'axe des y, le point G obtenu en prenant $KG = ML$ appartient à la seconde branche de la courbe, et on le prouverait comme on l'a fait pour le point Q, en faisant voir que le produit de ses coordonnées est constant et égal à $x'y'$.

(*b*). **Construction de l'hyperbole par la bande de papier, connaissant les asymptotes et un point de la courbe.** — On place la bande de papier dans une position quelconque de manière que son bord passe par le point donné M, on y marque le point M et les points A et B où elle coupe les asymptotes ; on la retourne bout pour bout en plaçant B en A, et on marque, en M', la nouvelle position du point M ; c'est un point de la courbe cherchée (fig. 63).

On répète la même opération pour diverses positions de la bande de papier.

71. **Tangente en un point de l'hyperbole.** — La tangente AB au point M de l'hyperbole est telle que la portion de cette droite comprise entre les asymptotes est partagée par le point M en deux segments égaux. La tangente est, en effet, la limite des positions de la sécante MN lorsque le point N se rapproche du point M et vient se confondre avec lui ; comme on a toujours A'N = MB', à la limite on aura encore, lorsque la sécante sera tangente, AM = MB (fig. 70).

Il suffit donc pour construire la tangente au point M de mener la droite M*m* parallèle à l'asymptote OY et de prendre *m*B = O*m*, puis de joindre le point B au point M.

75. **Equation d'une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.** — Soient a et b les coordonnées du centre de l'hyperbole. L'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes est

$$xy = K^2.$$

Si les axes sont déplacés parallèlement à eux-mêmes, la nouvelle origine a pour coordonnées, par rapport au centre, $(-a)$ et $(-b)$. Les formules de transformation sont alors (v. n° 16-*b*)

$$x = x' - a,$$
$$y = y' - b,$$

et l'équation par rapport aux nouveaux axes est

$$(x' - a)(y' - b) = K^2,$$

ou comme x' et y' sont des coordonnées courantes, on supprimera les accents.

On développe, ce qui donne, en posant $K^2 - ab = K'^2$:

$$xy - bx - ay = K^2 - ab = K'^2 \quad \text{ou}$$
$$xy + Ax + By = K'^2.$$

Ce qui veut dire que :

« Toute équation du second degré, en x et en y, dans laquelle manquent « les termes en x^2 et en y^2, autrement dit, qui ne contient comme terme du « second degré que le rectangle xy, représente une hyperbole dont les asymp- « totes sont parallèles aux axes de coordonnées. »

On voit que sous cette forme, les coordonnées du centre de la courbe sont

$$(\textit{abscisse})\quad a = -B, \qquad (\textit{ordonnée})\quad b = -A.$$

76. **Equation d'une hyperbole ayant pour asymptotes deux droites quelconques.** — Les deux asymptotes étant les droites

$$y = ax + b$$

et

$$y = a'x + b',$$

si on rapportait la courbe à ces deux droites comme axes, son équation serait

$$x'y' = K^2. \tag{1}$$

x' et y' désignant les coordonnées dans ce nouveau système, on obtiendrait l'équation de la courbe rapportée aux axes primitifs en remplaçant dans l'équation (1) x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et de y, coordonnées dans le système donné.

Nous ne savons pas calculer ces valeurs ; mais dans le système X'OY' la première droite a pour équation $y' = 0$, tandis que dans le système XOY, elle a pour équation $y - ax - b = 0$.

La formule donnant y' en fonction de x et de y est donc telle que pour $y' = 0$ on a en même temps $y - ax - b = 0$; la valeur de y' est donc de la forme

$$y' = m(y - ax - b),$$

m étant un facteur constant.

De même, la droite qui a pour équation $x' = 0$ dans le second système a pour équation dans le premier $y - a'x - b' = 0$. Un raisonnement analogue nous amènerait à reconnaître que la valeur de x' est de la forme

$$x' = n(y - a'x - b'),$$

n étant une quantité constante. L'équation de l'hyperbole est donc

$$mn(y - ax - b)(y - a'x - b') = K^2,$$

ou

$$(y - ax - b)(y - a'x - b') = K'^2.$$

Si de plus la courbe doit passer par un point donné, dont les coordonnées sont x_1 et y_1, son équation sera satisfaite par ces valeurs ; on aura donc

$$(y_1 - ax_1 - b)(y_1 - a'x_1 - b') = K'^2,$$

et l'équation de l'hyperbole sera

$$(y - ax - b)(y - a'x - b') = (y_1 - ax_1 - b)(y_1 - a'x_1 - b'). \tag{2}$$

En résumé : « Toute équation du second degré dont le premier membre est « le produit de deux facteurs du premier degré en x et en y représente une « hyperbole ayant pour asymptotes les droites obtenues en égalant à zéro ces « facteurs du premier degré. »

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

§ 1. — Préliminaires

77. **Objet de la mécanique.** — La *mécanique* est la science du *mouvement* et des *causes* qui le produisent, le modifient ou l'empêchent de se produire.

Nous avons naturellement la notion qu'un corps ne peut être tiré de l'état de repos que par une cause qui lui est étrangère.

Toute cause de mouvement s'appelle une *force*. Exemple : *la pesanteur*.

78. **Divisions de la mécanique.** — La mécanique se divise en deux parties :

1° L'étude du mouvement en lui-même, indépendamment des causes qui le produisent ou le modifient ; cette partie de la mécanique a été définitivement constituée par **Ampère** qui l'a appelée *cinématique*.

2° L'étude des causes du mouvement, c'est-à-dire des forces, de leur mesure, de la manière dont elles produisent ou modifient le mouvement ; c'est la *dynamique*.

La dynamique permet de résoudre les deux problèmes suivants :

1° Etant données les forces qui agissent sur un corps, qu'il soit au repos ou en mouvement, déterminer le mouvement qu'il prendra ou la manière dont le mouvement qu'il possède se modifiera sous l'influence de ces forces.

2° Connaissant le mouvement d'un corps à un moment donné, trouver les forces qui agissent, à ce moment, sur lui.

Lorsque des forces agissent sur un corps, elles ne le mettent pas toujours en mouvement ; on dit alors qu'elles se font *équilibre*.

L'étude des *conditions d'équilibre* d'un corps est un cas particulier de la dynamique ; cependant, à cause de son importance on en a fait une branche spéciale de la mécanique et on l'a appelée *statique*.

79. **Mécanique rationnelle et mécanique appliquée. — Solide invariable.** — La *mécanique rationnelle*, pour rendre plus facile l'étude du mouvement des corps, fait abstraction d'un certain nombre de leurs propriétés physiques ; elle considère un corps comme *solide invariable* et indéformable, ne pouvant être dilaté, ni comprimé, sans aucune influence.

Ce solide invariable peut être partagé en fragments également invariables ; un fragment infiniment petit d'un solide invariable est ce qu'on appelle un *point matériel*.

Les corps que nous rencontrons dans la nature sont loin de constituer des solides invariables ; ils se déforment plus ou moins sous l'action des forces qui leur sont appliquées. On peut alors se demander dans quelles mesures les théories de la mécanique rationnelle leur sont applicables.

Cette étude, dans laquelle on tiendra compte autant que possible des propriétés physiques des corps, constitue la *mécanique appliquée*. Les résultats que fournit cette science devront toujours être corroborés par l'expérience, et ne pourront être considérés comme acquis que dans les limites où la vérification expérimentale aura eu lieu.

La mécanique appliquée comprend la résistance des matériaux, la stabilité des constructions, l'hydraulique, etc.

80. **Mouvement et repos.** — Un corps est en *mouvement* lorsque sa position dans l'espace change d'un instant à un autre.

On dit qu'il est en *repos* si sa position ne change pas d'un instant à un autre. On voit que la notion de repos ou de mouvement est ainsi intimement liée à la notion du *temps*.

Le mouvement et, surtout, le repos ne sont que relatifs et nous les apprécions par comparaison avec les corps qui nous environnent.

Ainsi nous disons d'un corps posé sur le sol qu'il est en repos, mais ce repos est relatif à la terre. Ce corps est entraîné dans le mouvement de rotation de la terre autour de son axe et dans son mouvement autour du soleil.

§ 2. — Cinématique

81. **Généralités sur le mouvement.**

(*a*) **Mobile. — Trajectoire.** — Nous avons dit qu'un corps est en mouvement lorsqu'il occupe successivement différentes positions dans l'espace. On donne à ce corps le nom de *mobile*.

La ligne continue décrite par l'un quelconque de ses points, ou le lieu géométrique des positions du point considéré, se nomme la *trajectoire* de ce point. Le mouvement peut être étudié au point de vue : 1° de la forme de la trajectoire ; 2° de la manière dont le mobile la parcourt, et ici intervient la notion du temps.

(*b*) **Mouvement rectiligne d'un point matériel.** — Lorsqu'un point se déplace suivant une ligne droite, on dit qu'il possède un mouvement rectiligne.

La *direction du mouvement* est celle de la droite.

(*c*) **Mouvement curviligne d'un point matériel.** — Si un point matériel se déplace suivant une courbe, on dit que son mouvement est curviligne.

Soit ABCDE la trajectoire du mouvement ; j'y inscris une portion de polygone dont les côtés sont infiniment petits et égaux entre eux. Je peux considérer que pendant l'intervalle AB, le mobile a parcouru la corde AB au lieu de l'arc. On appellera la direction de la corde AB la *direction moyenne* du mouvement pendant cet intervalle.

Si on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone, la limite vers laquelle tend la corde AB est la tangente au point A à la courbe, et cette tangente donne *la direction du mouvement au point* A.

(*d*) **Equation d'un mouvement.** — Le mobile, en parcourant sa trajectoire, ne peut être au même instant en deux points différents ; il met un temps plus ou moins long pour passer d'un point à un autre.

La relation entre *l'espace parcouru* et *le temps* employé à le parcourir définit la manière dont le mouvement se produit ; on l'appelle *l'équation du mouvement.*

La première position du mobile que l'on considère s'appelle la *position initiale* ; on la détermine sur la trajectoire par rapport à une *origine fixe* à partir de laquelle on compte les espaces parcourus. Ces espaces se mesurent en *mètres*, positivement dans un sens, et négativement dans le sens contraire. Si l'espace parcouru est *positif*, on dit que le mouvement est *direct* ; dans le cas contraire, le mouvement est dit *rétrograde.*

L'instant où le point occupe sa position initiale s'appelle l'*instant initial* ou *origine du temps* ; *tout instant qui le suit* se représente par un certain nombre d'unités de temps écoulées depuis l'instant initial et qu'on affecte du *signe* +; *tout instant qui précède* l'instant initial se représente par le nombre d'unités de temps écoulées depuis l'instant considéré jusqu'à l'instant initial, mais affecté du *signe* —. En résumé le temps est *positif* dans l'avenir et *négatif* dans le *passé.*

82. Mesure du temps. — Unité de temps. — On mesure le temps par comparaison entre le temps à mesurer et un intervalle de temps bien défini par un phénomène naturel, régulier et périodique, tel que le mouvement des astres, et, particulièrement, la révolution de la terre autour de son axe.

On appelle *jour solaire vrai* le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au méridien. Sa durée est un peu variable, et on a adopté, comme mesure du temps, le *jour solaire moyen* qui est la moyenne des durées du jour solaire vrai.

On le divise en vingt-quatre heures au moyen d'instruments capables de produire des mouvements périodiques et réguliers ; tels sont les horloges ou les sabliers. On divise, de même, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

En mécanique, on a adopté comme *unité de temps* la seconde du jour solaire moyen.

83. Etude du mouvement uniforme.

(*a*) **Définition et équation de ce mouvement.** — Le mouvement uniforme est celui dans lequel les *espaces parcourus dans des temps égaux sont égaux*, quelque petits que soient les temps employés à les parcourir ; en d'autres termes, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps.

Soient S et S' les espaces comptés à partir d'une certaine position initiale, t et t' les temps employés à les parcourir, on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{t}{t'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{S}{t} = \frac{S'}{t'} = \text{constante.}$$

Appelons a la valeur de cette constante ; on a

$$S = at \qquad \text{et} \qquad S' = at'.$$

Si, à l'instant initial, le mobile était à la distance S_0 de l'origine sur sa trajectoire, sa distance à l'origine au bout des temps t et t' sera

$$S = S_0 + at, \qquad S' = S_0 + at'.$$

L'équation du mouvement est donc

$$S = S_0 + at.$$

(*b*) **Représentative du mouvement** (fig. 71). — Prenons l'axe horizontal OT comme axe des temps et l'axe OS, perpendiculaire au premier, comme axe des espaces ; on représentera la seconde sur l'axe OT par une certaine longueur et le mètre sur l'axe OS par une autre longueur.

L'équation $$S = S_0 + at$$

représente une droite dont la pente est a et l'ordonnée à l'origine S_0.

Il ne faut pas confondre cette représentative du mouvement, qu'on nomme aussi la *courbe des espaces*, avec la trajectoire décrite par le mobile.

(*c*) **Vitesse du mouvement uniforme.** — L'espace parcouru par le mobile depuis l'instant initial est :

$$S_1 = S - S_0 = at.$$

Si on fait $t = 1$, on trouve $S_1 = a$. a est donc l'espace parcouru pendant une seconde ; c'est cet espace qui définit le plus ou moins de rapidité du mouvement, et on l'appelle la *vitesse* de ce mouvement ; nous la désignerons par v, et alors l'équation du mouvement s'écrira

$$S = S_0 + vt.$$

« La vitesse dans le mouvement uniforme est donc l'espace, constant, parcouru pendant l'unité de temps. »

C'est aussi le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

Nous attribuerons à la vitesse le même sens qu'au mouvement, et nous la compterons comme positive si le mouvement est direct et comme négative s'il est rétrograde.

Dans ce dernier cas, la droite représentative du mouvement a une pente négative et égale en valeur absolue à v.

(*d*) **Représentative de la vitesse** (fig. 71). — La vitesse v étant constante sera représentée par une droite parallèle à l'axe des temps ; nous la rapporterons à un axe O'T' parallèle à OT.

La droite représentative sera au-dessus de l'axe O'T' si la vitesse est positive et au-dessous dans le cas contraire. Elle est la représentative de la pente constante de la droite représentative des espaces.

Fig. 72

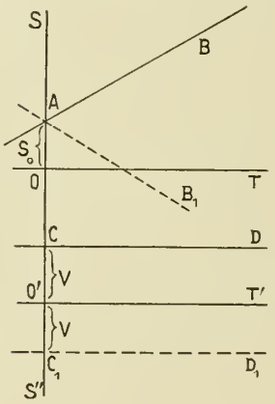


Fig. 71

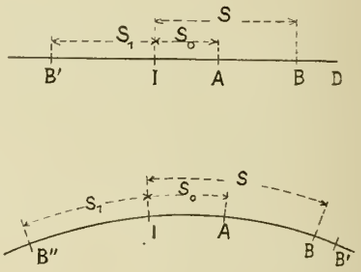


Fig. 73

(*e*) **Mouvement rectiligne et uniforme d'un point matériel** (fig. 72). — Soit ID la trajectoire de ce mouvement. A est la position initiale du point matériel, correspondant à l'instant initial $t = 0$ et l'on a, si I est l'origine des espaces,

$$IA = S_0.$$

A l'instant t où le mobile est en B, on a

$$IB = S = S_0 + vt$$

et dans ce cas, le mouvement est supposé direct.

Si le mouvement était rétrograde, à l'instant t le mobile occuperait une position B' pour laquelle on aurait

$$IB' = S_1 = S_0 - vt,$$

la longueur AB' étant égale en valeur absolue à vt.

(*d'*) **Nota.** — Le mouvement rectiligne et uniforme est celui d'un point matériel qui a été soumis à des forces, après que ces forces ont cessé d'agir ; on l'appelle le *mouvement naturel* d'un point.

(*f*) **Mouvement curviligne et uniforme d'un point matériel** (fig. 73). — Soit IB la trajectoire, I l'origine des espaces, A la position initiale du point, distante de l'origine de S_0 ; B la position du mobile à l'instant t ; sa distance à l'origine est à cet instant

$$S = S_0 + vt.$$

La vitesse est supposée ici positive et dans le sens du mouvement, mais à chaque instant sa direction varie, puisque la trajectoire est curviligne.

Soit B' un point infiniment voisin de B ; la direction du mouvement curviligne au point B est la limite vers laquelle tend la direction du mouvement rectiligne BB' ; la vitesse dans le mouvement rectiligne BB' est dirigée suivant cette ligne BB' ; la vitesse du mouvement curviligne sera la limite de la précédente, et elle sera, par conséquent, dirigée suivant la tangente au point B à la trajectoire.

Si la vitesse est négative, le mouvement est rétrograde ; alors à l'instant t, le mobile occupe la position B'' telle que

$$IB'' = S_1 = S_0 - vt,$$

la longueur AB'' étant égale en valeur absolue à vt.

84. **Etude des mouvements variés.**

(*a*) **Définition des diverses espèces de mouvements variés.** — Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*.

Dans un pareil mouvement, l'espace parcouru et le temps sont toujours liés par une relation $S = f(t)$, mais cette relation est très différente suivant la nature des mouvements.

Parmi les mouvements variés, on distingue :

1° Le *mouvement uniformément varié* dans lequel la vitesse croît ou décroît proportionnellement au temps ; le mouvement est dit *accéléré* dans le premier cas, et *retardé* dans le second. Nous définirons plus loin *la vitesse*.

2° Les *mouvements périodiques* dans lesquels les espaces parcourus pendant des temps égaux, convenablement choisis, sont égaux, sans que dans l'intervalle le mouvement soit uniforme. La durée d'un de ces intervalles de temps égaux s'appelle la *période* du mouvement.

(*b*) **Représentative d'un mouvement varié. — Vitesse de ce mouvement** (fig. 74). — On pourra toujours construire la courbe des espaces $S = f(t)$ en prenant pour axe des temps un axe horizontal OT et pour axe des espaces un axe OS perpendiculaire au premier.

Cherchons à déterminer la vitesse de ce mouvement : considérons la trajectoire IAB ; le point C correspondant à l'instant initial donne le point C de la courbe des espaces, sur l'axe OS, et tel que OC = IC. Soient deux points A et B de la trajectoire auxquels correspondent les points a et b de la courbe des espaces ; nous aurons, en appelant t et t_1 les temps mis à parcourir les espaces CA et CB,

$$O\alpha = t, \qquad a\alpha = S = IA,$$
$$O\beta = t_1, \qquad b\beta = S_1 = IB.$$

Si le mobile avait parcouru la distance AB d'un mouvement uniforme, sa vitesse serait dans cet intervalle

$$\frac{AB}{t_1 - t} = \frac{S_1 - S}{t_1 - t}.$$

C'est ce que nous appellerons la *vitesse moyenne* dans l'intervalle AB.

Un mobile fictif, *animé d'un mouvement uniforme*, qui parcourrait avec cette vitesse l'intervalle AB, partirait du point A et arriverait au point B en même temps que le mobile considéré.

La vitesse moyenne $\qquad \dfrac{S_1 - S}{t_1 - t} = \dfrac{bb_1}{ab_1}$,

est la pente de la sécante ab de la courbe des espaces.

Si l'intervalle AB devient infiniment petit et tend vers zéro, la vitesse moyenne a pour limite la *vitesse au point A*. La valeur de cette vitesse, $\lim. \dfrac{ab_1}{bb_1}$, est la *pente de la tangente* au point a à la courbe des espaces.

La vitesse en chaque point est donc donnée par la pente de la tangente en ce point à la courbe représentative des espaces.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le mouvement curviligne uniforme, on ferait voir que la vitesse est dirigée à chaque instant suivant la tangente à la trajectoire ; elle est positive si le mouvement est direct, négative s'il est rétrograde.

(*c*) **Courbe représentative des vitesses.** — Cette courbe M'N'P'Q' est la représentative des pentes de la courbe des espaces. On pourra donc la construire facilement en appliquant les remarques suivantes :

A tout maximum P ou minimum M de la courbe des espaces (points pour lesquels la tangente est horizontale) correspond une vitesse nulle P' ou M' et un changement de signe de la vitesse.

A tout point d'inflexion N ou Q de la courbe des espaces correspond un maximum N' ou un minimum Q' de la vitesse.

85. **Mouvements uniformément variés.**

(*a*) *Définition.* — Le mouvement uniformément varié est celui dans lequel la vitesse croît ou décroît de quantités égales dans des temps égaux. Les accroissements de la vitesse sont donc proportionnels au temps.

Si la vitesse croît avec le temps, le mouvement est *uniformément accéléré* ; si elle décroît avec le temps, le mouvement est *uniformément retardé*.

(*b*) **Vitesse dans ces mouvements. — Accélération.** — Soit v_0 la vitesse initiale pour $t = 0$; au bout du temps t, elle sera :

dans le mouvement accéléré $\quad v = v_0 + jt$

» » retardé $\quad v = v_0 - jt$.

La quantité j s'appelle *l'accélération*.

Si dans les formules précédentes nous faisons $t = 1$, nous aurons :

pour le mouvement accéléré $\quad v = v_0 + j$, d'où $\quad j = v - v_0$;

pour le mouvement retardé $\quad v = v_0 - j$, d'où $\quad -j = v - v_0$.

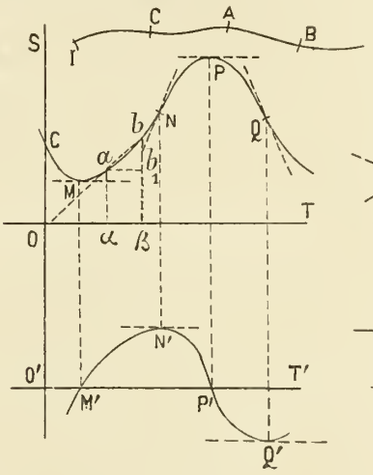


Fig. 74

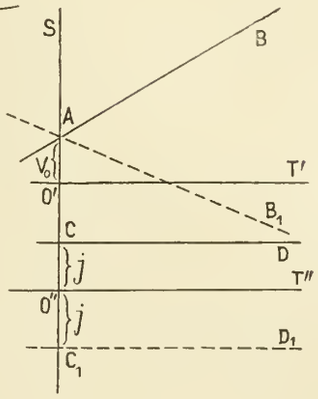


Fig. 75

L'accélération est donc égale à l'accroissement pris par la vitesse pendant l'unité de temps ; elle est positive dans le cas du mouvement accéléré, et négative dans le cas du mouvement retardé.

(*c*) **Représentation de la vitesse et de l'accélération** (fig. 75). — La vitesse sera représentée par une droite, AB ou AB_1, dont l'ordonnée à l'origine est v_0 et dont la pente est égale à j en valeur absolue : cette pente est positive si le mouvement est accéléré (voir la droite AB), négative s'il est retardé (voir la droite AB_1).

L'accélération sera représentée par une droite parallèle à l'axe des temps, située au-dessus de cet axe pour le mouvement accéléré (voir la droite CD), et au-dessous pour le mouvement retardé (voir la droite C_1D_1).

On voit que l'accélération est la pente de la représentative de la vitesse ; elle joue donc par rapport à celle-ci le même rôle que joue la vitesse par rapport aux espaces parcourus. On dit quelquefois, pour cette raison, que c'est la vitesse de la vitesse.

(*d*) **Équations des mouvements uniformément variés** (fig. 76). — Soit un mouvement uniformément accéléré de vitesse $v = v_0 + jt$.

Nous supposons qu'à l'instant initial le mobile est à l'origine des espaces. Considérons le mobile à l'instant t_1 ; sa vitesse est représentée par $Bb = v_1$. Si pendant un intervalle de temps très petit Δt_1, nous remplaçons le mouvement uniformément accéléré par un mouvement uniforme de vitesse v_1 le chemin parcouru $v_1 \times \Delta t_1$ différera très peu du chemin réellement parcouru dans le mouvement vrai.

L'espace total parcouru depuis l'origine jusqu'à l'instant t dans une série de petits mouvements uniformes analogues sera la somme des quantités telles que $v_1 \times \Delta t_1$; cette somme différera d'autant moins de l'espace S parcouru dans le mouvement accéléré que les intervalles Δt_1 seront plus petits, et elle a pour limite l'espace parcouru S (v. fig. 76 à la page suivante).

Or, sur la figure, $v_1 \times \Delta t_1$ est la surface du rectangle $Bb_1b'b$, et la limite de la somme des rectangles ainsi obtenus est la surface du trapèze compris entre l'axe des espaces et l'ordonnée B'b' correspondant à l'instant t.

L'espace parcouru au bout du temps t est donc

$$S = \left(\frac{v_0 + v_0 + jt}{2}\right)t,$$

qui représente la surface de ce trapèze AO'b'B',

ou $$S = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

Si de plus, le mobile était à l'instant initial à la distance S_0 de l'origine sur sa trajectoire, sa position à l'instant t sera donnée par l'expression

$$(1) \qquad S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

Telle est l'équation générale d'un mouvement uniformément accéléré.

Si le mouvement est uniformément retardé son équation est

$$(2) \qquad S = S_0 + v_0 t - \frac{1}{2} j t^2.$$

(*e*) **Représentative des mouvements uniformément variés** (fig. 76). — La courbe des espaces du mouvement uniformément accéléré est :

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

C'est une parabole à axe vertical dont le paramètre est $p' = \frac{1}{2j}$; elle coupe l'axe des S au point d'ordonnée S_0. Au sommet de la parabole, la tangente est horizontale, et ce point correspond par suite à l'abscisse $t = -\frac{v_0}{j}$ du point C' où la représentative des vitesses coupe l'axe des T.

Dans le cas du mouvement uniformément retardé, la parabole a pour paramètre $p' = -\frac{1}{2j}$, et pour abscisse de son sommet $t = \frac{v_0}{j}$.

(*f*) **Conséquences des formules du mouvement uniformément accéléré.**

1° De la formule $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$,

on tire : $$\frac{S - S_0}{t} = v_0 + \frac{1}{2} j t = \frac{v_0 + (v_0 + jt)}{2}.$$

$\frac{S - S_0}{t}$ est la vitesse moyenne entre le point initial et le point correspondant au temps t ; v_0 est la vitesse initiale, $(v_0 + jt)$, la vitesse au bout du temps t.

Donc : La vitesse moyenne pendant un certain temps est la moyenne des vitesses au commencement et à la fin de ce temps.

2° Si dans les formules de la vitesse et de l'espace parcouru, nous faisons $S_0 = 0$ et $v_0 = 0$, c'est-à-dire, si le mobile part du repos à l'instant initial, nous avons :

$$v = jt \qquad \text{et} \qquad S = \frac{1}{2} j t^2.$$

La vitesse est proportionnelle au temps ; l'espace parcouru est proportionnel au carré du temps.

3° Si dans ces deux dernières formules, nous faisons $t = 1$, elles deviennent :

$$v = j, \qquad S = \frac{1}{2} j. \qquad \text{Donc :}$$

La vitesse à la fin de la première seconde du mouvement est égale à l'accélération. L'espace parcouru pendant la première seconde est égal à la moitié de la vitesse à la fin de cette première seconde.

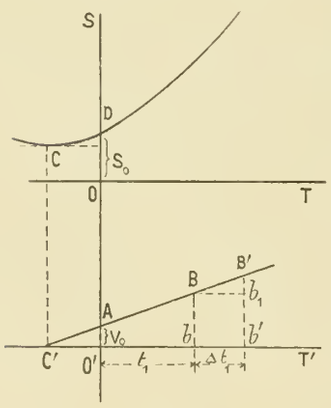


Fig. 76

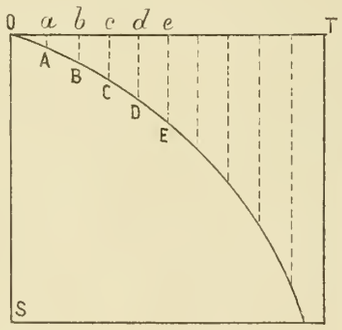


Fig. 77

86. **Exemple de mouvement uniformément accéléré. — Mouvement de la chute des corps. — Son étude expérimentale** (fig. 77). — Le mouvement d'un corps tombant librement dans le vide est un mouvement uniformément accéléré.

On le vérifie expérimentalement au moyen de la machine d'**Atwood**, qui est basée sur un principe de dynamique que nous étudierons plus tard, ou bien de la machine du général **Morin**.

Cette machine, construite par le général **Morin** sur les indications du général **Poncelet**, se compose, essentiellement d'un cylindre vertical en bois sur lequel on enroule une feuille de papier ; devant ce cylindre tombe une masse en plomb guidée dans son mouvement entre deux fils métalliques verticaux, et armée d'un crayon, ou mieux d'un pinceau qui trace sur le papier.

Le cylindre est monté entre deux pointes, ce qui lui donne une grande mobilité, et on lui imprime un mouvement uniforme de rotation. Le crayon étant immobile trace, lorsque le cylindre tourne, un cercle sur le papier ; si la masse descend et que le cylindre reste immobile, le crayon trace une ligne verticale qui est une génératrice du cylindre. Si on remonte la masse, puis qu'on la laisse tomber lorsque le cylindre tourne, le crayon trace une courbe qui, une fois le cylindre fendu suivant la génératrice de départ et développé, représente la courbe des espaces du mouvement de la chute des corps.

Supposons que le cylindre fasse, pour fixer les idées, un tour en une seconde, nous pourrons considérer sa base développée comme axe des temps et la diviser en 10 parties égales qui seront des dixièmes de seconde. La génératrice OS sera l'axe des espaces, et les longueurs aA, bB, cC, etc., seront les espaces parcourus pendant $\frac{1}{10^e}$, $\frac{2}{10^e}$, $\frac{3}{10^e}$, etc., de seconde. Par mesure directe, prise sur la figure, on reconnaîtra que chaque ordonnée a une longueur proportionnelle au carré de son abscisse et que, par suite, la courbe tracée est une parabole (fig. 77).

Le mouvement de la chute des corps est donc uniformément accéléré ; son accélération se désigne par la lettre g, et on l'appelle la *gravité* ou *l'intensité de la pesanteur* ; sa valeur est $9^m,8088$ à Paris ; mais elle est variable en différents points, et plus forte au pôle qu'à l'équateur.

Les équations du mouvement de la chute des corps sont donc

$$v = gt, \qquad S = \frac{1}{2} g t^2.$$

D'où l'on déduit $t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$, donnant le temps qu'un corps met à tomber d'une hauteur S ; et $v = \sqrt{2gS}$, vitesse acquise par un corps après une chute d'une hauteur S.

87. **Etude du mouvement sur sa trajectoire. — Mouvement relatif. — Mouvement d'entraînement. — Mouvement composé.** — Considérons un mobile marchant sur un bateau qui se déplace lui-même sur une rivière : on peut considérer :

1° Le mouvement du mobile tel que le voit un observateur placé, sur le bateau, en un point fixe ; c'est le *mouvement relatif* du mobile par rapport à ce point fixe, ou encore le *mouvement apparent* du mobile :

2° Le mouvement du bateau tel que le voit se produire un observateur placé en un point fixe de la rive ; c'est le *mouvement d'entraînement*.

3° Le mouvement du mobile qui se déplace sur le bateau, tel que le voit l'observateur placé sur la rive ; c'est le *mouvement absolu* du mobile ; en considérant la terre comme fixe dans l'espace.

Ce mouvement absolu peut être considéré comme *composé* de deux mouvements simultanés : le mouvement relatif du mobile par rapport au bateau et le mouvement d'entraînement du système complet, bateau et mobile.

En réalité le mobile ne décrit dans l'espace qu'une seule trajectoire, mais on pourrait l'amener en un point de cette trajectoire par les deux mouvements suivants : 1° en déplaçant le mobile sur le bateau, celui-ci restant fixe ; 2° en déplaçant le bateau, le mobile y restant fixe par rapport à lui.

Le résultat sera le même quel que soit l'ordre dans lequel les deux mouvements seront produits.

88. **Principe de l'indépendance des mouvements composés.** — Ce principe, fourni par l'observation, constitue l'un des *postulata* de la mécanique.

Les mouvements relatifs de plusieurs corps ne sont pas modifiés lorsqu'on imprime à l'ensemble de ces corps un mouvement commun d'entraînement.

Ainsi un corps qu'on laisse tomber du haut du mât d'un navire tombe toujours au pied de ce mât, que le navire soit ou non en mouvement.

Il en résulte qu'on pourra étudier isolément les divers mouvements et les composer ensuite entre eux.

89. Repérage des points d'un solide invariable (fig 78). — Un solide invariable est tel que tous ses points restent à des distances constantes les uns des autres. C'est une définition.

On pourra déterminer un tel solide en rapportant tous ses points à trois axes fixes par rapport à lui. Si on connaît le mouvement des trois axes, on pourra à chaque instant, puisqu'on connaît les coordonnées de tous les points du solide, connaître leur position.

On peut encore prendre dans le solide trois points non en ligne droite constituant un triangle de dimensions invariables, et repérer tous les points du solide, par rapport à ce triangle, de deux manières (fig. 78) :

1° En abaissant du point M du solide qu'il s'agit de repérer une perpendiculaire Mm sur le plan du triangle ; la position du point m et la longueur mM déterminent le point M ;

2° En mesurant les trois longueurs MA, MB et MC.

Connaissant le mouvement du *triangle repère* ABC, c'est-à-dire les mouvements de trois points A, B et C du solide, on saura trouver à chaque instant la position de tous les points du solide.

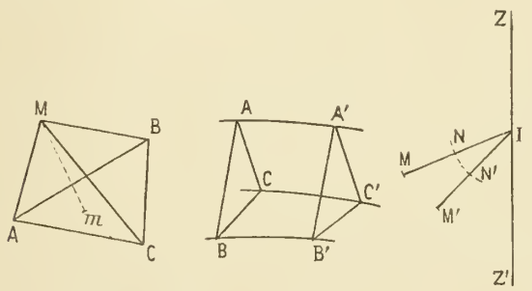


Fig. 78 Fig. 79 Fig. 80

90. Mouvement de translation (fig. 79). — Lorsque trois points d'un solide invariable décrivent, dans le même temps, des *trajectoires égales et parallèles*, on dit que le solide est animé d'un *mouvement de translation*.

Les trois trajectoires AA′, BB′ et CC′, décrites dans le même temps par les trois points A, B et C du solide, étant égales et parallèles, il en résulte que les cordes AA′, BB′, CC′ de ces trajectoires sont égales et parallèles, et que les côtés du triangle A′B′C′ sont parallèles à ceux du triangle ABC.

Si la position A′B′C′ est infiniment voisine de ABC, le déplacement ayant eu lieu dans le temps Δt, les vitesses moyennes $\frac{AA'}{\Delta t}$, $\frac{BB'}{\Delta t}$, $\frac{CC'}{\Delta t}$ des trois points A, B et C sont égales. A la limite, les vitesses en A, B et C sur les trois trajectoires sont encore égales, et elles sont dirigées suivant les tangentes en ces points aux trois trajectoires, et par suite, parallèles.

Ainsi, dans ce mouvement, le solide se déplace tout entier parallèlement à lui-même, et tous ses points sont, à un même instant, animés de vitesses égales et parallèles.

91. Mouvement de rotation (fig. 80).

(*a*) **Définition.** — Si deux points d'un solide restent fixes dans l'espace, tous les points de la droite qui les joint restent fixes ; tous les autres points du corps décrivent des cercles dans des plans perpendiculaires à cette droite ; le solide ne peut que tourner autour d'elle et on nomme cette droite *l'axe de rotation*.

Cette ligne peut ne pas appartenir d'une façon matérielle au solide.

Exemple : un anneau tournant autour de son axe de figure.

(*b*) **Vitesse angulaire.** — Considérons un point M du solide ; la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe est le rayon de rotation du point M. Dans une deuxième position, après un temps t, le point M viendra en M′ et l'angle MIM′ est ce qu'on nomme le *déplacement angulaire* du point M pendant le temps t.

Pendant le même temps, tous les autres points du solide ont subi le même déplacement angulaire.

Supposons que le déplacement MM′ ait lieu pendant le temps infiniment petit Δt, la quantité $\lim. \frac{MIM'}{\Delta t}$ est ce qu'on nomme la *vitesse angulaire*; on la désigne par ω.

Si on décrit du point I comme centre un cercle ayant pour rayon l'unité, le déplacement angulaire sera mesuré par l'arc NN′ de ce cercle compris entre les rayons IM et IM′ ; la vitesse angulaire aura pour valeur $\lim. \frac{NN'}{\Delta t}$; et cette valeur sera en même temps la valeur de la vitesse linéaire du point N dans son mouvement circulaire.

Le point M dont la distance à l'axe est r aura alors pour vitesse linéaire

$$v = \omega r.$$

Dans le même temps deux points du solide décrivent des arcs proportionnels à leurs rayons, et les vitesses linéaires de ces points sont également proportionnelles à leurs rayons.

92. Composition des mouvements.

(*a*) **Position de la question** (fig. 81). — Nous avons vu qu'on pouvait considérer le mouvement d'un solide comme résultant de deux mouvements : un mouvement relatif et un mouvement d'entraînement. Un point matériel A du solide étant repéré par rapport à trois axes OX, OY et OZ, aura par rapport à eux un mouvement relatif qui l'amènera dans la position A′ après avoir parcouru la *trajectoire relative* AA′.

Le système des trois axes subissant un mouvement d'entraînement qui l'amène à la position O′X′Y′Z′, si le point A était resté fixe par rapport aux trois axes, il occuperait alors la position A_1, comme s'il avait parcouru la trajectoire AA_1 qu'on appellera la *trajectoire d'entraînement*. Mais à cause de son mouvement relatif, par rapport aux trois axes, il occupe la position A'_1 telle que $A_1 A'_1 = AA'$. Le point A_1, pour arriver à la position A'_1 a parcouru la *trajectoire absolue* AA'_1.

Remarque. — On obtient le même résultat en faisant parcourir au point A les trajectoires successives AA_1 et $A_1A'_1$ ou bien AA′ et $A'A'_1$.

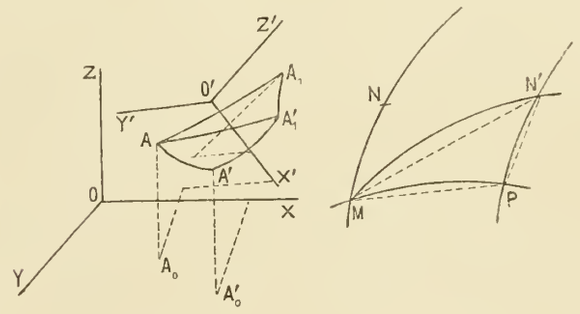


Fig. 81 Fig. 82

(*b*) **Vitesse du mouvement composé** (fig. 82). — Considérons un point mobile M dont la trajectoire relative est MN, la trajectoire d'entraînement étant MP.

Au bout d'un temps t, le mobile sera en N sur sa trajectoire relative, et celle-ci viendra occuper la position PN′ ; le point N prendra la position N′ telle que PN′ = MN. Le déplacement du mobile a eu lieu réellement suivant la trajectoire MN′. La corde MN′ est la résultante des cordes MP et PN′ ou MN.

Comme les déplacements, si nous considérons un temps infiniment petit Δt sont infiniment petits, nous pouvons prendre les cordes à la place des arcs.

Les vitesses moyennes absolue, relative, et d'entraînement sont alors respectivement

$$\frac{MN'}{\Delta t}, \quad \frac{MN}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{MP}{\Delta t},$$

et la première est la résultante des deux autres ; le triangle construit sur ces trois vitesses ayant ses côtés proportionnels à ceux du triangle MN′P.

Il en sera de même encore à la limite lorsque Δt tendant vers zéro, les vitesses moyennes deviendront les vitesses au point M.

Donc la vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, ou encore la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vitesses, d'où le nom de parallélogramme des vitesses donné à cette proposition.

(*c*) **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes, le mobile partant du repos** (fig. 83). — Le mouvement résultant est un mouvement uniforme; sa vitesse est la résultante des vitesses des mouvements composants. Soit AC la trajectoire relative; v_r la vitesse relative ; AB la trajectoire d'entraînement et v_e la vitesse d'entraînement.

Au bout d'un temps t le mobile est en C sur sa trajectoire relative, en B sur sa trajectoire d'entraînement, et par suite en D sur sa trajectoire absolue. Appelons x et y les coordonnées du point D rapporté à AB et AC prises respectivement comme axes des x et des y.

Nous aurons

$$x = \mathrm{AB} = v_e \times t,$$
$$y = \mathrm{AC} = v_r \times t,$$

d'où en éliminant t entre ces deux équations

$$y = \frac{v_r}{v_e} x.$$

C'est l'équation d'une ligne droite passant par l'origine ; cette droite est la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC comme côtés.

Le mouvement est uniforme car, pour deux positions D et D' correspondant aux temps t et t', on aura

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} = \frac{t}{t'},$$

les espaces sont donc proportionnels aux temps.

Enfin si AB' représente v_e, AC' étant v_r, la vitesse du mouvement composé sera AD' diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses données.

(*d*) **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément accéléres, le mobile partant du repos** (fig. 83). — Le mouvement résultant est uniformément accéléré ; sa vitesse est la résultante des vitesses des mouvements composants ; son accélération est la résultante des accélérations des mouvements composants. En effet :

Soit AX la trajectoire du mouvement d'entraînement, dont l'accélération est j, et soit AY la trajectoire du mouvement relatif d'accélération j'.

Au bout du temps t, le mobile est en B sur sa trajectoire d'entraînement, en C sur sa trajectoire relative, et en D sur sa trajectoire absolue, et l'on a, en appelant x et y les coordonnées du point D,

$$x = \frac{1}{2} j t^2, \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2} j' t^2.$$

Eliminant t entre ces deux équations, il vient

$$y = \frac{j'}{j} x,$$

équation d'une droite passant par l'origine et qui est la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC comme côtés.

Cela prouve donc, en premier lieu, que le mouvement résultant est rectiligne et que sa trajectoire est la ligne AD.

Pour une seconde position D' correspondant au temps t' l'espace parcouru sera AD', et l'on aura

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} = \frac{t^2}{t'^2}.$$

Ce qui prouve, en second lieu, que le mouvement est uniformément accéléré, puisque les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

L'équation du mouvement est de la forme, J étant l'accélération,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \mathrm{J} t^2.$$

Pour $t = 1$, les espaces parcourus sur chacune des trois trajectoires sont respectivement

$$\frac{1}{2} j, \qquad \frac{1}{2} j' \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} \mathrm{J}.$$

J, accélération du mouvement composé, est par suite la résultante (ou la diagonale du parallélogramme) de l'accélération du mouvement relatif et de l'accélération du mouvement d'entraînement.

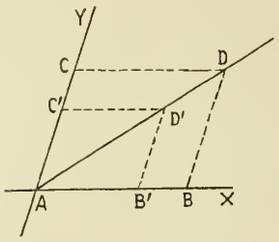


Fig. 83

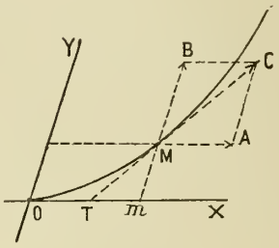


Fig. 84

(*e*) **Composition d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, de vitesse initiale nulle** (fig. 84). — Le mouvement uniforme sera considéré comme mouvement relatif, de vitesse v et dirigé suivant OX ; le mouvement uniformément accéléré, d'accélération j, sera le mouvement d'entraînement dirigé suivant OY.

Le mobile occupant au bout du temps t la position M, a décrit sur sa trajectoire relative

$$m\mathrm{M} = y = \frac{1}{2} j t^2,$$

et sur sa trajectoire d'entraînement

$$\mathrm{O}m = x = vt,$$

en appelant x et y les coordonnées du point M.

Eliminons t entre ces deux équations, il vient, pour équation de la trajectoire,

$$y = \frac{j}{2v^2} x^2.$$

C'est une parabole tangente en O à l'axe des x et ayant l'axe des y pour diamètre conjugué de la direction OX.

Telle est la trajectoire du mouvement composé.

La vitesse de ce mouvement, au point M, est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses relative et d'entraînement. En ce point la vitesse relative est $\mathrm{MB} = jt$; la vitesse d'entraînement est $\mathrm{MA} = v$.

Les triangles semblables MmT et MBC donnent :

$$\frac{m\mathrm{T}}{\mathrm{M}m} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}, \qquad \text{d'où} \qquad m\mathrm{T} = \frac{\mathrm{MA} \times \mathrm{M}m}{\mathrm{MB}}; \quad \text{or :}$$

$$\overline{\mathrm{MA}} = v, \qquad \overline{\mathrm{M}m} = \frac{jt^2}{2}, \qquad \overline{\mathrm{MB}} = jt.$$

donc

$$m\mathrm{T} = \frac{vt}{2},$$

et comme $\mathrm{O}m = vt$, il en résulte que T est le milieu de Om et que la droite MC est tangente en M à la parabole. Cette droite est donc en direction et en grandeur la vitesse du mouvement composé.

§ 3. — Dynamique

93. **1er Principe. Loi de l'inertie de la matière.**

La *cinématique*, c'est-à-dire l'étude du mouvement, indépendamment de ses causes, est une science purement géométrique ; elle n'emprunte rien à l'expérience. La *dynamique*, c'est-à-dire l'étude des forces et des mouvements qu'elles produisent, est, au contraire, une science qui doit emprunter ses principes à l'expérience. Ces principes, ou *postulata*, sont au nombre de trois ; ils ont été formulés, ou plutôt découverts, par des hommes de génie, **Newton, Galilée**. On aurait pu les mettre en doute ; mais on en a tiré des conséquences qui ont toujours été vérifiées par l'expérience, de sorte que ces principes ont aujourd'hui le caractère de certitude absolue ; ils constituent les lois primordiales du monde physique. Voici le premier principe.

(*a*) **Principe de l'inertie.** — « Un point matériel en repos ne peut de « lui-même se mettre en mouvement et, s'il est en mouvement, il ne peut de « lui-même modifier la grandeur ni la direction de sa vitesse. »

Donc : 1° Un point matériel livré à lui-même ne peut être qu'au repos ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme ; 2° Si un point matériel n'est ni en repos, ni en mouvement rectiligne et uniforme, il existe une *cause extérieure* qui modifie l'état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme qu'il devrait posséder.

(*b*) **Force. — Ses éléments.** — Toute cause de changement dans l'état de repos ou de mouvement d'un corps s'appelle une *force*.

Une force étant appliquée à un point qu'on appelle son *point d'application* le met en mouvement s'il est en repos.

La direction et le sens suivant lesquels le point commence à se mouvoir sont *la direction et le sens de la force*.

Outre ces éléments, il faut encore définir la *grandeur* ou l'*intensité* de la force.

Si on applique successivement à un point en repos deux forces et qu'elles produisent sur lui le même effet, on dit que ces deux forces sont égales.

Une force est donc une quantité susceptible d'augmentation ou de diminution et qui peut être comparée à une autre quantité de même nature.

(*c*) **Représentation d'une force** (fig. 85-I). — On représente une force par une ligne droite ; A étant le point d'application de cette force, elle ferait d'abord mouvoir le point A, supposé pris au repos, dans la direction AM, c'est ce qui donne la direction et le sens de la force.

Prenons à partir du point A, que nous marquerons d'un trait perpendiculaire à AM, une longueur AF proportionnelle à l'intensité de la force ; la ligne AF représentera en grandeur, direction et sens la force donnée.

On a l'habitude de placer une pointe de flèche à l'extrémité F.

94. 2e Principe. — Loi de l'égalité de l'action et de la réaction (fig. 85-II).

Énoncé. — « Toute force appliquée à un point matériel A est due à l'in-« fluence et, par conséquent, à l'existence d'un point matériel B dont elle « émane. Si A reçoit de B une *action* f, réciproquement B reçoit de A « une action égale et contraire qu'on appelle la *réaction* du point A ; elles « sont toutes deux dirigées suivant la droite AB. »

Si les deux forces tendent à rapprocher le point A du point B, on dit qu'elles sont *attractives* ; c'est le cas de la figure 85-II ; si au contraire elles tendent à éloigner les deux points l'un de l'autre, elles sont *répulsives*.

Si le point B est extérieur au système auquel appartient le point A, la force émanant du point B est une *force extérieure* au système ; la réaction qu'exerce A sur B est alors en dehors du système considéré, et nous n'aurons pas à en tenir compte.

Si les points A et B font partie d'un même système de points matériels, les forces émanant de ces deux points sont *intérieures* par rapport à ce système ; et alors nous devons les étudier.

Si un solide est invariable, c'est-à-dire si les distances de tous ses points sont fixes, les forces intérieures seront à chaque instant, quelles que soient les actions auxquelles le corps sera soumis, deux à deux égales et opposées.

Dans les solides naturels, qui sont déformables sous les actions extérieures, les forces intérieures devront être étudiées avec le plus grand soin.

L'étude de ces solides est du domaine de la mécanique appliquée.

Exemples. — Un corps reposant sur une table subit l'action de la pesanteur, et par suite presse sur la table avec une certaine force ; celle-ci reçoit donc une *action comprimante* qui émane du corps considéré ; à son tour, la table exerce sur le corps une réaction égale et contraire, et ces deux actions sont attractives.

Ce même corps suspendu à un fil exerce sur ce fil une *action tractive* égale à son poids ; le fil exerce de son côté sur le corps une réaction égale et contraire ; cette réaction est la *tension* du fil ; ces deux actions sont répulsives.

95. 3e Principe. — Loi de l'indépendance et de la composition des effets des forces (fig. 86).

Énoncé. — « Une force agit sur un point matériel en mouvement et solli-« cité par des forces quelconques, comme si elle était seule et que le point « soit au repos. »

Cet énoncé demande quelques développements. Soit MN la trajectoire parcourue par un point matériel M sous l'influence de forces quelconques ; traçons trois axes de coordonnées ayant pour origine le point M, et qui se déplaceront, par translation, en même temps que le point sur sa trajectoire et avec le même mouvement ; le point M est en repos relatif par rapport à ces trois axes mobiles.

Cela posé, appliquons à ce point une force F, elle modifiera le mouvement primitif ; le point M quittera l'origine des axes, en prenant un certain mouvement.

L'énoncé ci-dessus signifie que le point M prendra, *par rapport aux axes*, le même mouvement relatif que si ces axes étaient immobiles, c'est-à-dire que

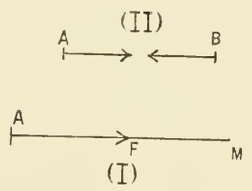


Fig. 85

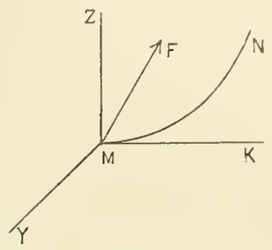


Fig. 86

si la force F agissait seule sur le point M ; c'est-à-dire que ce mouvement se fera relativement aux trois axes de coordonnées, suivant la direction de la force F.

La composition de ce mouvement relatif et du mouvement d'entraînement suivant MN donnera le mouvement absolu du point M.

Il en résulte que, à un instant quelconque, la vitesse due à la force F se compose géométriquement, par la loi du parallélogramme, avec la vitesse antérieurement acquise et donne comme résultante la vitesse absolue du point matériel.

La vitesse du mouvement résultant de l'application de plusieurs forces à un point matériel est à chaque instant égale à la résultante des vitesses dues à chacune des forces à cet instant.

96. Conséquences des trois principes de la dynamique.

(*a*) **Mouvement d'un point matériel partant du repos et soumis à une force F constante en grandeur et en direction.** — Considérons le point matériel M soumis à la force F, il se dirigera au début suivant la direction de la force ; au bout de une seconde, il aura acquis une vitesse θ. Si à ce moment la force F cessait d'agir, le point M continuerait son mouvement dans la même direction et avec la vitesse θ : cela résulte du principe de l'inertie, c'est-à-dire du 1er principe.

Ce mouvement uniforme peut être considéré comme un mouvement d'entraînement ; la force agissant encore à partir de ce moment, va produire le même effet que si elle agissait seule sur le corps au repos ; elle va lui communiquer une vitesse θ au bout de une seconde dans la direction de la force ; ce mouvement peut être considéré comme un mouvement relatif ; donc au bout de la deuxième seconde, le corps sera soumis à deux vitesses égales et de même direction, dont la résultante sera 2θ : cela résulte du 3e principe.

En répétant le même raisonnement pour la troisième seconde, on verrait que la vitesse à la fin de cette troisième seconde est 3θ, et ainsi de suite.

Le raisonnement que nous venons de faire pour des intervalles de temps de une seconde serait encore vrai pour des intervalles de plus en plus petits ; le mouvement du point M est donc rectiligne, et tel que sa vitesse est proportionnelle au temps.

On a donc, t représentant le temps en secondes,

$$V = \theta t,$$

ce qui caractérise le mouvement uniformément accéléré (voir n° 85-*f*) ; et l'équation du mouvement est

$$S = S_0 + \frac{\theta t^2}{2},$$

S_0 représentant la distance du point à l'origine des espaces au moment où la force F a commencé à agir.

Ainsi donc ce mouvement est uniformément accéléré ; son accélération est θ, vitesse acquise au bout de une seconde, et elle est dirigée dans le sens de la force.

Réciproquement. — Si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, on peut affirmer qu'il est soumis à l'action d'une force constante dont la direction est celle de son mouvement.

En effet le corps est évidemment soumis à l'action d'une force, sans quoi son mouvement serait uniforme. Si la force avait à un instant donné une direction différente de celle du mouvement, le mouvement résultant du mouvement communiqué par cette force à l'instant considéré et du mouvement antérieurement acquis ne serait plus dans la direction de ce dernier ; enfin la force a une intensité constante puisqu'elle augmente la vitesse de quantités égales dans des temps égaux, si petits soient-ils.

(*b*) **Mouvement d'un point matériel animé d'une vitesse v_0 et soumis à une force F constante en grandeur et en direction et ayant même direction que la vitesse v_0.** — Considérons le mouvement uniforme de vitesse v_0 comme un mouvement d'entraînement, le mouvement communiqué par la force F étant un mouvement relatif qui a pour vitesse $v = jt$.

Par hypothèse ces deux mouvements ont même direction, leurs vitesses ont même direction et la vitesse résultante est la somme des deux autres

$$V = v_0 + jt.$$

Le mouvement du point matériel est donc un mouvement uniformément accéléré de vitesse initiale v_0 et d'accélération j.

(*c*) **Mouvement d'un point matériel animé d'une vitesse v_0 et soumis à une force F constante en grandeur et en direction, la direction de la vitesse v_0 étant différente de celle de la force F.** — Le point sera soumis à un mouvement d'entraînement uniforme de vitesse v_0 et à un mouvement relatif uniformément accéléré de direction différente et de vitesse $v = jt$.

En composant ces deux mouvements nous obtiendrons un mouvement parabolique. (Voir n° 92-*e*.)

(*d*) **Mouvement d'un point matériel pris au repos et soumis à l'action de deux forces F et F' dont les directions coïncident.** — Puisque chaque force agit comme si elle était seule, la force F communique au point matériel un mouvement uniformément varié d'accélération j ; la force F' lui communique un mouvement uniformément accéléré d'accélération j'. L'espace parcouru dans le premier mouvement est $\frac{1}{2}jt^2$; l'espace parcouru dans le second est $\frac{1}{2}j't^2$.

Les deux forces agissant en même temps, leurs effets s'ajoutent, et comme les deux mouvements ont la même trajectoire, le point matériel aura parcouru au bout du temps t

$$\frac{1}{2}jt^2 + \frac{1}{2}j't^2 = \frac{1}{2}(j + j')t^2.$$

Le mouvement résultant est donc uniformément varié et a pour accélération la somme $(j + j')$ des accélérations dues aux deux forces F et F'.

On pourra trouver une force φ capable de communiquer au point matériel l'accélération $(j + j')$; cette force sera égale à la somme des deux autres et aura même direction.

Donc deux forces agissant sur un même point matériel dans une même direction peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme algébrique. Nous déduirons de là deux théorèmes, savoir :

(*e*) **Théorème I.** — « Deux forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel. »

En effet la force F produisant l'accélération j, d'après ce qui précède, la force 2F produira l'accélération $2j$, la force 3F, l'accélération $3j$, et en général la force nF produira l'accélération nj. Cette propriété est indépendante de l'état de repos ou de mouvement du point matériel considéré.

(*f*) **Théorème II.** — « Deux forces égales, de même direction et de « sens contraire appliquées à un même point matériel ne modifient pas son « état de repos ou de mouvement. »

Ces forces communiquent en effet au point matériel des accélérations égales et de sens contraire, et l'accélération résultante est nulle.

On dit alors que le point est en équilibre sous l'action des deux forces qui lui sont appliquées.

Corollaire. — « Deux forces sont égales lorsqu'elles font séparément « équilibre à une troisième. »

(*g*) **Mouvement d'un point matériel partant du repos et soumis à deux forces F et F' de directions quelconques.** — Chacune des deux forces F et F' agissant seule communiquerait au point matériel un mouvement uniformément varié dans sa propre direction ; l'accélération due à la première étant j, celle due à la seconde étant j', nous avons vu (n° 92-*d*) que le mouvement résultant était un mouvement uniformément varié dont l'accélération J est la résultante géométrique des accélérations j et j'.

Ce mouvement pourrait être produit par une force φ unique, proportionnelle à l'accélération J et ayant même direction. Cette force se nomme la *résultante* des forces F et F'.

Puisque l'accélération J est, en grandeur et direction, la diagonale du parallélogramme construit sur les deux accélérations j et j', il en résulte, à cause de la proportionnalité des forces et des accélérations, que la résultante φ des deux forces F et F' est la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

97. **Mesure de l'intensité d'une force. — Unité de force.** — Nous avons vu que le mouvement de la chute des corps est uniformément accéléré, et par suite, il est dû à une force constante qui est ce que l'on nomme le *poids du corps*.

Ce poids sera le même à tous les instants en un même point de la terre, et par suite, pourra servir d'*unité de force*.

Le poids que l'on prendra comme unité de force est le *kilogramme* ; c'est le poids d'un litre d'eau distillée prise au maximum de densité, c'est-à-dire à 4° degrés centigrades.

Ce poids produira sur le ressort d'un *dynamomètre* un raccourcissement déterminé, de sorte qu'après ce raccourcissement, la tension du ressort fera équilibre à une force de 1 kilogramme.

Toute force qui produira sur le ressort le même raccourcissement fera alors équilibre à la tension du ressort et l'on dira que c'est une force de 1 kilogramme ; c'est là une définition que nous compléterons comme suit :

1° Une force de n kilogrammes serait une force produisant sur un dynamomètre le même raccourcissement que n forces de chacune 1 kilog. agissant ensemble et dans le même sens ; c'est une définition ou plutôt une convention, qui s'appliquerait aussi bien à 3, 4 et à un nombre entier quelconque.

2° Une force de $1/n$ de kilog. sera une force telle qu'il faudrait faire agir sur un dynamomètre n forces égales à elle pour produire le même effet que 1 kilog. ;

3° Une force égale à m/n de kilog. (à 5/7 de kilog. par exemple) serait une force telle qu'il en faudrait n (c'est-à-dire 7) pour produire le même effet que m (c'est-à-dire 5) kilogrammes.

Une force s'exprimera donc par le nombre de kilogrammes, entier ou fractionnaire, capables de produire sur le ressort d'un dynamomètre le même raccourcissement que cette force.

98. **Valeur de l'accélération due à une force F.** — Le poids P d'un corps est une force et nous savons que cette force, dite de pesanteur, communique à ce corps une accélération $g = 9^m,8088$.

Une force F communiquera à ce corps une accélération j, et l'on aura, d'après le théorème, n° 96-*e*, qui dit que les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment, à un même point matériel,

$$\frac{P}{F} = \frac{g}{j}, \qquad \text{d'où} \qquad j = \frac{Fg}{P}.$$

Inversement, connaissant l'accélération j communiquée à un corps de poids P par une force F, la valeur de cette force est $F = \frac{P}{g} \times j$.

99. **De la masse.**

(*a*) **Définition.** — Nous avons vu que les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel ; donc si des forces F, F', F'' appliquées à un point matériel lui communiquent des accélérations j, j', j'', nous aurons

$$\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{F''}{j''} = m, \qquad \text{quantité constante.}$$

Nous allons chercher à préciser le caractère de cette expression m.

Si nous considérons un corps solide, qui est un ensemble de points maté-

riels, la propriété précédente lui sera applicable, et le rapport entre une force et l'accélération qu'elle imprime à ce corps solide sera encore constant.

Ce rapport constant pour un même corps, est variable d'un corps à l'autre ; la *même force* imprimera à différents corps des accélérations plus ou moins grandes, et par suite leur communiquera un mouvement plus ou moins rapide.

L'accélération sera d'autant plus grande que la quantité m sera plus petite ; cette quantité m indique donc, en quelque sorte, la *capacité d'inertie* du corps considéré ; on l'appelle la *masse* du corps.

La masse d'un corps est donc la propriété, résultant de l'inertie de la matière, que possède ce corps de se laisser communiquer par une force une accélération plus ou moins grande, inversement proportionnelle à cette masse.

La masse ne constitue pas une résistance au mouvement.

(*b*) **Mesure de la masse. — Unité de masse.** — On dira que deux corps ont même masse lorsque la même force leur communiquera la même accélération, c'est-à-dire leur fera acquérir des vitesses égales dans des temps égaux.

Deux corps seront de masse double, triple, etc., l'une de l'autre s'il faut des forces double, triple, etc. l'une de l'autre pour leur communiquer une même accélération.

Cela revient à considérer la masse d'un corps comme proportionnelle au quotient $\frac{F}{j}$ d'une force appliquée à ce corps par l'accélération qu'elle lui imprime.

On prend comme valeur de la masse du corps la valeur de ce quotient.

L'*unité de masse* sera la masse d'un corps qui, sous l'influence d'une force de 1 kilogramme, prendrait au bout de une seconde de mouvement une vitesse égale à 1 mètre ; cette vitesse étant, comme on l'a vu, égale à l'accélération.

Puisque le poids d'un corps est une force constante qui lui communique l'accélération g, la masse d'un corps de poids P est $m = \frac{P}{g}$.

Le corps possédant l'unité de masse pèsera donc $P = g = 9^k,8088$, à Paris.

Ainsi donc la masse d'un corps est proportionnelle à son poids, mais elle est constante pour un même corps en tous les points de l'espace, tandis que le poids d'un même corps est plus faible à l'équateur qu'au pôle.

(*c*) **Problèmes.**

1° Connaissant la masse d'un corps et la force qui agit sur lui, trouver l'accélération que cette force lui communiquera.

De la relation $\frac{F}{j} = m$, on tire : $j = \frac{F}{m}$.

2° Connaissant la masse d'un corps, trouver la force capable de lui imprimer une accélération donnée.

De la même formule $\frac{F}{j} = m$, on tire $F = mj$.

(*d*) **Théorème.** — « Deux forces sont entre elles comme les masses « auxquelles elles communiquent la même accélération. » En effet :

Les forces F et F' communiquant à deux masses m et m' la même accélération j, on a d'après ce qui précède

$$F = mj \qquad \text{et} \qquad F' = m'j,$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{mj}{m'j} = \frac{m}{m'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — « Une même force communique à deux corps différents des « accélérations *inversement* proportionnelles à leurs masses ou à leurs poids. »

La force F agissant sur deux corps de masses m et m' leur communique respectivement les accélérations j et j' : on a donc

$$F = mj, \qquad F = m'j',$$

d'où

$$mj = m'j'$$

et

$$\frac{m}{m'} = \frac{j'}{j}.$$

Comme, en un même lieu, les poids sont proportionnels aux masses, il en résulte que l'on a aussi

$$\frac{p}{p'} = \frac{j'}{j},$$

p et p' étant les poids respectifs des deux corps, poids mesurés en un même point de la terre.

(*e*) **Application. — Machine d'Atwood.** — Cette machine a pour objet de vérifier les lois de la chute des corps.

Elle se compose essentiellement d'une poulie, extrêmement légère et mobile, sur laquelle passe un fil très fin aux extrémités duquel sont attachés deux poids rigoureusement égaux P. Le poids du fil, les frottements et l'inertie de la poulie sont négligeables par rapport aux deux poids P et ceux-ci restent en équilibre dans toutes les positions.

Si l'on ajoute sur l'un des poids P une masse additionnelle p, celui-ci va se mettre en mouvement en entraînant tout le système.

Le poids additionnel p, tombant librement, prendrait l'accélération g ; lorsqu'il tombe en entraînant les deux poids P, le système en mouvement pèse $(2P + p)$ et l'accélération g' qu'il prend est donnée par la relation

$$\frac{g'}{g} = \frac{p}{2P + p},$$

d'où

$$g' = \frac{gp}{2P + p}.$$

L'accélération g' sera plus petite que g. Le mouvement obtenu sera de même nature que le mouvement de la chute libre du poids p, mais moins rapide.

Les vitesses et les espaces parcourus seront réduits dans le même rapport que l'accélération, ce qui permettra d'étudier les lois de la chute des corps sur un appareil de faible hauteur. (Pour plus de détails, voir un traité quelconque de physique.)

§ 4. — Statique

Composition des forces situées dans un même plan.

100. Préliminaires.

(*a*) **Définition.** — Un système de forces agissant sur un point matériel ou sur un solide invariable est dit *en équilibre* lorsqu'il ne peut imprimer à ce point, ou à ce solide, pris au repos aucun mouvement, ou qu'il ne peut, si le point ou le solide sont en mouvement, modifier ce mouvement antérieurement acquis, lequel, on le sait, est rectiligne et uniforme.

(*b*) **Principes.**

1° On peut toujours supprimer un système de forces en équilibre, agissant sur un corps, sans modifier l'état de repos ou de mouvement de ce corps, et on peut, dans les mêmes conditions, lui supposer appliqué à un instant donné un système de forces en équilibre.

2° Si un corps est en équilibre, on peut toujours supposer fixés deux ou plusieurs de ses points sans changer son état d'équilibre. Ces principes sont évidents.

(*c*) **Théorèmes.**

Théorème I. — « On peut déplacer le point d'application d'une force sur « sa propre direction, pourvu que le deuxième point d'application choisi fasse « partie du système matériel auquel est appliquée la force, ou soit lié inva- « riablement à ce système » (fig. 87).

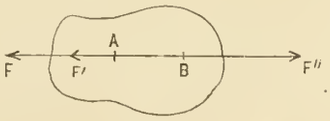


Fig. 87

Appliquons en effet au point B, pris sur la direction de la force, deux forces égales entre elles, mais de sens contraire, égales à la force F donnée et ayant même direction ; la condition du système ne sera pas modifiée puisque deux

pareilles forces se font équilibre. Les deux forces F et F″ égales et directement opposées sont en équilibre et peuvent être supprimées ; il no reste donc plus que la force F' égale à la force F et de même sens, mais appliquée au point B. C. Q. F. D.

C'est pour cette raison que la ligne AB se nomme la *ligne d'action* de la force F.

Théorème II. — « Si un corps, libre de tourner autour d'un point fixe ou « d'un axe fixe, est sollicité par une force passant par le point fixe ou située « dans le même plan que l'axe fixe, ce corps restera en équilibre. »

En effet, on pourra toujours, en déplaçant la force sur sa propre direction, amener son point d'application à être au point fixe ou en un point de l'axe fixe où son effet se trouve détruit ; on peut alors regarder la force comme équilibrée par une réaction égale, de même direction qu'elle, et de sens contraire au sien, due au point fixe ou à l'axe fixe.

Théorème III. — « Deux forces agissant sur un corps ne peuvent se faire « équilibre que si elles agissent dans la même direction et si elles sont égales « entre elles et de sens contraire. »

En effet, le corps étant en équilibre sous l'action de deux forces F et F', nous pouvons toujours, d'après le deuxième principe, supposer fixé un point de la force F' par exemple ; cette force est alors détruite par le point fixe, et l'équilibre ne pourra subsister que si la force F passe par ce même point. Comme on peut faire le même raisonnement pour tous les points de la force F', les forces F et F' doivent être directement opposées et égales.

Théorème IV. — « Si plusieurs forces se font équilibre sur un corps, l'une « quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à une force unique « qui produit le même effet que toutes les autres » (fig. 88). En effet :

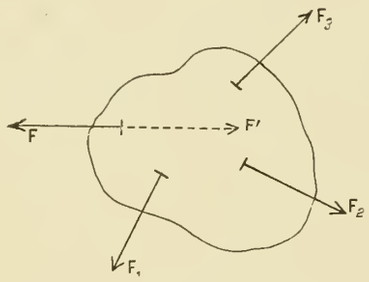


Fig. 88

Soit un corps en équilibre sous l'action des forces F, F_1, F_2 et F_3 ; j'applique au point d'application de F une force F' égale et directement opposée à la force F. L'effet produit sur le corps est le même que si la force F' agissait seule, puisqu'on peut, d'après le premier principe, supprimer le système des forces en équilibre F, F_1, F_2 et F_3.

Mais d'autre part, on peut considérer les forces F_1, F_2 et F_3 comme agissant seules, si on supprime les deux forces en équilibre F et F'.

Donc la force F' produit le même effet que les trois forces réunies F_1, F_2 et F_3 ; on l'appelle la *résultante* de ces forces ; on dit alors que F_1, F_2 et F_3 sont les *composantes* de F'.

La force F, égale et directement opposée à la force F', est dite l'*équilibrante* des trois forces F_1, F_2 et F_3.

La résultante des quatre forces F, F_1, F_2 et F_3 est alors la même que celle des deux forces F et F', et elle est par suite nulle.

Donc plusieurs forces qui se font équilibre sur un corps ont une résultante nulle, et réciproquement.

101. Composition de deux forces appliquées en un même point. (Voir 1re partie, nos 18 et suivants.)

102. Composition de forces, en nombre quelconque, situées dans un même plan.

(*a*) **Les forces sont concourantes en un même point.** (Voir 1re partie, no 18.)

(*b*) **Les forces ne sont pas concourantes.** (Voir 1re partie, no 23.)

103. Décomposition d'une force en deux autres. (Voir 1re partie, no 28.)

104. Décomposition d'une force en trois autres. (Voir 1re partie, no 31) (1).

105. Composition des forces parallèles.

(*a*) **Composition de deux forces parallèles et de même sens** (fig. 89). — Le dynamique de ces deux forces se réduit à une ligne droite obtenue en menant Ff'_1 égale et parallèle à f_1 puis $f'_1f'_2$ égale à f_2 ; l'équilibrante est $f'_2\overline{F}$.

Prenons un pôle O et construisons le funiculaire CDE ; CE étant le côté initial, DE le côté final ; le point E appartient à l'équilibrante et à la résultante des deux forces f_1 et f_2 ; plaçons la résultante EF.

Les triangles CKE, $Of'_1\overline{F}$ sont semblables comme ayant les côtés parallèles et donnent

$$\frac{CK}{KE} = \frac{Of'_1}{f'_1\overline{F}}.$$

De même les triangles semblables EKD et $Of'_1f'_2$ donnent

$$\frac{KD}{KE} = \frac{f'_1f'_2}{Of'_1}.$$

Divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{CK}{KD} = \frac{f'_1f'_2}{f'_1\overline{F}} = \frac{f_2}{f_1},$$

et comme

$$\frac{AH}{HB} = \frac{CK}{KD},$$

on a

$$\frac{AH}{HB} = \frac{f_2}{f_1}.$$

On conclut de tout cela : La résultante de deux forces parallèles et de même sens est une force parallèle aux forces données et de même sens, égale à leur somme et elle détermine sur la droite qui joint leurs points d'application un point dont les distances à ces points d'application sont inversement proportionnelles aux grandeurs des deux composantes.

L'équilibrante est égale et directement opposée à la résultante. Deux forces parallèles et de même sens ne peuvent donc être équilibrées que par une force parallèle à ces deux forces.

(*b*) **Composition de deux forces parallèles et de sens contraire** (fig. 89.) — Nous venons de voir que les trois forces f_1 et f_2 et $\overline{F}$ sont en équilibre ; donc l'une d'entre elles est l'équilibrante des deux autres,

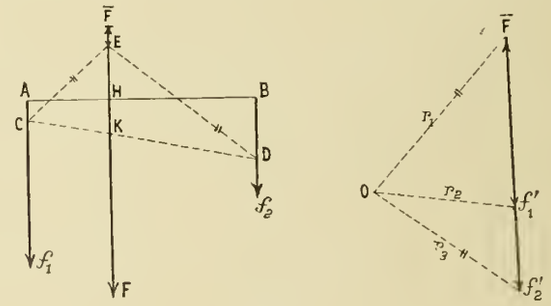


Fig. 89

et en particulier f_1 peut être regardée comme l'équilibrante de $\overline{F}$ et de f_2 ; la résultante de ces deux forces sera égale à f_1 en grandeur, mais de sens contraire.

De la relation

$$\frac{AH}{HB} = \frac{f_2}{f_1},$$

(1) Pour les nos 102, 103, 104 et pour quelques numéros plus loin, on se reportera complètement à la Statique graphique, première partie de l'ouvrage.

on tire
$$\frac{AH}{AH+HB}=\frac{f_2}{f_1+f_2},$$
ou
$$\frac{AH}{AB}=\frac{f_2}{F}.$$

Donc : La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire est une force qui leur est parallèle, qui est égale à leur différence, et de même sens que la plus grande des deux forces ; elle est appliquée sur le prolongement de la ligne qui joint les points d'application des deux forces données, en un point dont les distances à ces points d'application sont inversement proportionnelles aux grandeurs des deux composantes.

(*c*) **Cas particulier de deux forces parallèles égales et de sens contraire.** — En appliquant le résultat que nous venons de trouver à ce cas particulier, nous trouvons que la résultante est nulle et que son point d'application est rejeté à l'infini ; ce qui veut dire qu'un pareil système de deux forces ne peut pas être remplacé ni équilibré par une force unique.

Ce système de deux forces égales parallèles et de sens contraire s'appelle un *couple* ; et un couple est irréductible, c'est-à-dire ne peut pas être remplacé par autre chose que par un couple.

(*d*) **Composition de plusieurs forces parallèles.** (Voir 1re partie, n° 25.)

106. **Décomposition d'une force en deux autres forces parallèles.** (Voir 1re partie, n° 29.)

§ 5. — Théorie des couples

107. **Définitions.**

(*a*) **Couple** (fig. 90). — On nomme *couple* le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraire, appliquées en deux points différents d'un corps.

Menons une perpendiculaire commune à ces deux forces, sa longueur MN est ce que l'on nomme le *bras de levier* du couple ; nous le désignerons ordinairement par la lettre a.

On peut supposer les forces appliquées aux extrémités du bras de levier dont le milieu O s'appelle le *centre* du couple.

Si on suppose ce point fixe, l'effet du couple sera de faire tourner le bras de levier autour de son centre.

(*b*) **Moment d'un couple.** — Le moment d'un couple est le produit de l'une des forces de ce couple par son bras de levier.

Ce moment est *positif* et le couple est dit positif, s'il tend à faire tourner son bras de levier autour du centre du couple dans *le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.*

Il est négatif dans le cas contraire.

(*c*) **Axe représentatif du couple.** — Menons par le centre du couple une perpendiculaire au plan de ce couple et donnons-lui une longueur proportionnelle au moment du couple ; nous l'appellerons *l'axe du couple.*

L'axe doit être mené de telle manière qu'un observateur placé debout suivant cet axe sur le plan du couple verrait la rotation du bras de levier se produire dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

108. **Equivalence et équilibre de deux couples.**

(*a*) **Théorème I** (fig. 91). — « Un couple peut être équilibré par un

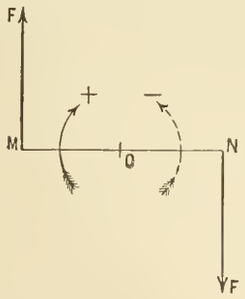


Fig. 90

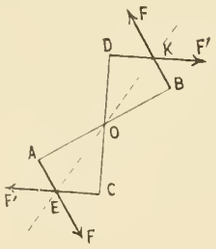


Fig. 91

« autre couple de même centre que lui, dont les forces sont égales mais diri- « gées de manière que les deux couples soient de signes contraires, et aient « le même bras de levier. »

Considérons un premier couple FF et un second couple F'F'. Supposons que le centre O soit commun, que les bras de levier AB et CD soient égaux et que les forces F et F soient égales aux forces F' et F', tandis que les rotations sont de sens différents.

Composons au point E, où elles se rencontrent, les deux forces F et F' ; leur résultante, puisqu'elles sont égales, est dirigée suivant la bissectrice de l'angle F'EF, qui, par raison de symétrie, est dans le prolongement de celle de l'angle AOC.

De même les deux forces F et F', qui se rencontrent au point K, ont leur résultante dirigée suivant la bissectrice de l'angle DOB, c'est-à-dire dans le prolongement de la première, mais de sens contraire.

Comme ces deux résultantes sont de plus égales, elles se font équilibre. Le système des deux couples est donc en équilibre.

Corollaire. — Si on fait tourner un couple d'un angle quelconque autour de son centre, il reste équivalent à lui-même.

(*b*) **Théorème II** (fig. 92). — « Deux couples qui ont même centre et « dont les moments sont égaux en valeur absolue, mais de signe contraire, se « font équilibre. » (V. la fig. 92 à la page suivante.)

Faisons tourner le deuxième couple autour de son centre jusqu'à ce que son bras de levier devienne perpendiculaire à celui du premier, il reste équivalent à lui-même. Composons alors les deux forces de droite F et F' au point K où elles se rencontrent. Leur résultante est la diagonale du rectangle construit sur ces deux forces et elle passe au point O à cause de la relation
$$F\times a=F'a'$$
qui entraîne
$$\frac{F}{F'}=\frac{a'}{a}.$$

Cette relation indique que les moments des deux couples sont égaux en valeur absolue.

Composons de même les deux forces de gauche au point E où elles se rencontrent, leur résultante passera aussi au point O ; elle sera égale à la précédente, dans la même direction, mais de sens contraire.

Ces deux forces, et par suite les deux couples, seront donc en équilibre.

Corollaire. — On peut changer les forces et le bras de levier d'un couple, et le faire tourner dans son plan autour de son centre, pourvu que son moment reste le même.

(*c*) **Couple unifié.** — Si l'on ramène le *bras de levier* d'un couple à être *égal à l'unité* de longueur, on dit que ce couple est *unifié* ; son moment est alors numériquement égal à la valeur de sa force.

(*d*) **Théorème III.** — « Deux couples situés dans un même plan, ou « dans des plans parallèles, et dont les moments sont égaux en valeur abso- « lue, et de sens contraire, se font équilibre. »

Amenons (fig. 93), par une rotation autour de son centre, le deuxième couple à avoir son bras de levier C'D' parallèle à celui du premier, AB.

Composons les deux forces F et F' parallèles et de même sens appliquées l'une en A, l'autre en D' ; le point d'application de leur résultante sera le point O de la droite AD', tel que l'on ait :

$$\frac{AO}{OD'} = \frac{F'}{F}.$$

De même le point d'application de la résultante des forces parallèles et de même sens F et F' appliquées l'une en B, l'autre en C' sera un point O' de la droite BC', tel que l'on ait :

$$\frac{BO'}{C'O'} = \frac{F'}{F}.$$

Il résulte de ces deux égalités que

$$\frac{AO}{OD'} = \frac{BO'}{C'O'}.$$

Les deux triangles semblables AOB et C'OD' donnent :

$$\frac{AO}{OD'} = \frac{BO}{C'O}.$$

Donc

$$\frac{BO}{C'O} = \frac{BO'}{C'O'},$$

et le point O' est confondu avec le point O. Par suite les deux résultantes sont égales et directement opposées, et le système des deux couples est en équilibre.

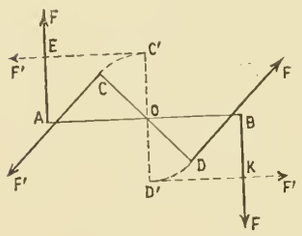


Fig. 92

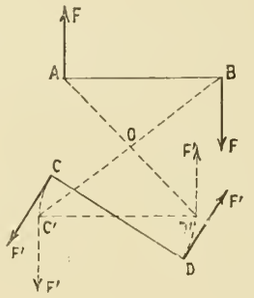


Fig. 93

Corollaire. — On peut déplacer un couple d'une manière quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle, changer ses forces et son bras de levier, pourvu que le moment de ce couple reste le même.

Il en résulte que l'axe d'un couple tel que nous l'avons défini peut être placé en un point quelconque de l'espace, pourvu que cet axe soit perpendiculaire au plan du couple, et qu'il soit égal en grandeur et sens au moment du couple.

(*e*) **Théorème IV.** — « Un couple ne peut jamais être ramené à une « force unique, et par suite, il ne peut jamais être équilibré par une force « unique. »

Ce théorème a été démontré plus haut (voir Ct, n° 105-*e*).

109. Unité de couple. — Unité de moment. — L'unité de couple est le couple dont la force est de un kilogramme, et le bras de levier de un mètre.

Le moment de ce couple est l'unité de moment égale au produit de un kilogramme par un mètre. On l'appelle *kilogramomètre*.

110. Composition de deux couples.

(*a*) **Couples ayant leurs axes parallèles.** — Nous pouvons toujours amener les deux couples à avoir leurs bras de leviers égaux, puis faire coïncider ces bras de levier ; alors :

1° Si les deux couples sont de même signe, nous avons à chaque extrémité du bras de levier deux forces dont les directions sont confondues, et qui sont de même sens ; on peut les remplacer par une force unique égale à leur somme. Les deux résultantes égales ainsi obtenues forment un couple équivalent à l'ensemble des deux couples, ayant le même bras de levier, et dont le moment est égal à la somme des moments des deux couples composants.

L'axe du couple résultant est donc égal à la somme des axes des couples composants.

2° Si les deux couples considérés sont de signe contraire, le couple résultant a pour moment la différence des moments des couples composants ; son axe est donc égal à la différence des axes des couples composants.

(*b*) **Couples quelconques dont les axes ne sont pas parallèles** (fig. 94). — Soit à composer deux couples dont les axes ne sont pas parallèles ; les plans de ces deux couples se coupent suivant une droite MN. Je prends sur cette droite une longueur AB égale à l'unité et j'amène chacun des deux couples à avoir dans son plan la droite AB comme bras de levier.

A chacune des extrémités A et B de cette droite, j'ai alors respectivement deux forces F et F' qui se composent par la règle du parallélogramme et donnent en ces deux points deux résultantes égales, parallèles et de sens contraire formant un couple équivalent à l'ensemble des deux couples donnés.

Le plan FAF' est perpendiculaire au bras de levier AB ; construisons au point A les axes des trois couples ; ils sont dans le plan FAF' et respectivement perpendiculaires aux forces F, F', et à leur résultante R. Ils ont même longueur que ces forces.

Si nous les faisions tourner tous les trois de 90° dans le même sens, nous pourrions les amener à coïncider avec les forces F, F' et R, d'où ce théorème :

(c) **Théorème.** — « L'axe du couple résultant est la diagonale du pa- « rallélogramme construit en un point de l'espace sur les axes des couples « composants. »

Il en résulte que deux couples dont les axes ne sont pas parallèles ne peuvent jamais se faire équilibre.

On remarquera que pour composer des couples, il suffit de composer leurs axes, ramenés à passer par un même point de l'espace, comme si c'étaient des forces appliquées en ce point ; la règle du polygone est donc applicable.

111. Composition d'une force et d'un couple.

1° Une force et un couple situés dans un même plan ou dans des plans parallèles ont toujours une résultante unique.

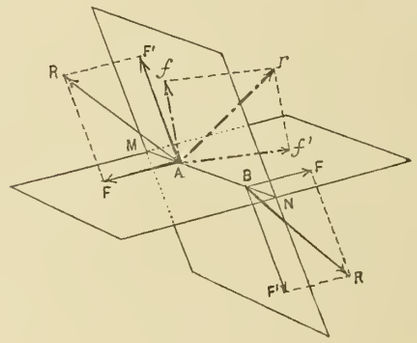


Fig. 94

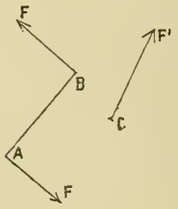


Fig. 95

On peut toujours, en effet, ramener le couple dans le plan de la force, puis composer une des forces du couple avec la force donnée, ce qui donne une résultante différant, au moins en grandeur, de la deuxième force du couple, et pouvant toujours, par suite, être composée avec elle et donner comme résultante une seule force.

2° Une force et un couple non situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles, ne peuvent pas avoir une résultante unique.

En effet, déplaçons le couple parallèlement à lui-même de manière à amener l'extrémité B du bras de levier du couple en un point de la force F' ; on pourra composer en ce point la force F' et la force BF du couple ; leur résultante ne sera pas dans le plan du couple, et par suite ne rencontrera pas la force AF, avec laquelle on ne pourra donc pas la composer.

112. Transport d'une force en un point. (Voir 1re partie, n° 14.)

113. Transport en un point de plusieurs forces appliquées à un solide.

(*a*) **Forces quelconques situées dans un même plan.** (Voir 1re partie, n° 34.)

(*b*) **Forces parallèles.** (Voir 1re partie, n° 35.)

§ 6. — Composition et équilibre des forces quelconques appliquées a un solide

114. Composition de trois forces non situées dans un même plan et appliquées en un même point (fig. 96). — Soient les trois forces F, F_1 et F_2 appliquées au point O ; je compose d'abord par la règle du parallélogramme les deux forces F et F_1 dans leur plan, ce qui me donne une résultante r ; je compose cette résultante avec la force F_2 par la même règle, ce qui me donne la résultante R des trois forces F, F_1 et F_2.

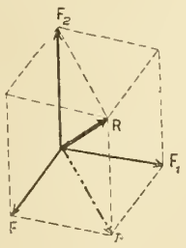


Fig. 96

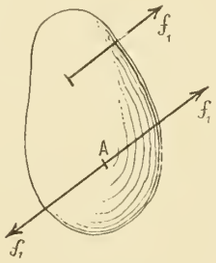


Fig. 97

Remarquons que la résultante R est la diagonale d'un parallélipipède construit sur les trois forces données comme arêtes ; d'où le nom de *règle du parallélipipède* donné à cette construction.

Il résulte de là que trois forces concourantes, non situées dans un même plan, ne peuvent jamais se faire équilibre, à moins d'être séparément nulles.

115. Composition de forces quelconques. — Théorème. — « Toutes les forces appliquées à un même corps solide peuvent toujours être « ramenées à une force unique appliquée en un point du corps, choisi arbi- « trairement, et à un couple unique » (fig. 97).

Transportons, en effet, toutes les forces en un point choisi A du corps ; pour chaque force telle que f_1, nous aurons au point A une force f_1, à laquelle nous devons adjoindre un couple ayant pour forces f_1 et pour bras de levier la distance du point A à la force considérée.

Toutes les forces ainsi obtenues au point A sont concourantes et ont par suite une *résultante unique*. Tous les couples pourront être ramenés à un *couple résultant unique*. C. Q. F. D.

Remarque. — La résultante est constante, quel que soit le point A choisi, et on l'appelle *résultante de translation*.

116. Etude analytique de la composition des forces appliquées à un corps solide (1).

(*a*) **Préliminaires.** — Puisque toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent se ramener à une force unique et à un couple, nous allons chercher l'expression algébrique de cette force et de ce couple.

Nous nous appuierons sur la théorie des projections (voir Ct, chap. II, § 3) et sur le théorème relatif au couple résultant du transport de plusieurs forces en un point (voir 1re partie, n° 34).

Nous donnerons en outre les définitions suivantes :

1° On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le moment du couple résultant du transport de la force en ce point.

2° On appelle *moment d'une force par rapport à un axe* le moment de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de l'axe sur ce plan.

(*b*) **Expression algébrique de la résultante de translation et du couple résultant** (fig. 98).

Considérons une force F appliquée en un point M d'un solide; soient OX, OY, OZ, trois axes rectangulaires auxquels nous rapporterons tous les points du solide, le point O étant le point où nous transporterons toutes les forces appliquées au solide. Les coordonnées du point M sont x, y et z. Décomposons la force F suivant trois directions parallèles aux axes de coordonnées.

(1) L'étude de ce paragraphe n'est pas indispensable pour l'intelligence des matières de la 1re partie.

Nommons X, Y et Z ses trois composantes ; et désignons par α, β et γ les angles que fait respectivement la force F avec les trois axes, nous avons

$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\cos\beta, \qquad Z = F\cos\gamma.$$

Nous pouvons au lieu de transporter la force F au point O, transporter en ce point ses trois composantes X, Y et Z; elles donneront lieu à trois couples que nous allons successivement étudier.

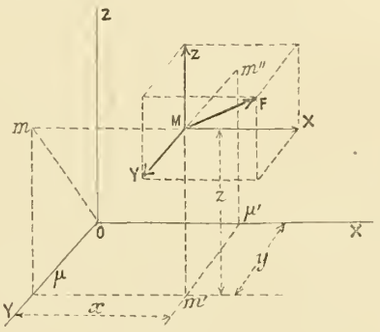


Fig. 98

La force X transportée au point O donne lieu à un couple dont le bras de levier est om ; je peux considérer ce couple comme composé de deux autres ayant même force que lui, et pour bras de levier $m\mu$ et $o\mu$; si j'applique en effet au point μ deux forces égales et de sens contraire, parallèles à X et égales à cette force, je ne change rien à l'équilibre du système, et j'ai constitué ainsi les deux couples en question.

Le premier couple, qui a pour bras de levier $m\mu$, a son axe dirigé suivant le sens positif de OY, et égal à Xz; le deuxième, dont le bras de levier est $o\mu$, a son axe dirigé suivant le sens négatif de OZ, et égal à Xy.

De même la force Y transportée au point O donne un couple dont le bras de levier est Om'', pouvant être décomposé en deux autres : le premier a pour bras de levier $O\mu'$ et son axe est dirigé suivant le sens positif de OZ et a pour valeur Yx; le deuxième a pour bras de levier $\mu'm''$; son axe est dirigé suivant le sens négatif de OX, et égal à Yz.

Enfin la force Z transportée de même au point O donne un couple dont le bras de levier est Om' et qui se décompose en deux autres ; le premier a pour bras de levier $O\mu'$; son axe est dirigé suivant le sens négatif de oY et a pour valeur Zx. Le deuxième a pour bras de levier $\mu'm'$, et son axe, dirigé suivant le sens positif de OX, est égal à Zy.

Nous avons donc en résumé sur chacun des axes de coordonnées les axes de deux couples donnant :

Sur OX ..... $Zy - Yz$,
Sur OY ..... $Xz - Zx$,
Sur OZ ..... $Yx - Xy$,

et respectivement les trois forces X, Y et Z.

Si nous faisons la même opération pour toutes les forces telles que F appliquées au corps solide, nous aurons suivant les trois axes de coordonnées trois sommes de composantes que nous appellerons

$$\Sigma X = R_x, \qquad \Sigma Y = R_y, \qquad \Sigma Z = R_z,$$

et suivant ces mêmes axes, trois sommes d'axes de couples

$$\Sigma(Zy - Yz) = S_x, \qquad \Sigma(Xz - Zx) = S_y,$$
$$\Sigma(Yx - Xy) = S_z..$$

On obtiendra la résultante de translation en composant R_x, R_y et R_z par la règle du parallélipipède.

On obtiendra l'axe du couple résultant en composant, par la même règle, les trois axes de couples S_x, S_y et S_z.

Remarquons que le moment de la force F par rapport à l'axe OX est la

quantité $Zy - Yz$; en effet, le moment de F par rapport à l'axe OX est le moment de la projection F' de F sur le plan YOZ par rapport au point O. La projection F' est la résultante des deux forces Y et Z, et son moment par rapport au point O est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, de ces deux forces, c'est-à-dire à $Zy - Yz$.

Nous dirons alors que si plusieurs forces sont appliquées à un corps solide, leur résultante de translation a pour composantes suivant trois axes rectangulaires les sommes algébriques des projections de toutes les forces sur ces trois axes ; l'axe du couple résultant s'obtient en composant trois axes de couples dirigés suivant les trois axes de coordonnées et ayant respectivement pour valeurs les sommes algébriques des moments de toutes les forces par rapport à ces trois axes de coordonnées.

(*c*) **Cas où le système des forces appliquées à un corps solide admet une résultante unique.** — Dans ce cas, le couple résultant est nul, et par suite, on a :

$$\Sigma(Yz - Zy) = 0,$$
$$\Sigma(Xz - Zx) = 0,$$
$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

(*d*) **Cas où le système des forces appliquées à un corps solide se ramène à un couple unique.** — La résultante de translation est alors nulle, et l'on a

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

(*e*) **Cas où le système des forces appliquées à un corps solide est en équilibre.** — Le système des forces appliquées à un corps solide sera en équilibre si la résultante de translation et le couple résultant sont en même temps nuls. On a donc les six équations :

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma(Zy - Yz) = 0,$$
$$\Sigma Y = 0, \qquad \Sigma(Xz - Zx) = 0,$$
$$\Sigma Z = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

qu'on appelle les *six équations d'équilibre*.

Ce résultat s'exprime encore de la manière suivante :

Un système de forces appliquées à un corps solide est en équilibre si les sommes algébriques des projections de ces forces sur trois axes fixes sont nulles, et si, en même temps, les sommes algébriques des moments de ces forces par rapport aux trois axes sont nulles.

Remarque. — Lorsque les forces sont situées dans un même plan, on les rapporte à deux axes de ce plan, et les six équations d'équilibre se réduisent à trois :

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

(*f*) **Cas des forces parallèles.** — Prenons l'axe des Z parallèle à la direction commune des forces ; alors la composante de chaque force suivant l'axe OZ a pour valeur la force elle-même, tandis que les composantes suivant les deux autres axes sont toujours nulles.

Les six équations d'équilibre se ramènent alors à trois :

$$\Sigma F = 0, \qquad \Sigma(F \times x) = 0, \qquad \Sigma(F \times y) = 0.$$

Si on convient d'appeler *moment d'une force par rapport à un plan* qui lui est parallèle le produit de la force par sa distance au plan, on voit que $F \times x$ est le moment de la force F par rapport au plan ZoY et $F \times y$, son moment par rapport au plan ZoX.

On peut dire alors que des forces parallèles forment un système en équilibre si leur somme algébrique est nulle, et si les sommes algébriques de leurs moments par rapport à *deux* plans qui leur sont parallèles, sont nulles.

Remarque. — Si les forces parallèles sont situées dans un même plan, en le prenant pour plan des ZOX, les équations se réduisent à deux :

$$\Sigma F = 0, \qquad \Sigma Fx = 0.$$

§ 7. — Centres de gravité

117. **Centres de plusieurs forces parallèles** (fig. 99 et 100). — Considérons deux forces parallèles f_1 et f_2 appliquées en deux points A et B d'un corps solide ; leur résultante passe en un point C de la droite AB, tel que l'on ait

$$\frac{AC}{CB} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Menons par les points A et B deux autres droites parallèles et supposons appliquées en ces points, suivant ces droites, deux forces f'_1 et f'_2 respectivement égales aux deux premières ; leur résultante passera encore au point C, et elle aura la même valeur que dans le premier cas.

Donc, si on incline deux forces parallèles d'un même angle autour de leurs points d'application, leur résultante conserve la même valeur, et elle passe

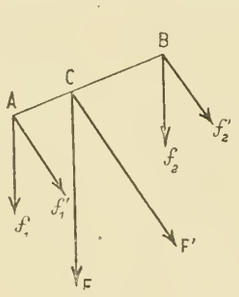


Fig. 99

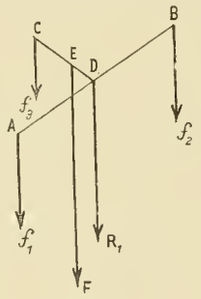


Fig. 100

toujours par un point fixe situé sur la ligne droite qui joint les points d'application des deux forces, et partageant cette ligne en deux segments inversement proportionnels aux forces adjacentes. Ce point s'appelle le *centre des deux forces parallèles*.

Soient maintenant trois forces f_1, f_2, f_3 appliquées aux points A, B, C (fig. 100).

La résultante R_1 des forces f_1 et f_2 passe au point D de la droite AB, tel que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{f_2}{f_1}.$$

La résultante F des trois forces données s'obtiendra en composant R_1 et f_3 ; elle passera au point E de la droite CE, et l'on aura :

$$\frac{CE}{ED} = \frac{R_1}{f_3}$$

Incliuons les trois forces autour de leurs points d'application, de manière qu'elles restent parallèles entre elles ; d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, R'_1 résultante des forces f'_1 et f'_2 est égale à R_1 et passe au point D ; F' résultante de R'_1 et de f'_1 est égale à F et passe au point E.

Le point E est donc fixe ; on le nomme *le centre des trois forces parallèles données*.

On étendrait le même raisonnement au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles. Donc,

Théorème. — « D'une manière générale, lorsqu'on fait tourner des forces « parallèles autour de leurs points d'application respectifs, de manière qu'elles « restent parallèles, leur résultante ne change pas de grandeur, et elle passe « toujours par un point fixe qu'on appelle le *centre des forces parallèles*. »

Remarques. — 1° Si les forces parallèles, sans changer de point d'application, changeaient de grandeur tout en restant proportionnelles entre elles ; si, par exemple, elles étaient amplifiées ou réduites dans un rapport constant, le centre de ces forces ne changerait pas ; leur résultante changerait seulement de grandeur et elle serait amplifiée ou réduite dans le même rapport.

2° Si les points d'application des forces sont tous dans un même plan ou sur une même droite, le centre des forces parallèles sera dans ce plan ou sur cette droite.

118. **Centre de gravité.** — Nous avons vu que le poids P d'un corps

est une force verticale, et que M étant la masse du corps, g l'accélération de la pesanteur, on a $P = Mg$.

Un corps solide peut être considéré comme formé d'un ensemble de points matériels de masse m ; le poids de chacun d'eux est une force verticale $p = mg$.

Toutes ces forces sont parallèles et de même sens ; elles ont une résultante unique égale au poids total P de ce corps. Le centre de ces forces verticales parallèles, dues à l'action de la pesanteur, s'appelle le *centre de gravité du corps*.

Nous ne pouvons pas, dans ce cas, changer la direction des forces par rapport au corps, mais nous faisons une opération équivalente en changeant la position du corps par rapport à la terre. Les forces resteront verticales, et la résultante de ces forces passera toujours par le centre de gravité, dont la position est fixe dans le corps.

L'action de toutes les forces parallèles telles que p agissant sur un corps peut être remplacée par l'action de leur résultante agissant au centre de gravité. On peut alors considérer ce point comme un point matériel ayant un poids égal à celui du corps tout entier, supposé condensé en ce point.

119. Définition du centre de gravité d'une ligne et d'une surface.

— Une surface géométrique n'a pas d'épaisseur, par suite, pas de poids ; il en est de même d'une ligne géométrique.

Au point de vue de la recherche du centre de gravité, nous considérerons toujours une ligne comme *ligne matérielle* formée d'une file de points matériels. De même une surface sera formée de la juxtaposition de lignes matérielles. Nous pourrons dire qu'une telle ligne ou une telle surface ayant une masse ont aussi un centre de gravité.

120. Recherche du centre de gravité des solides homogènes.

(*a*) **Définition.** — On dit qu'un corps est homogène quand des volumes égaux de ce corps ont des poids égaux, quelque petits que soient ces volumes. On peut donc considérer un tel corps comme formé de points matériels de même masse également distants les uns des autres.

(*b*) **Principes.** — Dans les solides homogènes, à figure géométrique, la détermination du centre de gravité peut être faite géométriquement d'après les principes suivants :

1° Si un corps peut se décomposer en divers éléments de poids partiels connus dont les centres de gravité soient connus, le centre de gravité du corps entier sera le centre des poids partiels appliqués en ces différents centres ; en particulier, si les centres de gravité partiels sont dans un même plan ou sur une même droite, le centre de gravité du corps sera dans ce plan ou sur cette droite.

2° Le centre de gravité d'une ligne droite homogène est en son milieu.

3° Si un corps a soit un plan de symétrie, soit un plan diamétral, soit un axe de symétrie, soit un centre de figure, le centre de gravité est dans ce plan, sur cet axe, ou à ce centre de figure.

4° Si une surface a un plan de symétrie, un plan diamétral, un axe de symétrie ou un centre de figure, son centre de gravité est dans ce plan, sur cet axe, ou en ce point.

5° Si une surface plane a un axe de symétrie, un diamètre, ou un centre de figure, le centre de gravité de cette surface est sur cette ligne ou en ce point.

6° Si une surface plane a un axe de symétrie, ou un centre de figure, le centre de gravité de son contour est sur cet axe ou en ce point.

(*c*) **Conséquences immédiates de ces principes.**

1° Le centre de gravité de l'aire ou du contour d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré ou d'un losange est au point de rencontre des diagonales.

2° Le centre de gravité de l'aire ou du contour d'un polygone régulier, d'un cercle ou d'une ellipse est au centre de figure.

3° Le centre de gravité du volume ou de la surface d'un parallélipipède, d'un cube ou d'un rhomboèdre est à son centre de figure, c'est-à-dire au point de rencontre des diagonales.

4° Le centre de gravité du volume ou de l'aire d'un prisme ou d'un cylindre est le point milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

5° Le centre de gravité du volume ou de la surface d'un polyèdre régulier, d'une sphère ou d'un ellipsoïde est à son centre de figure.

6° Le centre de gravité de la surface ou du volume d'un tore est à son centre de figure.

Remarque. — Le centre de gravité d'une figure peut être un point qui n'appartienne pas matériellement à la figure.

Exemples. — Le centre de gravité du contour d'un polygone ; celui de la surface d'une sphère ; celui de la surface ou du volume d'un tore.

121. Centre de gravité des lignes.

(*a*) **Ligne droite.** — Le centre de gravité d'une ligne droite est en son milieu.

(*b*) **Ligne brisée régulière** (fig. 101). — Le centre de gravité d'une ligne brisée régulière est sur le diamètre perpendiculaire au milieu de la corde qui joint les deux extrémités de la ligne brisée ; sa distance au centre du cercle inscrit dans la ligne brisée est égale au produit du rayon de ce cercle par la corde, divisé par la longueur de la ligne brisée. En effet :

Menons le diamètre XX' du cercle inscrit dans la ligne brisée, parallèle à la droite AF qui joint les deux extrémités de la ligne brisée ; le centre de gravité se trouvera sur la perpendiculaire OY à ce diamètre, puisque cette droite est un axe de symétrie de la figure.

Appliquons au milieu de chaque côté une force proportionnelle à la longueur de ce côté, et dirigée parallèlement au diamètre XX'.

La résultante de ces forces passera au centre de gravité, d'après ce qui a été dit précédemment, et le moment de cette résultante par rapport au plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par XX', sera égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce même plan.

Considérons par exemple une force f appliquée au milieu H du côté AB et dont nous prenons la longueur égale à AB. Son moment par rapport à XX' est

$$f \times Hh = AB \times Hh.$$

Les triangles semblables ABK, OHh donnent

$$\frac{AB}{OH} = \frac{AK}{Hh}, \qquad \text{d'où} \qquad AB \times Hh = HO \times AK.$$

Le moment de la force correspondant à un côté est donc égal au produit du rayon du cercle inscrit par la projection de ce côté sur le diamètre XX'.

La somme des moments des divers côtés de la ligne brisée sera donc égale au rayon du cercle inscrit multiplié par la projection de la ligne brisée sur le diamètre XX', c'est-à-dire par la corde AF.

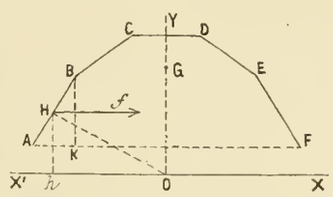


Fig. 101

Le moment de la résultante appliquée au point inconnu G, sera

$$GO \times (AB + BC + CD + DE + EF)$$

et l'on devra avoir, en appelant L la somme entre parenthèses,

$$HO \times AF = L \times GO ;$$

d'où $$GO = \frac{HO \times AF}{L}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*c*) **Centre de gravité d'un arc de cercle.** — Inscrivons dans l'arc de cercle une ligne brisée régulière et doublons indéfiniment le nombre de ses côtés, la propriété que nous venons de démontrer sera toujours vraie quel que soit le nombre des côtés, et elle le sera encore à la limite. Donc :

Le centre de gravité d'un arc de cercle est donc sur le diamètre perpendiculaire à la corde qui sous-tend l'arc ; sa distance au centre est égale au produit du rayon par la longueur de la corde, divisé par la longueur de l'arc.

(*d*) **Centre de gravité d'une demi-circonférence.**

Il suffit, dans la formule précédente, de faire $C = 2R$ et $L = \pi R$.

Alors $$GO = \frac{2R}{\pi}.$$

122. Centre de gravité des surfaces planes.

(*a*) **Centre de gravité d'un triangle** (fig. 102). — La médiane AM issue du sommet A partage en deux parties égales toutes les droites menées dans le triangle parallèlement à la base BC; c'est donc un diamètre pour la direction BC; le centre de gravité est donc sur la droite AM.

Pour des raisons analogues, il se trouve sur chacune des deux autres médianes; il est par suite à leur intersection, c'est-à-dire qu'il est sur chacune d'elles, à un tiers à partir de la base correspondante.

(*b*) **Centre de gravité de la surface d'un quadrilatère** (fig. 103) — Soit le quadrilatère ABCD; je le décompose par sa diagonale BD en deux triangles dont les centres de gravité sont respectivement les points E et F situés sur les médianes AM et CM, au tiers à partir de la base BD.

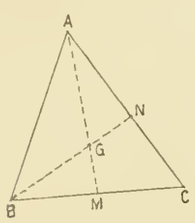


Fig. 102

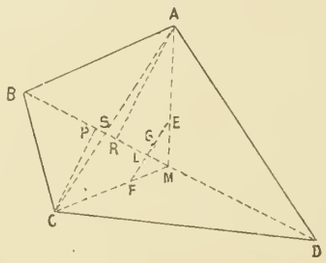


Fig. 103

Le centre de gravité du quadrilatère est sur EF; en un point G tel que

$$\frac{EG}{GF} = \frac{\text{aire BCD}}{\text{aire ABD}} = \frac{CP}{AR},$$

puisque les deux triangles BCD et ABD ont même base BD.

Les triangles semblables CPS, ARS, d'une part, MAC et MEF d'autre part, donnent

$$\frac{CP}{AR} = \frac{CS}{AS} \quad \text{et} \quad \frac{CS}{AS} = \frac{LF}{LE},$$

d'où $\frac{EG}{GF} = \frac{LF}{EL}$, puis $\frac{EG}{EG + GF} = \frac{LF}{LF + EL}$,

et comme $EG + GF = LF + EL = EF$,

on voit que $EG = LF$, d'où le tracé suivant:

1° On décompose le quadrilatère en deux triangles par une diagonale BD.

2° On cherche en E et en F les centres de gravité de chacun de ces deux triangles; et on joint E et F, par une droite qui recoupe en L la diagonale.

3° On retourne bout pour bout la droite EF et la nouvelle position du point L, après ce retournement, est le centre de gravité du quadrilatère.

(*c*) **Centre de gravité de la surface d'un trapèze** (fig. 104). — Le tracé précédent peut s'appliquer et c'est le plus simple. En voici deux autres.

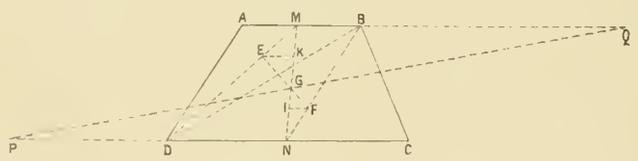


Fig. 104

1er tracé. — La droite MN qui joint les milieux des deux bases du trapèze est un diamètre pour toutes les droites parallèles aux bases; le centre de gravité est donc sur cette droite MN.

Décomposons le trapèze en deux triangles ABD et BDC, par la diagonale BD; le centre de gravité du premier est le point E au tiers de la médiane DM à partir de la base AB; le centre de gravité du second est F, au tiers de la médiane BN à partir de la base CD; le centre de gravité du trapèze est donc sur la droite EF au point G d'intersection de cette droite avec la droite MN.

2e tracé. — Menons les parallèles aux bases EK et FI; la longueur KI est le tiers de la hauteur H du trapèze, et l'on a

$$\frac{KG}{GI} = \frac{\text{surf. BCD}}{\text{surf. ABD}} = \frac{B}{b}; \qquad \text{on en tire :}$$

$$\frac{KG + GI}{GI} = \frac{B + b}{b}, \quad \text{d'où} \quad GI = \frac{H}{3} \cdot \frac{b}{(B + b)}$$

et $\frac{KG}{KG + GI} = \frac{B}{B + b}$, d'où $KG = \frac{H}{3} \cdot \frac{B}{(B + b)}$;

comme on a $GM = \frac{H}{3} + GK$ et $GN = \frac{H}{3} + GI$,

il vient $GM = \frac{H}{3} \frac{(2B + b)}{B + b}$ et $GN = \frac{H}{3} \frac{(B + 2b)}{B + b}$,

et par suite $$\frac{GM}{GN} = \frac{2B + b}{B + 2b} = \frac{B + \frac{b}{2}}{\frac{B}{2} + b}.$$

D'où le tracé suivant: 1° on mène la droite MN qui joint les milieux des bases; 2° on prolonge ensuite la petite base d'une longueur BQ égale à la grande base, puis la grande base d'une longueur DP égale à la petite base; 3° on joint le point P au point Q; le point de rencontre de la droite PQ avec la droite MN est le centre de gravité cherché.

(*d*) **Centre de gravité de la surface d'un polygone quelconque.** — On décompose par des diagonales ce polygone en triangles dont on cherche les centres de gravité; on applique en ces points des forces parallèles et respectivement proportionnelles aux surfaces des triangles; on compose ensuite ces forces entre elles, par la statique graphique, et le point d'application de leur résultante est le centre de gravité cherché.

(*e*) **Centre de gravité de la surface d'un secteur circulaire** (fig. 105). — Inscrivons dans l'arc AB une ligne polygonale régulière et considérons le secteur polygonal régulier ainsi formé; le centre de gravité de chacun des triangles égaux tels que MN qui le composent est sur l'apothème OI de ce triangle, aux deux tiers à partir du centre O.

Doublons indéfiniment le nombre des côtés de la ligne polygonale, le secteur polygonal a pour limite le secteur de cercle; l'apothème de chaque triangle tend vers le rayon; les centres de gravité de ces triangles forment un contour polygonal régulier dont le nombre des côtés double en même temps que celui des côtés de la ligne polygonale inscrite dans l'arc AB, et qui a pour limite l'arc A'B' décrit du point O comme centre avec un rayon égal aux deux tiers du rayon du secteur.

Le centre de gravité du secteur est alors le même que celui de l'arc de cercle A'B' sur lequel on supposerait tout son poids condensé.

Ce centre de gravité (voir Ct, 121-*c*) est sur le rayon OC perpendiculaire à la corde AB du secteur, en un point G tel que

$$OG = \frac{OA' \times \text{corde } A'B'}{\text{arc } A'B'};$$

or on a $OA' = \frac{2}{3} OA$ et $\frac{\text{corde AB}}{\text{arc AB}} = \frac{\text{corde } A'B'}{\text{arc } A'B'}$,

il vient donc $$OG = \frac{2}{3} OA \times \frac{\text{corde AB}}{\text{arc AB}}.$$

(*f*) **Centre de gravité de la surface d'un demi-cercle.** — En appliquant au demi-cercle la formule trouvée pour le secteur, nous voyons que son centre de gravité est sur le rayon perpendiculaire au diamètre, et à une distance du centre égale à $4R : 3\pi$.

(*g*) **Centre de gravité d'une demi-couronne** (fig. 106). — Prenons les centres de gravité g et g' des deux demi-cercles dont la couronne est la différence; appliquons aux points g et g' des forces proportionnelles aux surfaces des demi-cercles, c'est-à-dire aux carrés de leurs rayons et de sens contraire, et composons ces forces.

Leur résultante passera au point G centre de gravité de la couronne, et sera proportionnelle à sa surface ou à la différence des carrés des rayons des deux demi-cercles.

En prenant les moments par rapport au plan passant par le diamètre et perpendiculaire au plan de la figure, nous avons :

$$R^2 \times Og - r^2 \times Og' = (R^2 - r^2)OG,$$

et comme $\quad Og = \frac{4R}{3\pi} \quad$ et $\quad Og' = \frac{4r}{3\pi},$

il vient $\quad \frac{4(R^3 - r^3)}{2\pi} = (R^2 - r^2)OG,$

d'où $\quad OG = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} = \frac{4(R^2 + Rr + r^2)}{3\pi(R + r)}.$

(*h*) **Centre de gravité d'un segment de cercle** (fig. 107). — Le segment ACB est la différence entre le secteur OACB et le triangle OAB ; les centres de gravité de ces figures, sont sur le rayon AC perpendiculaire à la corde AB.

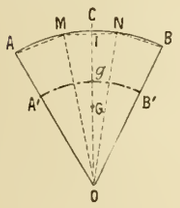


Fig. 105

Fig. 106

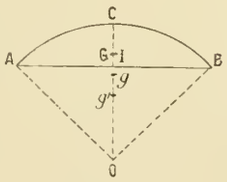


Fig. 107

Appliquons au centre de gravité g du secteur une force égale à sa surface ω et parallèle à AB ; au centre de gravité g' du triangle, appliquons une force parallèle à la précédente, de sens contraire, et égale à la surface ω' du triangle. Leur résultante passera au point G, centre de gravité du segment, et sera égale à la surface Ω de ce segment.

Prenons les moments de ces forces par rapport au plan perpendiculaire à AC, et passant par le point O, nous avons :

$$\omega \times Og - \omega' \times Og' = \Omega \times OG,$$

et comme $\quad \omega = \text{arc AB} \times \frac{R}{2}, \quad \omega' = AB \times \frac{OI}{2},$

$$Og = \frac{2}{3} R \frac{\text{corde AB}}{\text{arc AB}}, \quad Og' = \frac{2}{3}\overline{OI},$$

il vient $\quad \frac{1}{3}R^2 \times AB - \frac{1}{3}AB \times \overline{OI}^2 = \Omega \times OG.$

Le premier membre peut s'écrire $\frac{1}{3}\overline{AB}(R^2 - \overline{OI}^2) = \frac{\overline{AB}^3}{12},$

on a donc finalement : $\quad \overline{OG} = \frac{\overline{AB}^3}{12\Omega}.$

(*i*) **Centre de gravité de l'aire d'une courbe quelconque.** (Voir 1re partie, n° 67.)

123. Centre de gravité des volumes.

(*a*) **Centre de gravité du volume d'une pyramide triangulaire** (fig. 108.) — Soit la pyramide triangulaire SABC ; menons le plan

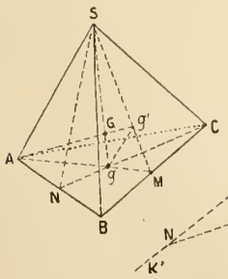


Fig. 108

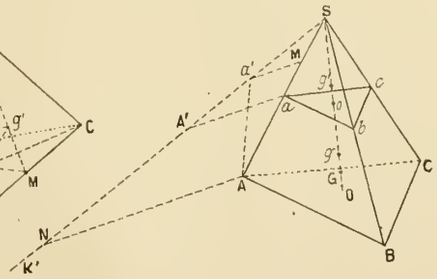


Fig. 109

SMA qui passe par l'arête SA et le milieu M du côté BC ; ce plan est un plan diamétral et par suite renferme le centre de gravité de la pyramide ; il en est de même du plan SNC déterminé par l'arête SC et le milieu N de l'arête AB : le centre de gravité est sur l'intersection Sg de ces deux plans, la droite Sg passant par le centre de gravité g de la base ABC.

Pour la même raison, le centre de gravité de la pyramide se trouve sur la droite Ag' qui joint le sommet A au centre de gravité g' de la face opposée SBC ; il est par suite à l'intersection G des droites Sg et Ag'. Menons la droite gg' ; les triangles Mgg' et MAS sont semblables et donnent :

$$\frac{Mg}{MA} = \frac{gg'}{SA} = \frac{1}{3}.$$

Mais les triangles Ggg' et GAS sont aussi semblables et donnent

$$\frac{Gg}{GS} = \frac{gg'}{SA} = \frac{1}{3}. \qquad \text{Donc} \qquad Gg = \frac{1}{3}GS = \frac{1}{4}Sg.$$

Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est donc sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, et à un quart de cette droite à partir de la base.

(*b*) **Centre de gravité du volume d'une pyramide quelconque.** — Décomposons cette pyramide en pyramides triangulaires ayant comme sommet celui de la pyramide donnée et pour bases les triangles obtenus en décomposant sa base en triangles par des diagonales.

Les centres de gravité de ces pyramides triangulaires seront tous dans un même plan parallèle à la base et passant au quart de la hauteur.

Le centre de gravité de la pyramide donnée est donc dans ce plan et aussi sur la droite qui joint le centre de gravité de la base de la pyramide à son sommet ; il est donc au quart de cette droite à partir de la base.

(*c*) **Centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles** (fig. 109). — Le tronc de pyramide peut être considéré comme la différence des volumes des deux pyramides SABC, *sabc*, ayant pour centres de gravité g et g', situés sur la ligne qui joint le sommet S au centre de gravité de la base ABC. Nous devons appliquer aux points g et g' des forces parallèles et de sens contraire, respectivement égales aux volumes des deux pyramides, ou proportionnelles aux cubes des arêtes homologues $\overline{SA}^3$ et $\overline{Sa}^3$. Le centre de gravité G sera sur le prolongement de la ligne gg', du côté de g, et l'on aura

$$\frac{Gg}{Gg'} = \frac{Sa^3}{SA^3}.$$

Menons par le point S la droite quelconque SK sur laquelle nous prendrons $SA' = SA$ et $Sa' = Sa$.

Joignons le point A au point a', le point a au point A' ; menons $a'M$ parallèle à $A'a$ jusqu'à sa rencontre en M avec SA, puis AN parallèle à $A'a$ jusqu'à sa rencontre avec SK.

Les triangles semblables $Sa'M$ et $SA'a$ d'une part, SaA' et SAN d'autre part, et les triangles égaux SAa' et $SA'a$ donnent :

$$\frac{SM}{Sa'} = \frac{Sa}{SA'}. \quad \Big| \quad \frac{SA}{SN} = \frac{Sa}{SA'}. \quad \Big| \quad \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA'}.$$

En multipliant ces trois égalités membre à membre, et remarquant que $SA' = SA$, il vient

$$\frac{SM}{SN} = \frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Gg}{Gg'} = \frac{SM}{SN},$$

et

$$\frac{Gg}{Gg' - Gg} = \frac{SM}{SN - SM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{Gg}{gg'} = \frac{SM}{SN - SM}.$$

Cette égalité permet de trouver la position du point G par la construction d'une quatrième proportionnelle.

TABLES NUMÉRIQUES

I. TABLE DES NOMBRES DE 1 A 1000

Donnant le nombre n, le carré n^2, le cube n^3, la racine carrée $\sqrt{n}$, la racine cubique $\sqrt[3]{n}$, le logarithme vulgaire $\log n$, mille fois l'inverse du nombre c'est-à-dire $\frac{1000}{n}$, ainsi que la longueur πn de la circonférence et la surface $\frac{\pi n^2}{4}$, du cercle qui auraient le nombre n pour *diamètre*.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65
68	4624	314432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00
82	6724	551368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61
93	8649	804357	6,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8824,73
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8992,02
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9160,88
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9331,32
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9503,32
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9676,89
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9852,03
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10028,7
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10207,0
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10386,9
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10568,3
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10751,3
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10935,9
119	14161	1685199	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11122,0
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11309,7
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11499,0
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11689,9
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11882,3
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12076,3
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12271,8
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12469,0
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12667,7
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12868,0
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13069,8

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13273,2
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13478,2
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13684,8
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13892,9
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14102,6
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14313,9
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14526,7
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14741,1
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14957,1
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15174,7
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	15393,8
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15614,5
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15836,8
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16060,6
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16286,0
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16513,0
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16741,5
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16971,7
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17203,4
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17436,6
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	17907,9
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57893	477,52	18145,8
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18385,4
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18626,5
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18869,2
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19113,4
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19359,3
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19609,7
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19855,7
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20106,2
161	25922	4173281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20358,3
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20612,0
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20867,2
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	21124,1
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21382,5
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	21642,4
167	27899	4657463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21904,0
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22167,1
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22431,8
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22698,0
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22965,8
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23235,2
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23506,2
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23778,7
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24052,8
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24328,5
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24605,7
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24884,6
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25164,9
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25446,9
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25730,4
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26015,5
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26302,2
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26590,4
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26880,3
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27171,6
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27464,6
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27759,1
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28055,2
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28352,9
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28652,1
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28952,9
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29255,3
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29559,2
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29864,8
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30171,9
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30480,5
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30790,7
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31102,6
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31730,9
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32047,4
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32365,5
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	32685,1
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33006,4
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33329,2
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33653,5
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33979,5
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34307,0
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34636,1
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34966,7
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35298,9
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35632,7
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35968,1
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36305,0
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36643,5
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36983,6
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37325,3
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,34044	5,56621	688,01	37668,5
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	38013,3
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38359,6
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38707,6
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48431	700,58	39057,1
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39408,1
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39760,8
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40115,0
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40470,8
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40828,1
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41187,1
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41547,6
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41909,6
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42273,3
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42638,5
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43005,3
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43373,6
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43743,5
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44115,0
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44488,1
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44862,7
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45238,9
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45616,7
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45996,1
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46377,0
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46759,5
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47143,5
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47529,2
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47916,4
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	48305,1
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48695,5
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49480,9
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49875,9
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50272,6
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50670,7
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51070,5
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51471,9
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51874,8
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52279,2
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52685,3
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53092,9
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53502,1
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53912,9
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54325,2
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54739,1
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55154,6
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55571,6
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55990,2
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56410,4
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56832,2
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57255,5
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57680,4
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58106,9
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,65	58534,9
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58964,6
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59395,7
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59828,5
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60262,8
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60698,7
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	61136,2

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61575,2
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62015,8
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62458,0
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62901,8
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63347,1
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63794,0
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64242,4
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64692,5
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65144,1
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65597,2
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	66052,0
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66508,3
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66966,2
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67425,6
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67886,7
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68349,3
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68813,4
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69279,2
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69746,5
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70215,4
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71157,9
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71631,5
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72106,6
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72583,4
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73061,7
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73541,5
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74023,0
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74506,0
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74990,6
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75476,8
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75964,5
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76453,8
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76944,7
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77437,1
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77931,1
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78426,7
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78923,9
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79422,6
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79922,9
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80424,8
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11527	1008,5	80928,2
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81433,2
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	81939,8
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82448,0
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82957,7
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	83469,0
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83981,8
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84496,3
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85012,3
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85529,9
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86049,0
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86569,7
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87092,0
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87615,9
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88141,3
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88668,3
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89196,9
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89727,0
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90258,7
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90792,0
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91326,9
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91863,3
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92401,3
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92940,9
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	93482,0
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	94024,7
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94569,0
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95114,9
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95662,3
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96761,8
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97314,0
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97867,7
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98423,0
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98979,8
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99538,2
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100098
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100660
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101223
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101788
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102354
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102922
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103491
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104062
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104635
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105209
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105784
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106362
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106941
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107521
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108103
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108687
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109272
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109858
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110447
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111036
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111628
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112221
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112815
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113411
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1196,9	114009
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114608
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115209
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115812
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116416
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117021
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117628
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118237
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118847
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119459
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1228,4	120072
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120687
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121304
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121922
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122542
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123163
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123786
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124410
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125036
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126293
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126923
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127556
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128190
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128825
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129462
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130100
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130741
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131382
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132025
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132670
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133317
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133965
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134614
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135265
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135918
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136572
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137228
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1216,3	137885
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138544
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139205
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139867
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140531
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141196
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141863
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142531
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143201
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143872
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144545

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145220
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145896
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	146574
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147254
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147934
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148617
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149301
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149987
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150674
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151363
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152053
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	152745
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	153439
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154134
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154830
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155528
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156228
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156930
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157633
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	158337
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21730	1416,9	159751
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160460
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161171
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161883
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162597
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163313
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164030
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	164748
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165468
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166190
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166914
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167639
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168365
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169093
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169823
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170554
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171287
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172021
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172757
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173494
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174234
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174974
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	175716
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	176460
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177205
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177952
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178701
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179451
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180203
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180956
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181711
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	182467
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183225
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183984
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184745
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185508
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186272
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187038
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187805
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188574
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189345
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190117
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190890
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191665
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192442
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193221
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194000
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194782
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195565
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197136
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197923
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198713
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199504

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200296
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	201090
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201886
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	202683
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203482
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204282
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205084
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205887
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206692
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207499
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208307
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	209117
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209928
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210741
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211556
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212372
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213189
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214008
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214829
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215651
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216475
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217301
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218128
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218956
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219787
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220618
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221452
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222287
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223123
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223961
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224801
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225642
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226484
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227329
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228175
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229022
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229871
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230722
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231574
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232428
545	297025	161878625	23,3452	9,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233283
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234140
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234998
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235858
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236720
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238448
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239314
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240182
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241051
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241922
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242795
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243669
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244545
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245422
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246301
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247181
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765,6	248063
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248947
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249832
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250719
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251607
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1781,3	252497
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253388
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254281
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255176
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793,8	256072
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256970
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257869
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258770
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259672
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1812,7	261482
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1815,8	262389
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263298

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$\frac{1000.}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1822,1	264208
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265120
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266033
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,5	266948
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267865
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1837,8	268783
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1841,0	269703
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270624
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1847,3	271547
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272471
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1853,5	273397
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1856,7	274325
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1859,8	275254
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276184
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277117
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,2	278051
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278986
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1875,5	279923
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,7	280862
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281802
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283687
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284631
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285578
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286526
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287475
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288426
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	289379
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290333
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291289
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292247
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293206
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294166
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295128
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296092
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297057
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298024
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298992
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299962
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	300934
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301907
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302882
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303858
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304836
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305815
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306796
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307779
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308763
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309748
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310736
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311725
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	312715
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313707
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314700
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315696
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316692
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317690
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318690
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319692
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320695
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321699
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322705
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323713
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324722
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325733
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326745
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327759
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328775
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,81158	1,54321	2035,8	329792
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330810
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332853
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333876
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334901
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335927

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$\frac{1000.}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336955
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337985
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339016
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340049
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341083
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342119
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2076,6	343157
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344196
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2082,9	345237
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346279
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347323
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348368
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349415
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350464
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351514
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352565
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353618
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2111,2	354673
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355730
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356788
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357847
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358908
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2126,9	359971
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361035
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2133,1	362101
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363168
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364237
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365308
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366380
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,8	367453
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368528
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369605
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370684
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371764
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2,83822	1,45138	2164,6	372845
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373928
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375013
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376099
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2177,1	377187
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378276
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379367
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,5	380459
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381553
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2192,8	382649
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2196,0	383746
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2202,3	385945
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2205,4	387047
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2208,5	388151
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2211,7	389256
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2214,8	390363
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391471
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392580
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,2	393692
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394805
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395919
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2233,7	397035
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398153
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2240,0	399272
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2243,1	400393
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401515
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402639
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2252,5	403765
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2255,7	404892
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2258,8	406020
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407150
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408282
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409415
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2271,4	410550
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411687
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2277,7	412825
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413965
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2283,9	415106
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416248
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2290,2	417393

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2.86332	1,36986	2293,4	418539
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419685
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	2,86451	1,36612	2299,6	420835
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36420	2302,8	421986
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2.86570	1,36240	2305,9	423138
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424292
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2.86688	1,35870	2312,2	425447
737	543169	400315553	27,1477	9.0328	2,86747	1.35685	2315,4	426604
738	544644	401947272	27,1662	9 0369	2,86806	1,35501	2318,5	427762
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2321,6	428922
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430084
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2327,9	431247
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2331,1	432412
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433578
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434746
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435916
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437087
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438259
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439433
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440609
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442965
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444146
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445328
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446511
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2371,9	447697
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448883
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450072
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451262
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452453
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2387,6	453646
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454841
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2.88195	1,31234	2393,9	456037
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457234
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458434
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459635
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460837
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462041
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463247
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464454
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465663
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466873
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468085
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469298
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470513
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471730
776	602176	467288576	27,8568	9.1894	2,88986	1,28866	2437,9	472948
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474168
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475389
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476612
780	608400	474552000	27,9285	9.2052	2,89209	1,28205	2450,4	477836
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479062
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480290
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481519
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482750
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483982
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485216
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486451
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487688
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488927
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490167
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491409
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492652
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493897
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495143
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496391
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497641
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498892
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500145
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501399
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655
801	641601	513922401	28.3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503912
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505171
803	644809	517781627	28.3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506432
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507694
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508958
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510223
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511490
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512758
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514028
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515300
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516573
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517848
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519124
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520402
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521681
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522962
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524245
818	669124	547343432	28,6007	9.3523	2,91275	1,22249	2569,8	525529
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526814
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528102
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529391
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530681
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531973
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533267
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534562
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535858
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537157
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538456
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539758
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541061
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542365
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543671
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544979
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546288
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547599
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548912
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550226
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551541
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2635,8	552858
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554177
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555497
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556819
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558142
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559467
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560794
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562122
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563452
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564783
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566116
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2673,5	568786
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2676,6	570124
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2679,8	571463
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2682,9	572803
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2686,1	574146
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2689,2	575490
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2692,3	576835
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2695,5	578182
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2698,6	579530
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2701,8	580880
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2704,9	582232
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2708,1	583585
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2711,2	584940
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2714,3	586297
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2717,5	587655
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2720,6	589014
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2723,8	590375
868	753424	653972032	29.4618	9,5391	2,93852	1,15207	2726,9	591738
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2730,0	593102
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2733,2	594468
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2736,3	595835
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2739,5	597204
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2742,6	598575
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2745,8	599947
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2748,9	601320
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2752,0	602696
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2755,2	604073
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2758,3	605451
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2761,5	606831

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2764,6	608212
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2767,7	609595
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2770,9	610980
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2774,0	612366
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2777,2	613754
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2780,3	615143
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2783,5	616534
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2786,6	617927
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2789,7	619321
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2792,9	620717
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2796,0	622114
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2799,2	623513
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2802,3	624913
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,65085	1,11982	2805,4	626315
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2808,6	627718
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2811,7	629124
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2814,9	630530
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2818,0	631938
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2821,2	633348
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2824,3	634760
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637587
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639003
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640421
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641840
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643261
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644683
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646107
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647533
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648960
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650388
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2862,0	651818
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653250
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654684
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656118
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657555
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658993
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660433
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661874
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663317
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664761
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666207
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667654
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2899,7	669103
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670554
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672006
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673460
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674915
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676372
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677831
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679291
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680752
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682216
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683680
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685147
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686615
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688084
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689555
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691028
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692502

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693978
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695455
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696934
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698415
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699897
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701380
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702865
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704352
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705840
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707330
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710315
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2990,8	711809
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713306
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714803
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716303
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717804
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719306
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3009,6	720810
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722316
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3015,9	723823
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725332
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726842
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3025,4	728354
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729867
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731382
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732899
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734417
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735937
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737458
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738981
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740506
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742032
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743559
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,98856	1,02669	3059,9	745088
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746619
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3066,2	748151
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749685
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751221
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752758
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754296
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755837
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3085,0	757378
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758922
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760466
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762013
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763561
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765111
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766662
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768214
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769769
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771325
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772882
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774441
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776002
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777564
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779128
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780693
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782260
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783828

II. VALEURS DE QUELQUES NOMBRES USUELS

$\pi = 3,141592$	$\pi^2 = 9,869604$	$\text{Log}\,\pi = 0,49715$	g [1] $= 9,81$
$\frac{1}{2}\pi = 1,570796$	$4\pi^2 = 39,478417$	$\text{Log}\,\frac{1}{\pi} = \bar{1},50285$	$\frac{1}{g} = 0,10193$
$\frac{1}{3}\pi = 1,047197$	$\frac{1}{4}\pi^2 = 2,462401$	$\text{Log}\,\pi^2 = 0,99430$	$\sqrt{g} = 3,13209$
$\frac{1}{\pi} = 0,318310$	$\frac{1}{\pi^2} = 0,101321$	$\text{Log}\,\frac{1}{\pi^2} = \bar{1},00570$	$\frac{1}{\sqrt{g}} = 0,31927$

(1) g est l'accélération due à la pesanteur, à Paris.

GETTY RESEARCH INSTITUTE
3 3125 01259 4186